Diferenciálne rovnice v programu Mathematica

Differential equations

in Mathematica

Michal Matiáš

Bakalářská práce
2010

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Michal MATIÁŠ**
Osobní číslo:	**A07063**
Studijní program:	**B 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Informační a řídicí technologie**
Téma práce:	**Diferenciální rovnice v programu Mathematica**

Zásady pro vypracování:

1. **Definujte základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.**
2. **Uveďte a popište příkazy programu Mathematica užívané při řešení diferenciálních rovnic. Zaměřte se zejména na vizualizaci řešení.**
3. **Na konkrétních příkladech demonstrujte použití jednotlivých příkazů.**
4. **Zpracujte stejné příklady v jiném programu, např. Maple.**
5. **Porovnejte výsledky získané oběma programy.**

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **BRONSON, R. Schaum's Outline of Differential Equations. McGraw-Hill. ISBN 0070080194.**

2. **KALAS, J.; Ráb, M. Obyčejné diferenciální rovnice, Brno, 1995. ISBN 80-210-1130-0.**

3. **RÁB, M. Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic, Brno, 1998. ISBN 80-210-1818-6.**

4. **REKROTYS, K. Přehled užité matematiky II. Prometheus 2000. ISBN 80-7196-181-7.**

5. **The Mathematica Book, manuál pro software Mathematica.**

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **5. března 2010**

Termín odevzdání bakalářské práce: **1. června 2010**

Ve Zlíně dne 5. března 2010

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky
L.S.

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan

doc. Ing. Ivan Zelinka, Ph.D.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Cieľom bakalárskej práce bolo popísať základné funkcie programu Mathematica, ktoré sa využívajú pri riešení diferenciálnych rovníc. Použitie týchto funkcií potom autor demonštroval na vhodne zvolených príkladoch. Zameral sa hlavne na vizualizáciu riešení.

Klíčová slova: obyčajná diferenciálna rovnica, Mathematica, partikulárne riešenie, DSolve, Bernoulliho rovnica, Plot.

ABSTRACT

The purpose of this bachelor thesis was to describe basic functions used in Mathematica in solving of differential equations. Author demostrated this functions on suitable examples. Namely, he focused on the visualisation of solutions.

Keywords: ordinary differential equation, Mathematica, particular solution, DSolve, Bernoulli equation, Plot.

Týmto by som rád poďakoval pani Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za cenné rady, pripomienky pri konzultáciach a všetok čas, ktorý mi venovala pri odbornom vedení tejto práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky UTB ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo -bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem UTB ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly UTB ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého UTB ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,že

jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně ....

podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD

Cieľom mojej práce bolo, ako je už z názvu zrejmé, spracovať rôzne príklady z predmetu Diferenciálne rovnice pomocou programu *Mathematica*. Keďže som tento predmet sám absolvoval, rozhodol som sa počítať príklady trochu menej namáhavou a interaktívnejšou cestou. Každý študent bude mať možnosť si podľa vypracovaní skontrolovať ktorýkoľvek príklad. Program *Mathematica* vyrieši každú rovnicu a vizualizácia má veľakrát väčší význam ako počítanie príkladov. Práca je rozdelená do dvoch častí.
Prvá je teoretická a sú v nej spracované definície z oblasti diferenciálnych rovníc, ktoré študent získa z prednášok a cvičení. Druhá časť, ktorá je praktická, je zameraná na riešenie rovníc v programe *Mathematica*. Dôraz je kladený hlavne na vizualizáciu riešení. V druhej polovici sú príklady spracované v programe *Maple*. Na záver sú tieto dva programy porovnané a zhodnotené ich klady a zápory.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1 História a využitie software *Mathematica*

1.1 História

Prvá verzia programu *Wolfram Mathematica* uzrela svetlo sveta v roku 1998. V následujúcom roku vypustili na trh dve ďalšie verzie a to 1.1 a 1.2. Verzia 1.2 prináša rýchlejšie spracovávanie niektorých údajov. Od tejto verzie môžu Kernel výpočty bežať zároveň s front-end operáciami, za cenu nižšej rýchlosti spracovania. V roku 1991 prichádza Wolfram s *Mathematicou* 2.0 s podporou zvuku, lepším výkonom a lepším programovacím jazykom. Počet dostupných funkcií sa zvýšil z 560 na 843, vrátane numerických riešení diferenciálnych rovníc. V roku 1996 vychádza multiplatformná *Mathematica* 3.0. Rýchlejšia ako jej predchodkyne. Prínáša grafický a veľmí prehľadný zápis funkcií. Pri jej cene stále však nedostupná pre obyčajného užívateľa. *Mathematica* a jej verzia 4.0 prináša výkonný výpočtový systém kombinujúci s mimoriadnymi schopnosťami výpočtu a koplexnou vizualizáciou. Navyše v jednom elegantnom prostredí. Prináša kontrolu pravopisu s veľkou zásobou vedeckých slov a lepšie nástroje pre publikovanie na webe. Verziou 6.0 sa snaží Wolfram osloviť nové potencionálne skupiny užívateľov. Vzrástol grafický desing prostredia. Manipulácia s 3D objektami v reálnom čase a to nielen myšou, pretože *Mathematica* berie plug-and-play vstupy z iných vstupných zariadení od herných ovládačov až po mikrofóny. *Mathematica* sa stáva veľkou pomôckou pri štúdiu na všetkých typoch škôl. 18 mesiacov po vydaní šestky vypustil Wolfram zatiaľ poslednú verziu programu *Mathematica* 7.0. Prináša v nej obrovské množstvo nových funkcií, od grafiky cez nové a rýchlejšie algoritmy až po rýchlejšiu manipuláciu s dátami.

1.2 Využitie

Vydanie programu *Mathematica* spôsobil začiatok moderných technických výpočtov. Jednotlivé balíky sa vydávali okolo roku 1960 pre číselné, algebraické, grafické a iné úlohy. Vízia programátorov a vývojárov bola vytvoriť jeden ucelený komplex, ktorý bude obsahovať všetky tieto balíky a bude ich plnohodnotne využívať. Kľúčové v tejto úlohe bolo vymyslieť jazyk, ktorý dokáže manipulovať s veľkou škálou predmetov a objektov, na dosiahnutie univerzálnosti pre technické a iné výpočty.
Prvá verzia programu *Mathematica* 1.0 bola vydaná v roku 1988. Svetové médiá ju považovali za produkt s obrovským potenciálom. Tak isto zaznamenala veľký úspech v technickej komunite. Spočiatku bol jej markantný vplyv hlavne v prírodných vedách, inžinierstve a matematike. V priebehu rokov sa *Mathematica* pozoruhodne rozrastá a dostáva do ďalších oblastí. Využíva sa najmä vo fyzikálnych, biologických, sociálnych a ďalších odvetviach. Teší sa veľkej obľube popredných svetových vedcov. Zohrávala kľúčovú úlohu pri mnohých dôležitých objavoch a bola základom pre tisícky technických dokumentov. V strojárstve sa *Mathematica* stala štandardom pre oblasť vývoja

a výroby. Mnohé zo svetových firiem sa na ňu spoliehajú. V ekonomike hrá *Mathematica* významnú úlohu, sofistikované finančné modelovanie, široké využitie v rôznych druhoch plánovania a analýzy. *Mathematica* sa taktiež ukázala ako dôležitý nástroj v odbore počítačových vied a softvérového vývoja. Jej jazyk je široko používaný ako pre výskum tak aj pre vývoj prototypov a rozhrania prostredí. Najväčšiu užívateľskú základňu má *Mathematica* v technických odborníkoch. Masívne sa v poslednej dobe využíva v oblasti vzdelávania. Spektrum využívateľnosti je naozaj široké. Okrem toho, s dostupnosťou študentskej verzie, sa *Mathematica* stala veľmi populárnou a využívanou študentmi po celom svete. Užívateľská základňa je naozaj široká od umelcov, skladateľov, jazykovedcov cez právnikov až po ľudí, ktorí sa zaujímajú o všetky oblasti života.
Od doby, kedy bola vydaná *Mathematica*, sa jej užívateľská základňa niekoľkokrát rozrástla. Celkový počet užívateľov sa dnes počíta v miliónoch. *Mathematica* sa stala štandardom v mnohých organizáciach. Fortune 50, všetky z 15 hlavných oddelení vlády USA a všetkých 50 najväčších univerzít na svete.
Tím Wolfram Research viedol od jeho založenia Stephen Wolfram. Neobvyklý úspech produktu spôsobilo, že tím sa mohol zamerať na dlhodobé ciele. V priebehu rokov umožnilo všeobecnosť jadra *Mathematica* neustále rozširovať jej dosah. Od svojich začiatkov ako systém používaný hlavne pre matematické a technické výpočty, sa *Mathematica* ukázala ako veľmi silná aj v iných odvetviach. Dnes *Mathematica* stojí na konci svojej dvadsaťročnej existencie. Definuje sa ako systém pre široké využitie v každej oblasti výskumu a spoločnosti.

2 Obyčajné diferenciálne rovnice

2.1 Základné pojmy

<u>Definícia</u>: **Diferenciálna rovnica (DR)** je rovnica, v ktorej neznámou je funkcia a v nej sa vyskytujú derivácie tejto funkcie.
Obyčajnou diferenciálnou rovnicou (ODR) nazývame rovnicu, v ktorej neznámou je funkcia jednej premennej a v ktorej sa vyskytuje aspoň jedna derivácia tejto funkcie.

Rádom DR nazývame rád najvyššej derivácie hľadanej funkcie vyskytujúcej sa v danej rovnici.

Diferenciálnu rovnicu nazývame **lineárnou**, ak je táto rovnica lineárna vzhľadom k hľadanej funkcií a jej derivacií, prípadne deriváciam.

<u>Definícia</u>: **Obyčajnou diferenciálnou rovnicou 1. rádu** s neznámou funkcou y

rozumieme rovnicu tvaru

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

kde f je funkcia dvoch premenných x, y.

Riešením (tiež **integrálom**) rovnice na intervale I rozumieme každú funkciu $y = y(x)$, ktorá je diferencovateľná na I a splňuje identicky rovnicu (1).
Nech x_0, y_0 sú reálne čísla. Úloha nájsť riešenie rovnice (1), ktorá splňuje zadanú **počiatočnú podmienku**

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

sa nazývá **počiatočná úloha (Cauchyova úloha, počiatočný problém)**. Jej riešením rozumieme funkciu, ktorá splňuje podmienku (2) a je riešením rovnice (1) na nejakom intervale obsahujúcom bod x_0.

Definícia: Riešenie, ktoré sa dá zapísať v tvare $y = \varphi(x, C)$, kde C je konštanta, sa nazývá **obecné riešenie**.
Riešenie, ktoré sa dá získať z obecného riešenia pre konkrétnu hodnotu konštanty C, sa nazýva **partikulárne riešenie** a značí sa y_p. Graf partikulárneho riešenia sa nazýva **integrálna krivka**.

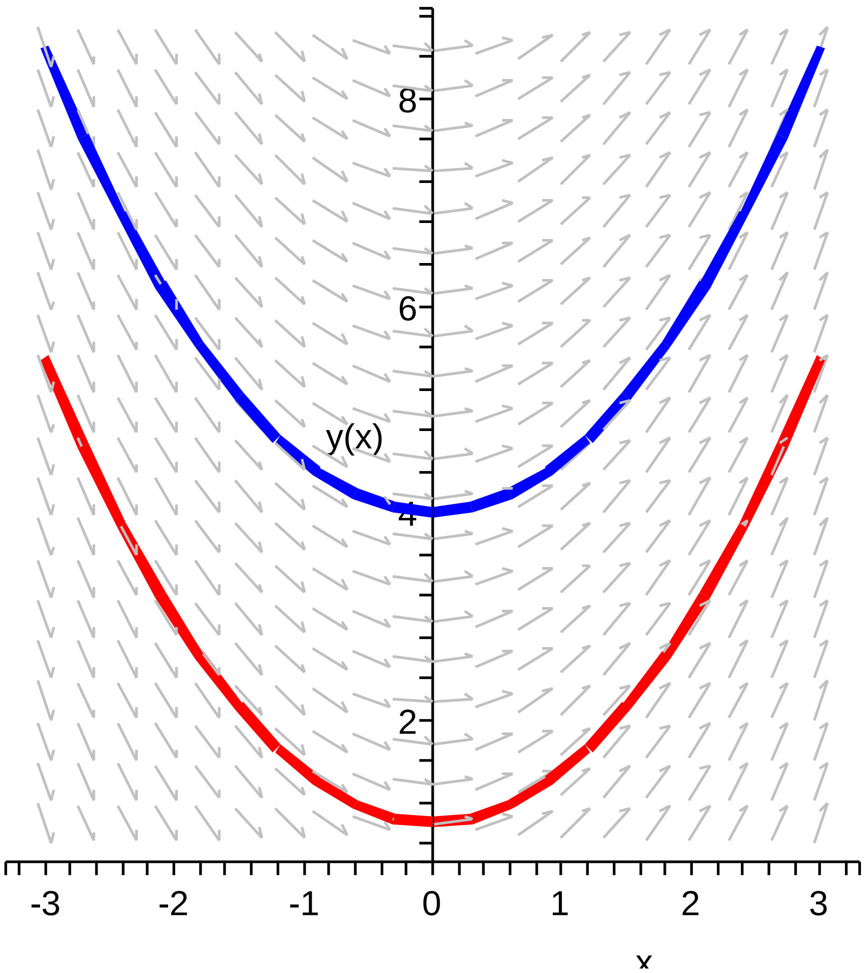
Geometrický význam ODR 1. rádu.
Diferenciálna rovnica $y' = f(x, y)$ priraďuje každému bodu (x, y) definičného oboru D_f funkcie f práve jednu hodnotu $y'(x)$, ktorú môžeme chápať ako smernicu priamky prechádzajúcu bodom (x, y). Túto priamku znázorňujeme v súradnicovej rovine krátkou úsečkou so stredom v bode (x, y) a nazývame **lineárny element**. Množinu všetkých lineárnych elementov potom nazývame **smerovým poľom** danej rovnice. Graf riešenia y (tj. integrálna krivka y) má teda tú vlastnosť, že jeho dotyčnica v každom bode $(x, y(x))$ obsahuje príslušný lineárny element, takže sa dá často ze smerového poľa odhadnúť tvar integrálnych krivek.
Počiatočná podmienka (2) geometricky znamená, že graf príslušného riešenia prechádza v rovine bodom (x_0, y_0). Ak má počiatočná úloha (1), (2) jediné riešenie, neprechádza bodom (x_0, y_0) žiadna ďalšia krivka. Ak má každá počiatočná úloha jediné riešenie, znamená to, že integrálne krivky se nikde nepretínajú.

2.2 ODR so separovateľnými premennými

Definícia: ODR tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{3}$$

kde f, g sú spojité funkcie na otvorených intervaloch, nazývame **obyčajnou diferenciálnou rovnicou so separovateľnými premennými**.



Obr. 1. Ukážka smerového poľa

2.3 Lineárna ODR 1. rádu

Definícia: ODR tvaru

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{4}$$

kde $a(x), b(x)$ sú spojité funkcie na otvorených intervaloch, nazývame **lineárnou obyčejnou diferenciálnou rovnicou 1. rádu**.

Ak je $b(x) \equiv 0$, nazývame rovnicu (4) **homogénnou lineárnou ODR 1. rádu**, v opačnom prípade hovoríme o **nehomogénnej lineárnej ODR 1. rádu**.

2.4 Bernoulliho rovnica

Definícia: ODR tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \tag{5}$$

kde $r \in \mathbb{R}, r \neq 0, r \neq 1$ a funkcia $a(x), b(x)$ sú spojité na uvažovaných otvorených intervaloch, se nazýva **Bernoulliho rovnica**.

2.5 Homogénna LODR 2. rádu s konštantnými koeficientami

Jedná sa o rovnicu tvaru

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{6}$$

kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$.

Definícia: **Riešením** (alebo tiež **integrálom**) rovnice (6) na intervale I rozumieme funkciu, ktorá má spojité derivácie do 2. rádu na intevrale I a po dosadení identicky splňuje rovnosť (6) na I.

Definícia: Úloha nájsť riešenie rovnice (6) splňujúce v bode $x_0 \in I$ **počiatočné podmienky**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \tag{7}$$

kde y_0, y_1 sú reálne čísla, se nazýva **počiatočná úloha** (**Cauchyova úloha**). Riešenie počiatočnej úlohy sa nazýva **partikulárne riešenie** rovnice (6).

Definícia: Kvadratickú rovnicu

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{8}$$

nazývame **charakteristickou rovnicou** diferenciálnej rovnice (6).

Definícia: Dvojica riešení $y_1(x), y_2(x)$ homogénnej rovnice (6), ktoré sú lineárne nezávislé na intervale I, sa nazýva **fundamentálny systém riešení** rovnice (6).

K určeniu fundamentálneho systému riešenia rovnice (6) je teda treba najskôr zistiť korene charakteristickej rovnice. Praktický návod, ako pomocou koreňov charakteristickej rovnice nájsť fundamentálny systém, udává následujúca veta:

Veta: Uvažujme homogénnu LODR 2. rádu (6) s charakteristickou rovnicou (8).

1. Charakteristická rovnica má dva rôzné reálne korene λ_1, λ_2. Potom má diferenciálna rovnica (6) fundamentálny systém
$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$
a jej obecné riešenie je v tvare
$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}.$$

2. Charakteristická rovnica má jeden dvojnásobný reálny koreň λ. Potom má diferenciálna rovnica (6) fundamentálny systém
$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda x}$$
a jej obecné riešenie je v tvare
$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}.$$

3. Charakteristická rovnica má dva komplexne združené korene $\lambda_{1,2} = a \pm ib, b \neq 0$. Potom má diferenciálna rovnica (6) fundamentálny systém
$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx, \quad y_2(x) = e^{ax} \sin bx$$

a jej obecné riešenie je v tvare

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}.$$

2.6 Nehomogénna LODR 2. rádu s konštantnými koeficientami

Rovnica má tvar

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{9}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú konštanty, $a_n \neq 0$, a $f(x)$ je funkcia definovaná, spojitá a nenulová na intervale I.

3 Základné príkazy a syntax programu *Mathematica*

3.1 Vstup a výstup - IN[] a OUT[]

Po spustení systému *Mathematica* je na obrazovke nový prázdny zápisník. Napíšeme výraz, ktorý chceme spočítať a odošleme ho na spracovanie do jadra systému Mathematica stlačením **Shift+Enter**, resp. klávesou Enter z numerickej časti alebo ikonou *Mathematica* z grafického menu. *Mathematica* označí náš $n-$tý vstup ako **In[n]:=** a odpovie naň **Out[n]=...** .
Ak je príkaz na vstupe dlhší ako jeden riadok, na konci riadku daného príkazu musí byť symbol, ktorý signalizuje, že príkaz pokračuje na ďalšom riadku (napr. čiarka, aritmetický operátor, šípka a pod.).
Keď odošleme vstupnú bunku do jadra na spracovanie, vykonajú sa všetky príkazy v danej bunke. Odporúča sa preto písať do jednej bunky príkazy, ktoré spolu úzko súvisia.
Na predchádzajúce výsledky sa odvoláva pomocou symbolu %.

% - posledný výsledok (číslo, výraz, grafický výstup,...)
%% - predposledný výsledok
%n - výsledok z Out[n]
Out[n] - výsledok $n-$tého vstupu

Príklad:

```
In[1]:= 77^2
Out[1]= 5929
In[2]:= (% - 4) * 12
Out[2]= 71 100
In[3]:= Sqrt[%%]
Out[3]= 77
```

3.2 Premenné

Mená premenných sa píšu obyčajne malými písmenami, ale v prípade potreby môžeme použiť aj veľké písmena. Tu je potrebné zdôrazniť, že systém *Mathematica* prísne odlišuje malé a veľké písmená. V zásade je možné použiť ľubovoľné meno premennej (ľubovoľný počet znakov), musí však začínať písmenom a nesmie sa zhodovať s menom, ktoré používa systém *Mathematica*. Všetky príkazy systému Mathematica začínajú vždy veľkým písmenom (niekedy sú veľké písmená aj vo vnútri príkazu, napr. PlotStyle).
Hodnotu premennej priradíme pomocou operátora = . Keď za príkaz dáme bodkočiarku, príkaz priradenia sa síce vykoná, ale výsledok sa nezobrazí. Systém *Mathematica* pripúšťa aj viacnásobné priradenie tej istej hodnoty viacerým premenným naraz.

Príklad:

```
In[4]:=  x = 5; y = z = 15
Out[4]=  15
In[5]:=  x * y * z
Out[5]=  1125
```

Keď priradíme premennej hodnotu, systém Mathematica si ju pamätá, pokiaľ ju neprepíšeme inou hodnotou alebo ju explicitne nezrušíme (dokonca si ju pamätá aj keď otvoríme nový zápisník). Ak už teda nechceme v ďalších výpočtoch používať hodnotu premennej, musíme ju (aby sme sa vyhli mnohým nepríjemným prekvapeniam v priebehu ďalších výpočtov) vyčistiť pomocou **Clear**[$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$] alebo $x = y = \ldots$

$x = hodnota$ - priradenie hodnoty premennej x
$x = y = hodnota$ - priradenie tej istej hodnoty premenným x aj y
$x =$. alebo Clear $[x]$ - vyčistenie premennej

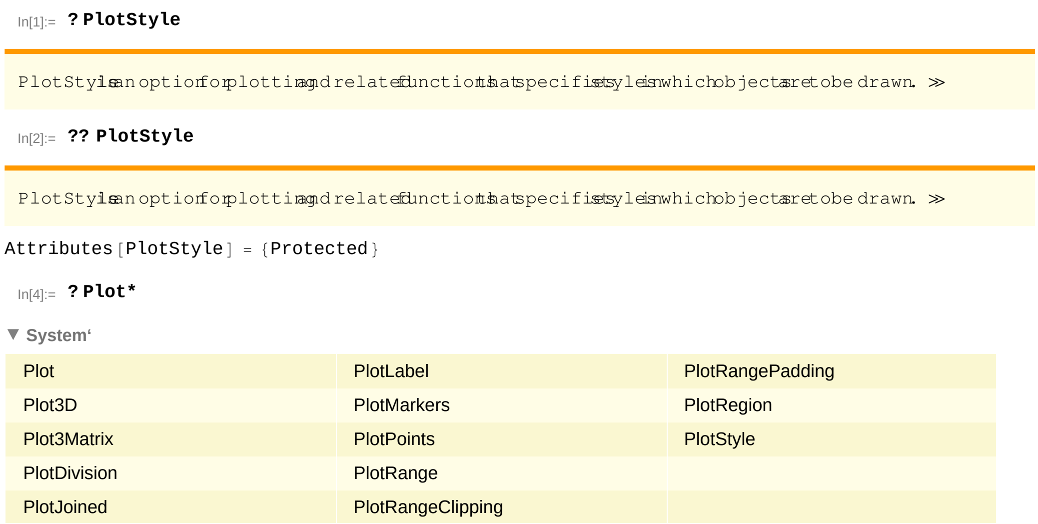
Príklad:

```
In[13]:=  x
Out[13]=  5
In[14]:=  Clear[x, y, z]
In[15]:=  x
Out[15]=  x
```

3.3 Ponuka Help

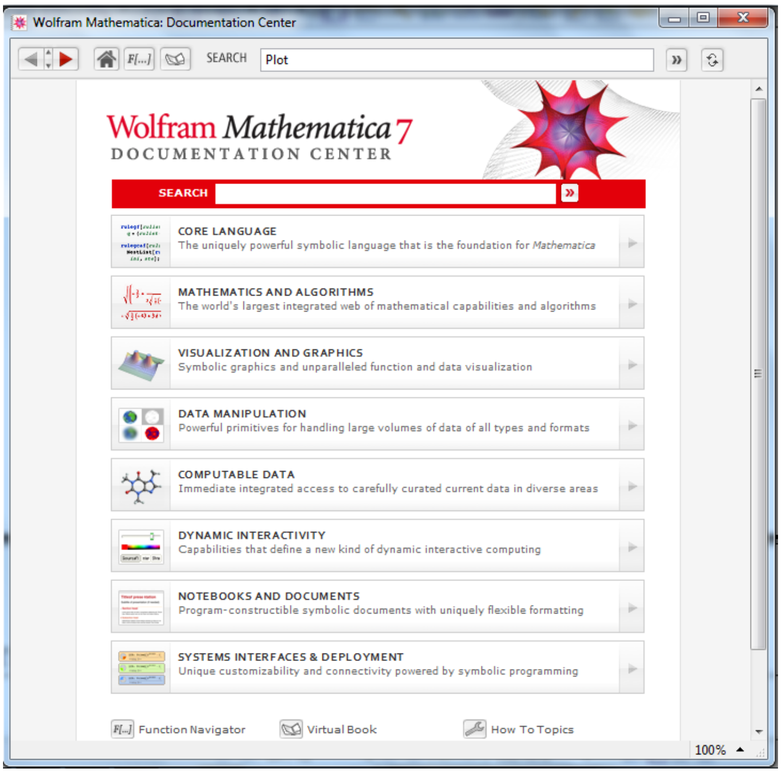
Veľmi dôležitou súčasťou každého programu je ponuka Help. V systéme *Mathematica* je urobená veľmi dobre a zrozumiteľne pre užívateľa. Pomôže nám či už nájsť správny zápis, alebo funkciu, alebo v podstate úplne všetko čo potrebujeme pre prácu s týmto programom. Nápovedu spustíme buď priamo v kontextovom menu, alebo príkazom. V kontextovom menu máme na výber veľa možností. Použitie príkazu je oveľa praktickejšie.

?Názov príkazu - zobrazí základné informácie o danom príkaze
??Názov príkazu - zobrazí podrobnejšie informácie o príkaze
?Názov príkaz* - zobrazí všetky príkazy, začínajúce na zadaný názov príkazu



Obr. 1. Využitie helpu

Pri otvorení menu Help - Function Navigator sa nám objaví nové okno. Do okna Search napíšeme príkaz, ktorý potrebujeme, a *Mathematica* nám vypíše v podstate to isté ako pri použití príkazu.

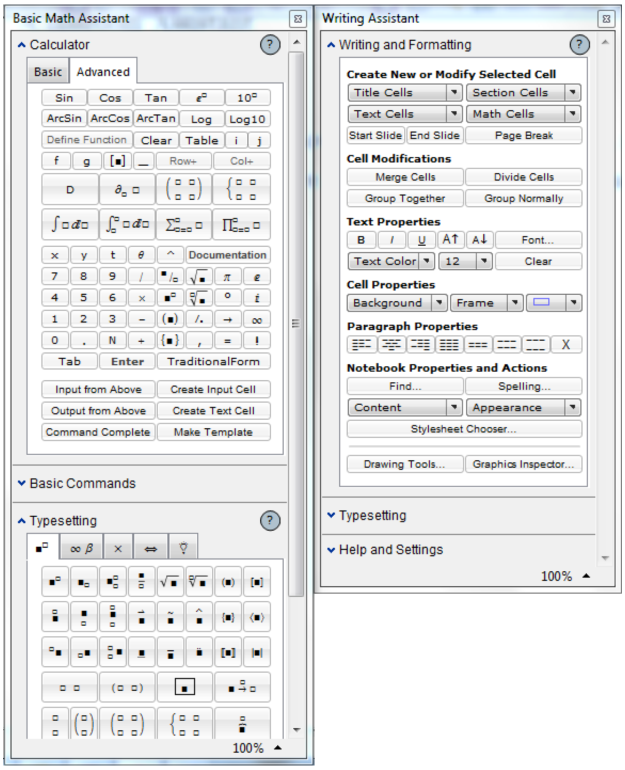


Obr. 2. Help

3.4 Ponuka Palettes

Veľkou výhodou programu *Mathematica* je možnosť použiť implementované palety nástrojov. Pri zložitejších zápisoch funkcií nemusíme používať príkazy na odmocninu, mocninu a pod. V *Mathematice* sú preddefinované a graficky spracované jednotlivé matematické operácie. Ponuka Palettes obsahuje tieto hlavné sekcie:

-Basic Math Assistant
-Classroom Assistant
-Writing Assistant



Obr. 3. Palety

Nájdeme v nich preddefinované integrály, odmocniny, mocniny, zlomky... Jednoducho všetko, pre uľahčenie práce. Pri nedostatku paliet si môžme rôzne ďalšie doinštalovať.

II. PRAKTICKÁ ČASŤ

4 Príkazy na riešenie diferenciálnych rovníc v programe *Mathematica*

4.1 DSolve

Pre nájdenie obecného riešenia diferenciálnej rovnice slúži v programe *Mathematica* príkaz **DSolve**. Zápis je daný v tvare:

DSolve[diferenciálna rovnica,$\boldsymbol{y[x], x}$]

V príkaze musí byť zapísaná diferenciálna rovnica, neznáma funkcia a nezávislá premenná.

```
In[1]:= DSolve[y'[x] == y[x] * Cos[x], y[x], x]
Out[1]= {{y[x] → ⅇ^Sin[x] C[1]}}
```

Pre nájdenie partikulárneho riešenia rovnice 1. rádu, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $y(x_0) = y_0$, sa používa taktiež príkaz DSolve. Pridávajú sa parametre pre počiatočné podmienky:

DSolve[{diferenciálna rovnica,$\boldsymbol{y[x_0] == y_0\}, y[x], x}$]

```
In[2]:= DSolve[{y'[x] == y[x] * Cos[x], y[-2] == 1}, y[x], x]
Out[2]= {{y[x] → ⅇ^(Sin[2]+Sin[x])}}
```

Partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice 2. rádu, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, nájdeme príkazom:

DSolve[{diferenciálna rovnica,$\boldsymbol{y[x_0] == y_0, y'[x_0] == 1\}, y[x], x}$]

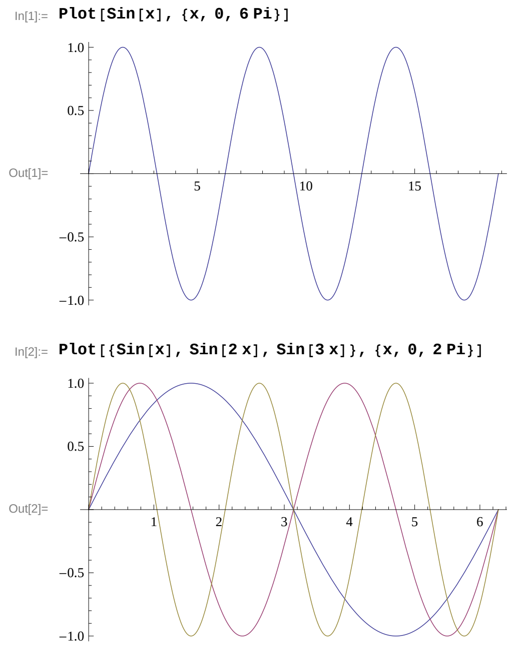
4.2 Plot

Funkcia plot generuje graf funkcie f podľa premennej x v medziach od x_{min} do x_{max}. Zápis funkcie je:

Plot$[\boldsymbol{f, x_{min}, x_{max}}]$

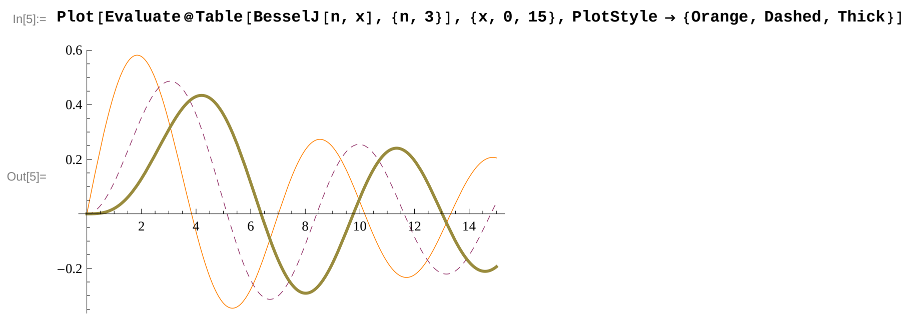
Pre viac funkcií platí zápis:

Plot$[\boldsymbol{\{f, f_1, f_2, ...\}, \{x_{min}, x_{max}\}}]$



Obr. 1. Graf jednej a troch funkcií

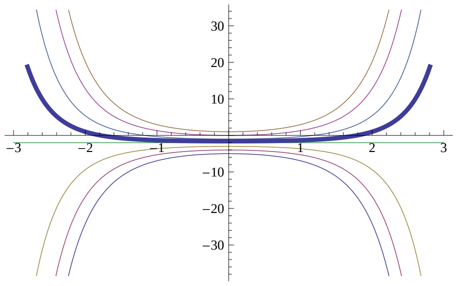
Pre naformátovanie vzhľadu sa využíva parameter **PlotStyle**, v ktorom si môžme nadefinovať ako má graf vyzerať. Môžme nadefinovať napríklad farbu jednotlivých kriviek, hrúbku, dĺžku pri prerušovanej krivke... Zápis funkcie je v tvare:
Plot$[\{f, f_1, f_2, \ldots\}, \{x_{min}, x_{max}\},$**PlotStyle** $\rightarrow \{p_1, p_2, p_3, \ldots p_n\}]$



Obr. 2. Ukážka formátovania grafu

Jednotlivé grafy sa dajú spojiť do jedného pomocou príkazu Show:
Show$[graf_1, graf_2]$

```
Show[g1, g2]
```



Obr. 3. Príkaz Show

4.3 Table

Príkaz Table slúži na určenie hodnôt pre danú funkciu. Zápis funkcie Table je v tvare: **Table**$[\boldsymbol{f_i}, \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{krok}\}]$

Funkcia sa dá nadefinovať predom a neskôr použiť v príkaze Table:

```
In[6]:=  Table[i^2, {i, 10}]
Out[6]=  {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

```
In[7]:=  f[x_] = sin x
Out[7]=  sin x
In[8]:=  t = Table[f[x], {x, -3, 3}]
Out[8]=  {-3 sin, -2 sin, -sin, 0, sin, 2 sin, 3 sin}
```

5 Riešené príklady pomocou programu *Mathematica*

5.1 Separovateľná diferenciálna rovnica

Príklad

Zadanie: Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $\boldsymbol{y' = y.\cos x}$. Nakreslite farebne sústavu integrálnych kriviek. Všeobecné riešenie zobrazte aj pomocou funkcie **Manipulate**.

Riešenie: Prepíšeme zadanú diferenciálnu rovnicu a získame obecné riešenie pomocou príkazu DSolve:

```
In[1]:=  DSolve[y'[x] == y[x] * Cos[x], y[x], x]
Out[1]=  {{y[x] → e^Sin[x] C[1]}}
```

Nadefinujeme premennú f funkciou obecného riešenia:

```
In[2]:= f[x_] = Exp[Sin [x]] * c1

Out[2]= c1 ⅇ^Sin[x]
```

Určíme hodnoty pre jednotlivé hodnoty premennej c_1:

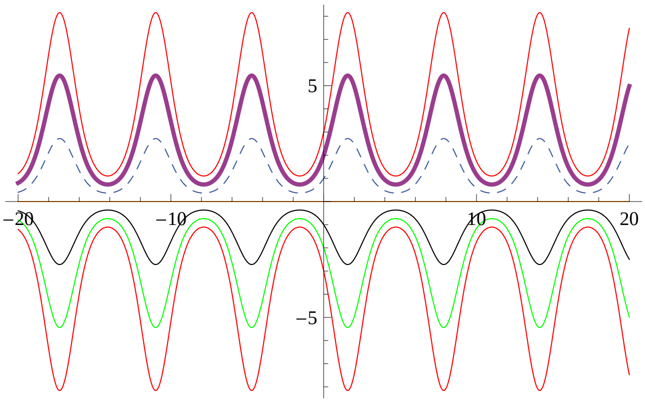
```
In[3]:= t1 = Table[f[x], {c1, -3, 3}]

Out[3]= {-3 ⅇ^Sin[x], -2 ⅇ^Sin[x], -ⅇ^Sin[x], 0, ⅇ^Sin[x], 2 ⅇ^Sin[x], 3 ⅇ^Sin[x]}
```

Vizualizácia, graf pre interval $x \in \langle -20, 20 \rangle$:

```
In[4]:= g1 = Plot[Evaluate[t1], {x, -20, 20},
          PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Dashed, Thick }]
```

Out[4]=

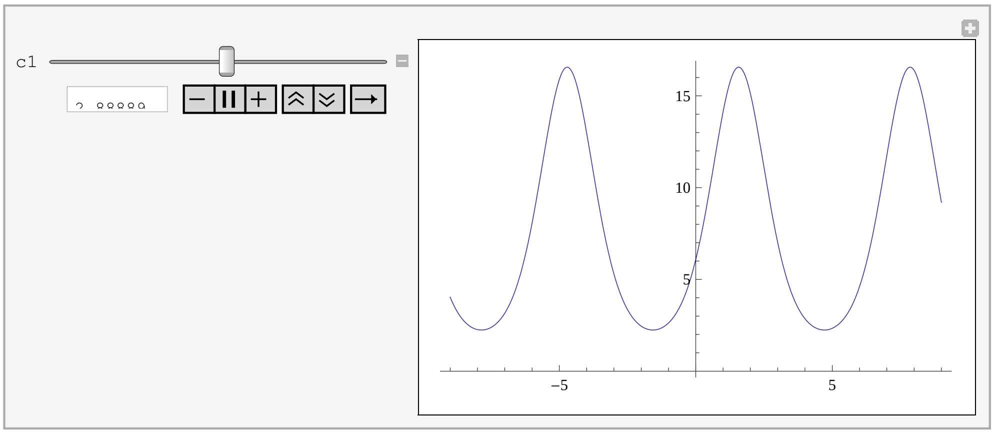


Obr. 1. Grafické riešenie DR

Grafické riešenie pomocou funkcie Manipulate:

```
In[5]:= Manipulate[Plot[Exp[Sin [x]] * c1, {x, -9, 9}], {c1, -5, 10}]
```

Out[5]=



Obr. 2. Vizualizácia pomocou Manipulate

5.2 LODR 1. rádu

Príklad

<u>Zadanie</u>: Nájdite všeobecné a partikulárne riešenie, ktoré vyhovuje začiatočnej podmienke $\boldsymbol{y(-2) = 1}$. Nakreslite farebne sústavu integrálnych kriviek, graf partikulárneho riešenia vyznačte hrubou čiernou čiarou. Vypočítajte hodnotu partikulárneho riešenia $\boldsymbol{y(1,25)}$.Zadaná rovnica: $\boldsymbol{y' - xy = 2x}$.

<u>Riešenie</u>: Riešime najprv homogénnu rovnicu pre $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

```
In[1]:= DSolve[y'[x] - x * y[x] == 0, y[x], x]
```

Out[1]= $\left\{\left\{y[x] \to e^{\frac{x^2}{2}} C[1]\right\}\right\}$

Využitím príkazu DSolve nájdeme obecné riešenie diferenciálnej rovnice:

```
In[2]:= DSolve[y'[x] - x * y[x] == 2 x, y[x], x]
```

Out[2]= $\left\{\left\{y[x] \to -2 + e^{\frac{x^2}{2}} C[1]\right\}\right\}$

Pomocou DSolve taktiež nájdeme partikulárne riešenie pre počiatočnú podmienku $y(-2) = 1$:

```
In[3]:= DSolve[{y'[x] - x * y[x] == 2 x, y[-2] == 1}, y[x], x] // Simplify
```

Out[3]= $\left\{\left\{y[x] \to -2 + 3\, e^{-2+\frac{x^2}{2}}\right\}\right\}$

Nadefinujeme funckiu f pre obecné riešenie rovnice. Funkcia f_p je riešenie rovnice s počiatočnou podmienkou. Posledný výstup je vypočítaná hodnota parikulárneho riešenia:

```
In[4]:= f[x_] = -2 + c * Exp[x^2 / 2]
        fp[x_] = -2 + 3 * Exp[-2 + x^2 / 2]
        fp[1.25]
```

Out[4]= $-2 + c\, e^{\frac{x^2}{2}}$

Out[5]= $-2 + 3\, e^{-2+\frac{x^2}{2}}$

Out[6]= -1.1132

Príkazom Table určíme jednotlivé body pre vykreslenie grafu:

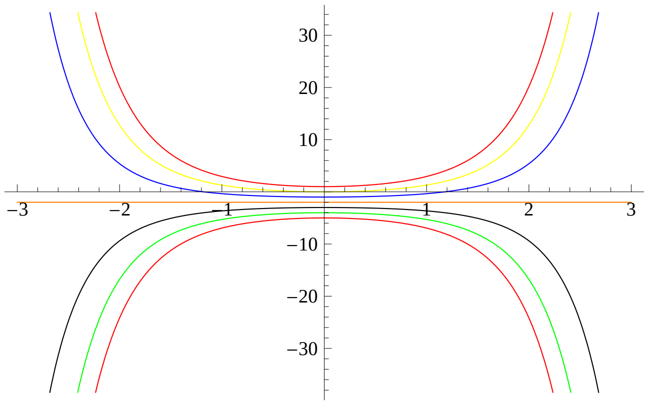
```
In[7]:= t = Table[f[x], {c, -3, 3}]
```

Out[7]= $\left\{-2 - 3\, e^{\frac{x^2}{2}},\ -2 - 2\, e^{\frac{x^2}{2}},\ -2 - e^{\frac{x^2}{2}},\ -2,\ -2 + e^{\frac{x^2}{2}},\ -2 + 2\, e^{\frac{x^2}{2}},\ -2 + 3\, e^{\frac{x^2}{2}}\right\}$

Príkaz Plot a farebne rozlíšená sústava integrálnych kriviek:

```
In[8]:= g1 = Plot[Evaluate[t], {x, -3, 3}, PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Blue, Yellow}]
```

Out[8]=

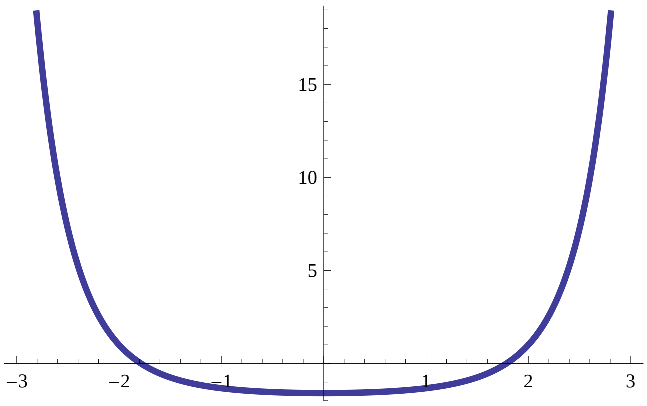


Obr. 3. Obecné riešenie

Partikulárne riešenie:

In[9]:=
```
g2 = Plot[fp[x], {x, -3, 3}, PlotStyle → Thickness[0.01]]
```

Out[9]=

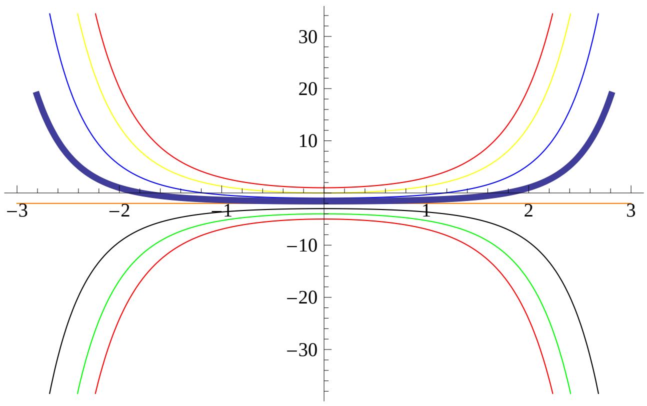


Obr. 4. Partikulárne riešenie

Spojenie oboch grafov do jedného:

In[10]:=
```
Show[g1, g2]
```

Out[10]=



Obr. 5. Spojenie grafu part. a obecného riešenia

5.3 Bernoulliho rovnica

Príklad

Zadanie: Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $xy' + xy^3 - y = 0$. Nakreslite farebne sústavu integrálnych kriviek. Na vizualizáciu použite funkcie Manipulate.

Riešenie: Využijeme funkciu DSolve na vyriešenie zadanej diferenciálnej rovnice:

In[1]:=
```
DSolve[x*y'[x] + x*y[x]^3 - y[x] == 0, y[x], x]
```

Out[1]=

$$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{\sqrt{3}\, x}{\sqrt{2 x^3 + 3 C[1]}}\right\}, \left\{y[x] \to \frac{\sqrt{3}\, x}{\sqrt{2 x^3 + 3 C[1]}}\right\}\right\}$$

Obecné riešenie nadefinujeme ako funkciu $\boldsymbol{f}$:

```
In[2]:= f[x_] = Sqrt[3] x / Sqrt[2 x^3 + 3 * c1]
```

$$\text{Out[2]=}\quad \frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3\,c1+2\,x^3}}$$

Nadefinujeme jednotlivé hodnoty pre konštantu $\boldsymbol{c_1}$:

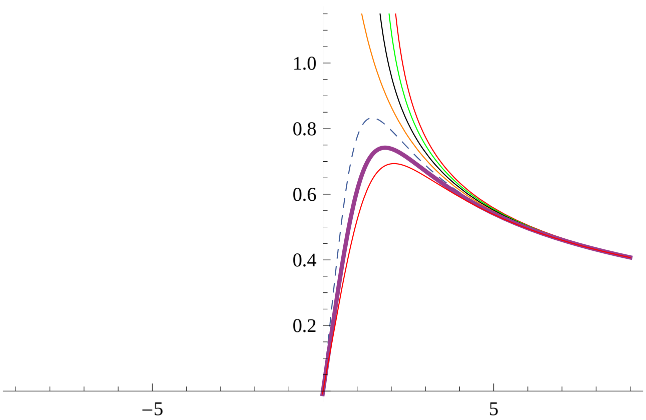
```
In[3]:= t1 = Table[f[x], {c1, -3, 3}]
```

$$\text{Out[3]=}\quad \left\{\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{-9+2\,x^3}},\ \frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{-6+2\,x^3}},\ \frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{-3+2\,x^3}},\ \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,x}{\sqrt{x^3}},\ \frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3+2\,x^3}},\ \frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{6+2\,x^3}},\ \frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{9+2\,x^3}}\right\}$$

Vykreslíme graf pomocou príkazu Plot na intervale $\boldsymbol{x} \in \langle \mathbf{-9, 9} \rangle$:

```
In[4]:= g1 = Plot[Evaluate[t1], {x, -9, 9},
   PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Dashed, Thick }]
```

Out[4]=

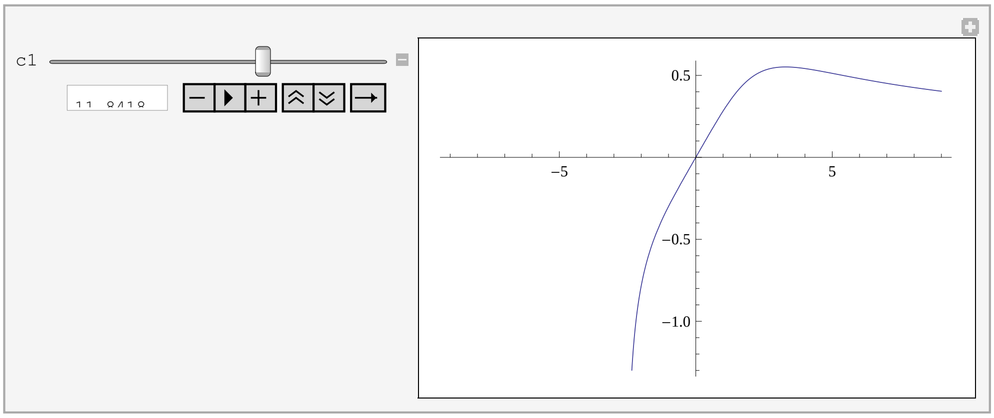


Obr. 6. Graf funkcie

Vizualizácia pomocou funkcie Manipulate pre konštantu c1 na intervale $\boldsymbol{c_1} \in \langle \mathbf{-3, 20} \rangle$:

In[5]:= $\mathtt{Manipulate}\left[\mathtt{Plot}\left[\frac{\sqrt{3}\ x}{\sqrt{2\ x^{3}+3*c1}},\ \{x,\ -9,\ 9\}\right],\ \{c1,\ -3,\ 20\}\right]$

Out[5]=



Obr. 7. Vykreslenie pomocou Manipulate

5.4 Homogénna LODR 2. rádu

Príklad

Zadanie: Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y''-6y'+9y=0$. Nakreslite farebne sústavu integrálnych kriviek pre 3 rôzne hodnoty konštánt.

Riešenie: Prepíšeme zadanú diferenciálnu rovnicu a získame obecné riešenie pomocou príkazu DSolve:

```
In[1]:= DSolve[y''[x] - 6 y'[x] + 9 y[x] == 0, y[x], x]
Out[1]= {{y[x] → e^(3 x) C[1] + e^(3 x) x C[2]}}
```

Pre kontrolu získame korene charakeristickej rovnice:

```
In[2]:= Solve[s^2 - 6 s + 9 == 0, s]
Out[2]= {{s → 3}, {s → 3}}
```

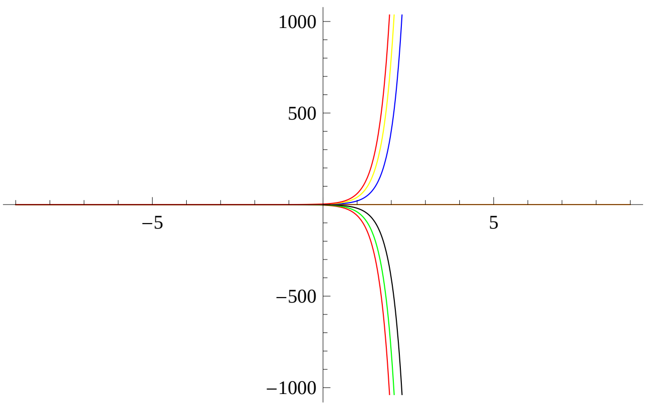
Do premennej uložíme obecné riešenie rovnice:

```
In[3]:= f[x_] = c1 * Exp[3 x] + c2 * x * Exp[3 x]
Out[3]= c1 e^(3 x) + c2 e^(3 x) x
```

Vypočítame hodnoty na vykreslenie grafu. Do parametrov zadáme hodnoty konštánt, podľa zadania. Hneď v ďalšom kroku necháme vykresliť graf pre tieto parametre:

```
In[4]:= t1 = Table[f[x], {c1, -3, 3}, {c2, 0, 0}]
        g1 = Plot[Evaluate[t1], {x, -9, 9},
          PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Blue, Yellow}]
Out[4]= {{-3 e^(3 x)}, {-2 e^(3 x)}, {-e^(3 x)}, {0}, {e^(3 x)}, {2 e^(3 x)}, {3 e^(3 x)}}
```

Out[5]=

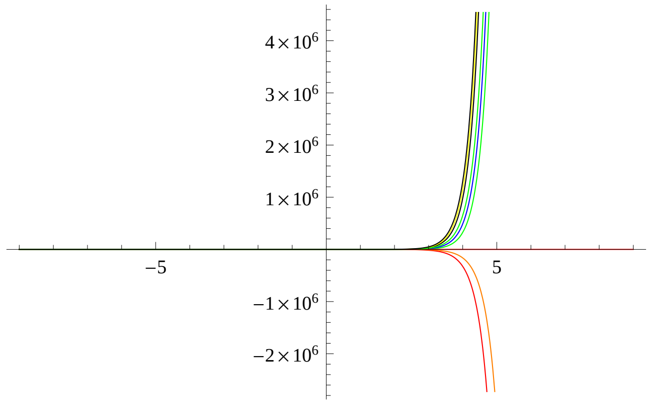


Obr. 8. Graf funkcie

V ďalšom kroku zmeníme podľa zadania hodnoty konštánt:

```
In[6]:= t2 = Table[f[x], {c1, -2, 0}, {c2, 0, 2}];
        g2 = Plot[Evaluate[t2], {x, -9, 9},
          PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Blue, Yellow}]
```

Out[7]=



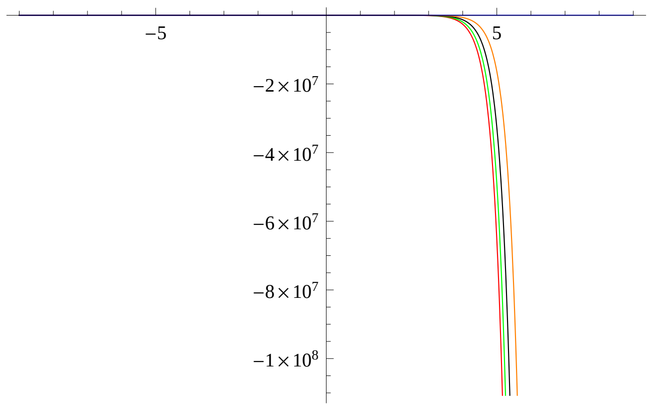
Obr. 9. Graf funkcie pre rôzne hodnoty

V poslednom kroku zmeníme hodnoty konštánt a necháme vykresliť graf farebne rozlíšených integrálnych kriviek:

```
In[8]:= t3 = Table[f[x], {c1, 0, 0}, {c2, -4, 0}]
        g3 = Plot[Evaluate[t3], {x, -9, 9},
          PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Blue, Yellow}]
```

Out[8]= $\{\{-4\, e^{3x}\, x,\ -3\, e^{3x}\, x,\ -2\, e^{3x}\, x,\ -e^{3x}\, x,\ 0\}\}$

Out[9]=



Obr. 10. Graf funkcie pre rôzne hodnoty

5.5 Nehomogénna LODR 2. rádu so špeciálnou pravou stranou

Príklad

Zadanie: Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - y' + y = \cos x$ a partikulárne riešenie, ktoré vyhovuje začiatočným podmienkam $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Nakreslite farebne sústavu integrálnych kriviek pre rôzne hodnoty konštánt.

Riešenie: Začneme opäť príkazom DSolve a obecným riešením diferenciálnej rovnice.

```
In[1]:= DSolve[y''[x] - y'[x] + y[x] ==
           Cos[x], y[x], x] // Simplify
```

Out[1]= $\left\{\left\{y[x] \to e^{x/2} C[1] \operatorname{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right] - \operatorname{Sin}[x] + e^{x/2} C[2] \operatorname{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right]\right\}\right\}$

V druhom kroku určíme riešenie zadanej diferenciálnej rovnice v počiatočných podmienkách:

```
In[2]:= DSolve[{y''[x] - y'[x] + y[x] == Cos[x], y[0] == 0, y'[0] == 0},
          y[x], x] // Simplify
```

Out[2]= $\left\{\left\{y[x] \to -\operatorname{Sin}[x] + \frac{2\, e^{x/2} \operatorname{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right]}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

Nadefinujeme hodnoty konštánt na vykreslenie grafu:

```
In[3]:= f[x_] = c1 * Exp[x / 2] * Cos[Sqrt[3] * x / 2] - Sin[x] +
          c2 * Exp[x / 2] * Sin[Sqrt[3] * x / 2]
        fp[x_] = -Sin[x] + 2 * Exp[x / 2] * Sin[Sqrt[3] * x / 2] / Sqrt[3]
```

Out[3]= $c1\, e^{x/2} \operatorname{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right] - \operatorname{Sin}[x] + c2\, e^{x/2} \operatorname{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right]$

Out[4]= $-\operatorname{Sin}[x] + \frac{2\, e^{x/2} \operatorname{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right]}{\sqrt{3}}$

Vypíšeme pre hodnoty c_1 jednotlivé riešenia:

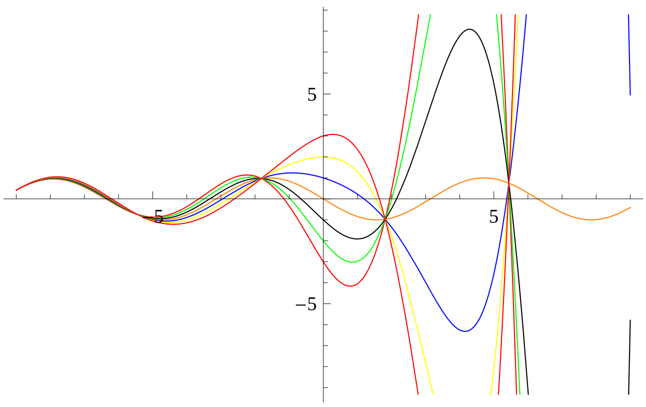
In[5]:=
```
t1 = Table[f[x], {c1, -3, 3}, {c2, 0, 0}]
```

Out[5]=
$$\left\{\left\{-3\, e^{x/2} \operatorname{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right] - \operatorname{Sin}[x]\right\}, \left\{-2\, e^{x/2} \operatorname{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right] - \operatorname{Sin}[x]\right\}, \left\{-e^{x/2} \operatorname{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right] - \operatorname{Sin}[x]\right\}, \{-\operatorname{Sin}[x]\}, \left\{e^{x/2} \operatorname{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right] - \operatorname{Sin}[x]\right\}, \left\{2\, e^{x/2} \operatorname{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right] - \operatorname{Sin}[x]\right\}, \left\{3\, e^{x/2} \operatorname{Cos}\left[\frac{\sqrt{3}\, x}{2}\right] - \operatorname{Sin}[x]\right\}\right\}$$

Príkazom Plot a zadaním hodnôt pre konštanty vykreslíme graf. Farebné rozlíšenie jednotlivých kriviek zaistíme príkazom PlotStyle jeho parametrami:

In[6]:=
```
g1 = Plot[Evaluate[t1], {x, -9, 9},
  PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Blue, Yellow}]
```

Out[6]=

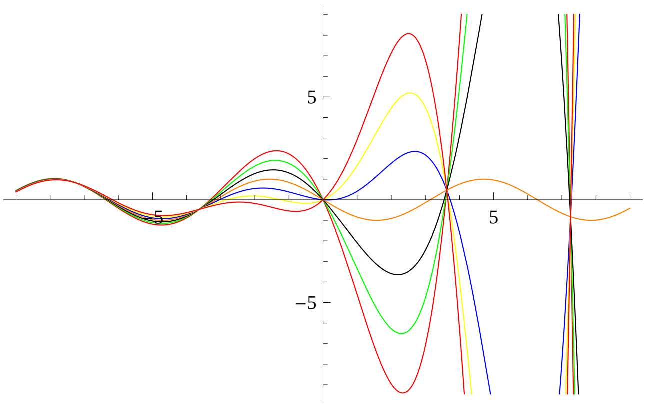


Rovnaký postup zopakujeme pre ďalšie dve rôzne hodnoty konštánt, podľa zadania:

In[7]:=
```
t2 = Table[f[x], {c1, 0, 0}, {c2, -3, 3}];
```

In[8]:=
```
g2 = Plot[Evaluate[t2], {x, -9, 9},
  PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Blue, Yellow}]
```

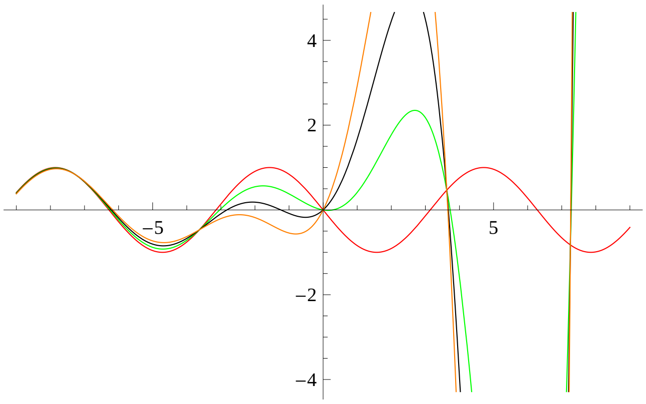
Out[8]=



```
In[9]:=  t3 = Table[f[x], {c1, 0, 0}, {c2, 0, 3}];

In[10]:= g3 = Plot[Evaluate[t3], {x, -9, 9},
           PlotStyle → {Red, Green, Black, Orange, Blue, Yellow}]
```

Out[10]=



6 Ukážkové príklady v prostredí *Maple*

6.1 LODR 1. rádu

Riešenie rovnice pomocou programu *Maple* je v podstate totžné s riešením v *Mathematice*. Podobne ako v *Mathematice* sa na riešenie využíva príkaz ***dsolve***. V prvých dvoch riadkoch aktivujeme knižnice pre podporu grafov. Do premennej ***ODE*** si nadefinujeme zadanú rovnicu. Výstup je zjednodušený prepis rovnice. V druhom kroku vyriešime diferenciálnu rovnicu pre zadané počiatočné podmienky. Na koniec vykreslíme graf s parametrami, ktoré sme si navolili. Na grafe je pekne vidieť smerové pole a hrubou čiarou je vykreslené partikulárne riešenie.

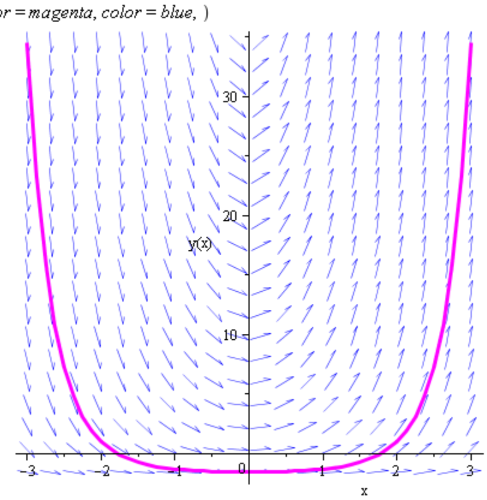
```
with(plots) :
with(DEtools) :
ODE := diff(y(x), x) − x·y(x) = 2 x;
```

$$\frac{d}{dx} y(x) - x\, y(x) = 2\, x$$

```
dsolve({ODE, y(−2) = 1}, y(x))
```

$$y(x) = -2 + 4\, e^{\frac{1}{2} x^2}$$

```
DEplot(ODE, y(x), −3..3, [y(−2) = 1], linecolor = magenta, color = blue, )
```



Obr. 1. Graf funkcie so smerovým poľom

6.2 Bernoulliho rovnica

Zadanie: Je zadaná diferenciálna rovnica v tvare: $\boldsymbol{xy' + xy^3 - y = 0}$. Pomocou programu ***Maple*** vyriešte a vykreslite obecné riešenie.

Riešenie: Aktivujeme knižnice potrebné pre vykreslenie grafu. Nadefinujeme si do premennej ***BER*** zadanú diferenciálnu rovnicu. Príkazom ***dsolve*** nájdeme obecné riešenie rovnice. V treťom kroku pomocou parametrov určíme graf. Z grafu smerového poľa je vidieť ako táto funkcia vyzerá.

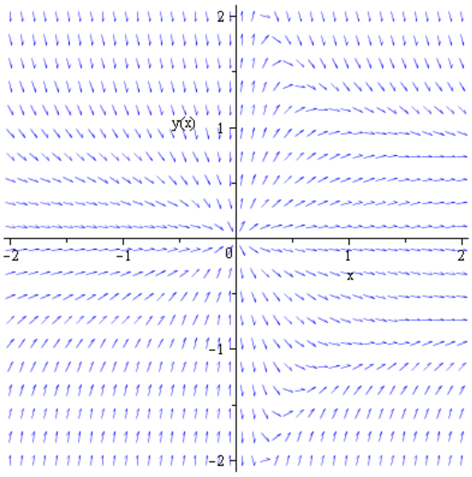
```
with(plots) :
with(DEtools) :
BER := x·diff(y(x), x) + x·y(x)^3−y(x) = 0
```

$$x\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + x\,y(x)^3 - y(x) = 0$$

```
dsolve(BER, y(x))
```

$$y(x) = -\frac{3x}{\sqrt{6x^3 + 9\_C1}},\ y(x) = \frac{3x}{\sqrt{6x^3 + 9\_C1}}$$

```
DEplot(BER, y(x), x =−2 ..2, y =−2 ..2, color = blue, dirgrid = [40, 20]);
```



Obr. 2. Smerové pole funkcie

6.3 Homogénna LODR 2. rádu

Zadanie: Určte obecné riešenie obyčajnej diferenciálne rovnice 2. rádu, ktorá je zadaná v tvare $\boldsymbol{y'' + 2y' + 10y = 0}$. Nakreslite riešenie rovnice pri počiatočných podmienkach $\boldsymbol{y(0) = 3, y'(0) = -5}$.
Riešenie: Pre praktickejšie riešenie si nadefinujeme zadanú rovnicu do premennej. Vyriešime ju pomocou ***dsolve***. Ak pridáme pred zátvorku ***rhs***, zobrazí sa nám na výstupe len pravá strana rovnice. Graf necháme vykresliť v medziach $\boldsymbol{x \in \langle -1, 6 \rangle}$.

```
eq1 := diff(y(t), t, t) + 2·diff( y(t), t) + 10·y(t) = 0;
```

$$\frac{d^2}{dt^2}\, y(t) + 2\left(\frac{d}{dt}\, y(t)\right) + 10\, y(t) = 0$$

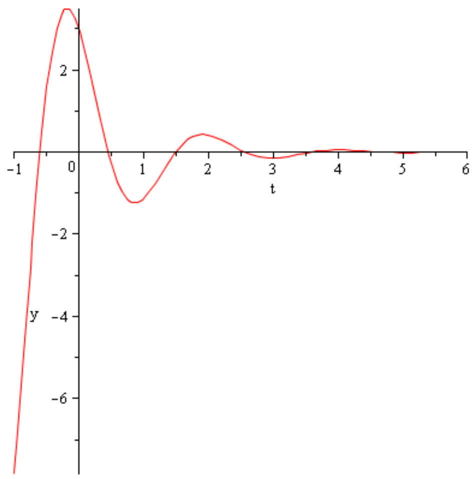
```
sol1 := rhs(dsolve(eq1, y(t)));
```

$$\_C1\, e^{-t} \sin(3\,t) + \_C2\, e^{-t} \cos(3\,t)$$

```
sol2 := rhs(dsolve({eq1, y(0) = 3, D(y)(0) =-5}, y(t)))
```

$$-\frac{2}{3}\, e^{-t} \sin(3\,t) + 3\, e^{-t} \cos(3\,t)$$

```
plot(sol2, t =-1 ..6, labels = ["t", "y"]);
```



Obr. 3. Graf funkcie

Zadanie: Nájdite obecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice $\boldsymbol{y''+2y'-3y=0}$. Obecné riešenie zobrazte so štyrmi rôznymi hodnotami konštánt.
Riešenie: Nadefinujeme si rovnicu do premennej $\boldsymbol{rovnica1}$:

```
rovnica1 := diff(y(x), x$2) + 2·diff(y(x), x) − 3·y(x) = 0;
```

$$\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + 2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - 3\,y(x) = 0$$

Jedná sa o homogénnu rovnicu druhého rádu. Jej riešenie hľadáme v tvare $\boldsymbol{y(x)=e^{(\lambda x)}}$.

```
tvarRiesenia := y(x) = exp(lambda·x)
```

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

Dosadením do zadanej rovnice dostaneme po úpravách charakteristickú rovnicu:

```
subs(tvarRiesenia, rovnica1);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,e^{\lambda x} + 2\left(\frac{\partial}{\partial x}\,e^{\lambda x}\right) - 3\,e^{\lambda x} = 0$$

```
simplify(%);
```

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + 2\,\lambda - 3\right) = 0$$

Ak je výraz $\boldsymbol{y(x)=e^{(\lambda x)}}$ väčší ako nula, môžeme ním vydeliť rovnicu:

```
charRovnica := simplify(% / exp(lambda·x))
```

$$\lambda^2 + 2\,\lambda - 3 = 0$$

Vypočítame korene charakteristickej rovnice:

```
solve(charRovnica, lambda)
```

$$1, -3$$

Charakteristická rovnica má teda 2 reálne rôzne korene. Fundamentálny systém riešenia má teda tvar:

```
riesenie1 := subs(lambda = 1, tvarRiesenia); riesenie2 := subs(lambda =−3, tvarRiesenia);
```

$$y(x) = e^{x}$$

$$y(x) = e^{-3\,x}$$

Lineárnou kombináciou nájdených riešení, dostaneme obecné riešenie:

```
obRiesenie := y(x) = c[1]·rhs(riesenie1) + c[2]·rhs(riesenie2);
```

$$y(x) = c_1\,e^{x} + c_2\,e^{-3\,x}$$

Správnosť výsledku porovnáme s výstupom príkazu ***dsolve***:

```
dsolve(rovnica1, y(x))
```

$$y(x) = \_C1\, e^{-3x} + \_C2\, e^{x}$$

Správnosť výpočtu môžme overiť dosadením do obecného riešenia pôvodnej rovnice:

```
subs(obRiesenie, rovnica1);
```

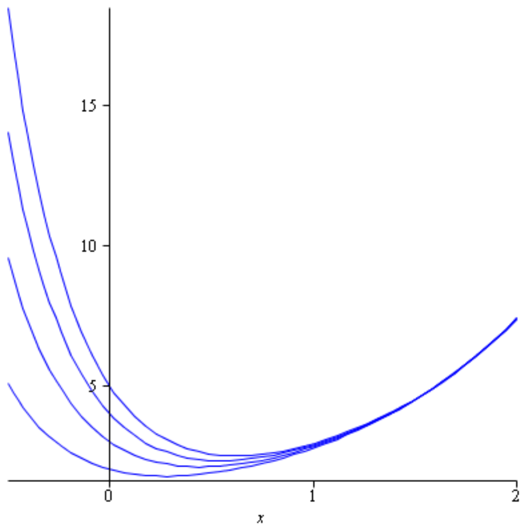
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}\right)\right) - 3 c_1 e^{x} - 3 c_2 e^{-3x} = 0$$

```
simplify(%);
```

$$0 = 0$$

Pri vizualizácií riešenia si najpr nadefinujeme riešenia pre jednotlivé hodnoty konštánt $\boldsymbol{c_1, c_2}$. V druhom kroku pomocou príkazu ***display*** vykreslíme všetky krivky v jednom grafe:

```
with(plots) : part1 := plot(subs(c[1] = 1, c[2] = 1, rhs(obRiesenie)), x =-0.5 ..2, color = blue) :
part2 := plot(subs(c[1] = 1, c[2] = 2, rhs(obRiesenie)), x =-0.5 ..2, color = blue) :
part3 := plot(subs(c[1] = 1, c[2] = 3, rhs(obRiesenie)), x =-0.5 ..2, color = blue) :
part4 := plot(subs(c[1] = 1, c[2] = 4, rhs(obRiesenie)), x =-0.5 ..2, color = blue) :
display([part1, part2, part3, part4], tickmarks = [4, 3], thickness = 1);
```



Obr. 4. Grafy funkcie pre rôzne hodnoty konštánt

7 Porovnanie

Po vypracovaní zadaných úloh v jednom aj druhom programe sme prišli len na malé odlišnosti. Oba software sú rýchle, spoľahlivé, multiplatformné. Samozrejme každý z nich musí v niečom vynikať. V prípade programu *Mathematica* je to hlavne dostupnosť študentskej licencie, jednoduchosť, prehľadnosť, množstvo funkcií atď. V prípade *Maple* ide zase o nižšiu náročnosť, menšiu inštaláciu. Každopádne oba programy plnia svoju úlohu a to na 100%. Syntax je veľmi podobná. Avšak zápisy v programe *Maple* sú prinajmenšom rôzne. Zvláštny zápis funkcii, nie najpríjemnejší vzhľad. Pre začiatočníkov by som viac odporučil software *Mathematica*. Preddefinované funkcie v ponuke Palettes umožňujú jednoduché dosádzanie do "vzorcov". Najväčším nedostatkom *Maple* oproti *Mathematice* je ponuka Help. Pomocou Helpu sa dá urobiť v *Mathematice* takmer všetko. Kdežto nápoveda v *Maple* je prinajmenšom neprehľadná. Avšak jedna funkcia v Maple ma naozaj zaskočila. Jedná sa o funkciu ***Handwriting***. V podstate napíšete do poľa kurzorom nejaký symbol a *Maple* ho porovná so svojou databázou znakov a ponúkne najviac sa podobajúci znak. Pre niekoho možno nepotrebná funkcia avšak ***Handwriting*** funguje veľmi dobre. Občas skráti čas pri hľadaní skratiek.

ZÁVĚR

Hlavným cieľom bakalárskej práce bolo popísať základné funkcie, ktoré sa využívajú pri riešení diferenciálnych rovníc v programe *Mathematica*. Použitie jednotlivých funkcií potom bolo ukázané na niekoľkých riešených príkladoch vrátane ich geometrických interpretácií.

Za hlavný prínos tejto práce by som označil jednotlivé vizualizácie riešení diferenciálnych rovníc. Je v nich jasne vidieť ako konktrétna konštanta ovplyvňuje tvar prislušného partikulárného riešenia. Veľa študentov si uvedomí význam riešení až pri porovnaní grafov jednotlivých funkcií.

Program *Mathematica* je vhodný ako veľmi dobrá pomôcka pre absolvovanie rôznych predmetov na vysokej škole. Software je veľmi jednoduchý a prijateľný pre každého.

CONCLUSION

The aim of this bachelor thesis was to describe basic functions which are used in solving of differential equations in Mathematica. Using of these functions was shown on several examples including their geometric interpratation. I find individual visualisations of solutions of differential equations as the main benefit of this work. It is clearly seen how each konstant has an influence on the form of the corresponding particular solution. Students learn importance of solutions up to comparing of graphs of individual functions. Program Mathematica is suitable as a very good aid to pass various subjects at the University. This software is very simple and acceptable for each student.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] BRONSON, R. *Schaum's Outline of Differential Equations*, McGraw-Hill. ISBN 0070080194.

[2] KALAS, J. ; RÁB, M. *Obyčejné diferenciální rovnice*, Brno 1995. ISBN 80-210-1130-0.

[3] RÁB, M. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*, Brno, 1998, ISBN 80-210-1818-6.

[4] REKROTYS, *K. Přehled užité matematiky II.*, Prometheus 2000. ISBN 80-7196-181-7

[5] *The Mathematica Book*, manuál pro software Mathematica

[6] LOMTATIDZE, L., PLCH, R., *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky* MU Brno 2003. ISBN 80-210-3228-6

[7] *WOLFRAM RESEARCH [online]*. Dostupné online na: `http://www.wolfram.com/`

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV A SKRATIEK

LODR	Lineárna obyčajná diferenciálna rovnica
ODR	Obyčajná diferenciálna rovnica
atď	a tak ďalej

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM PŘÍLOH

Zdrojové kódy k príkladom a grafom na CD v prílohe.