Integrální počet funkcí dvou proměnných v programu Mathematica

Integral calculus of functions of two variables
in Mathematica

Jan Dubina

Bakalářská práce
2010

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Jan DUBINA**
Osobní číslo:	**A07025**
Studijní program:	**B 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Informační a řídicí technologie**
Téma práce:	**Integrální počet funkcí dvou proměnných v programu Mathematica**

Zásady pro vypracování:

1. **Definujte základní pojmy z teorie integrálního počtu funkce dvou proměnných.**
2. **Uveďte a popište příkazy programu Mathematica užívané při výpočtu dvojného integrálu. Zaměřte se také na grafickou interpretaci.**
3. **Na konkrétních příkladech demonstrujte použití jednotlivých příkazů.**
4. **Zpracujte stejné příklady v jiném programu, např. Maple.**
5. **Porovnejte výsledky získané oběma programy.**

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **THOMAS, G. Thomas'Calculus - Media Upgrade, 11 th. Ed,. Pearson Addison Wesley 2008. ISBN 0-321-48987-X.**

2. **PLCH, R. ; ŠARMANOVÁ, P. ; SOJKA, P. Integrální počet funkcí více proměnných-Interaktivní sbírka příkladů a testových otázek, Brno 2009. ISSN 1802-128X. Dostupné online na: http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/js09/integral/Integraly_funkce_promenne.pdf.**

3. **TOMICA, R. Cvičení z matematiky II. Brno, VUT, 1974.**

4. **REKROTYS, K. Přehled užité matematiky II. Prometheus 2000. ISBN 80-7196-181-7.**

5. **The Mathematica Book, manuál pro software Mathematica.**

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **5. března 2010**

Termín odevzdání bakalářské práce: **1. června 2010**

Ve Zlíně dne 5. března 2010

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky
L.S.
①

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan

doc. Ing. Ivan Zelinka, Ph.D.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Popište základní funkce programu Mathematica, které se využívají v integrálním počtu funkcí dvou proměnných. Zaměřte se zejména na grafickou interpretaci. Použití těchto funkcí pak demonstrujte na vhodně zvolených příkladech.

Klíčová slova: dvojný integrál, Mathematica

ABSTRACT

Describe basic functions used in Mathematica in double integrals. Especially, focus on graphic interpretation. Illustrate this functions on suitable examples.

Keywords: double integral, Mathematica

Tímto bych rád poděkoval paní Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za cenné rady, připomínky při konzultacích a veškerý čas, který mi věnovala při odborném vedení této práce.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky UTB ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo -bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem UTB ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly UTB ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého UTB ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,že

jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.

Ve Zlíně ....

podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD

Počátky vzniku integrálního počtu jsou datovány do 3. století př. n. l., kdy Archimédes objevil postup výpočtu obsahu plochy pomocí jejího rozdělení na několik segmentů. Tento postup později upravil i pro výpočet objemu těles. Teorie integrálního počtu byla dále rozvíjena až do 20. století a dodnes se používá pro výpočet obsahu, objemu a délky křivek.

Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V první kapitole praktické části je stručně popsána historie a využití prostředí Mathematica spolu se základy práce v tomto programu. Druhá kapitola obsahuje zavedení dvojného integrálu na obdélníku a obecné množině, jeho základní vlastnosti a metody výpočtu. V praktické části jsou vysvětleny základní funkce prostředí Mathematica, které využijeme při řešení dvojného integrálu. Použití těchto funkcí je demonstrováno v další kapitole na několika ukázkových příkladech, které jsou dále řešeny také pomocí prostředí Maple a Matlab. Poslední kapitola obsahuje srovnání všech programů použitých při výpočtech.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 Software Mathematica

1.1 Historie

První verze softwaru Mathematica byla uvedena na trh v roce 1988 společností Wolfram Research. Říká se, že vydáním prostředí Mathematica začala nová doba tzv. technical computing. Od 60. let minulého století totiž existovaly vždy jen sady, které řešily pouze specifické úlohy (numerické, algebraické, grafické atd.). Software firmy Wolfram Research byl revoluční právě díky tomu, že obsahoval všechny potřebné sady v jednom produktu.
Hlavní myšlenkou bylo vytvořit jednotné prostředí s širokým využitím. Klíčem k tomu bylo vytvoření nového symbolického jazyka umožňujícího jednoduché a stručné programování. Další novinkou bylo použití vlastního typu dokumentu tzv. notebook. Ten obsahuje strukturu buněk, které přehledně oddělují jednotlivé části kódu, vstupy, výstupy atd.
V současnosti je software Mathematica stále vyvíjen společností Wolfram Research. Z původního využití hlavně ve fyzice a matematice se překvapivě rozšířil i do ostatních vědních oborů např. sociálních a přírodních věd. Dnes má Mathematica přes milión uživatelů po celém světě - nejen odborníků z různých oborů, ale také studentů.

1.2 Využití

Již zmíněný symbolický jazyk umožňuje široké využití prostředí Mathematica při řešení rozdílných úloh jako například:

- rozsáhlé symbolické výpočty
- vizualizace a analýza dat
- řešení rovnic, minimalizace výrazů
- simulace chování numerických modelů
- vytváření interaktivních prezentací a dokumentů

1.3 Základy práce v prostředí Mathematica

V následující kapitole jsou vysvětleny základy práce s paletou nástrojů, nápovědou nebo buňkami v notebooku.

1.3.1 Výpočet buňky

Pro spuštění výpočtu buňky lze použít klávesu **ENTER** na numerické klávesnici nebo kombinaci kláves **SHIFT** + **ENTER**. Po spuštění výpočtu se výraz na vstupu označí jako **In**[**n**]:= a výsledek výpočtu jako **Out**[**n**]=.

```
In[1]:= 1 + 1

Out[1]= 2
```

Označení buňky s výsledkem **Out**[**n**] můžeme použít pří výpočtu, pokud se chceme odkázat na dříve vyhodnocenou buňku.

```
In[2]:= 2 * Out[1]

Out[2]= 4
```

Odkaz na předchozí výsledek lze také provést pomocí symbolu '**%**'.

```
In[3]:= % + 3

Out[3]= 7
```

Pokud se chceme odkázat na libovolný předchozí výsledek, použijeme posloupnost symbolů '**%**' nebo za symbol '**%**' napíšeme celé číslo označující výstup, se kterým chceme pracovat.

```
In[4]:= %%% + 8
        %1 + 8

Out[4]= 10

Out[5]= 10
```

Dalším symbolem, který se často používá při výpočtech, je '**;**'. Pokud ho připíšeme za výraz, nebude zobrazen jeho výstup. Tento symbol lze také použít k oddělení více výrazů.

```
In[6]:= a = 1 + 1;
        b = 2 + 2; c = 3 + 3

Out[7]= 6
```

Přesnost výsledku v prostředí Mathematica můžeme ovlivnit pomocí funkce **N**[***expr***] respektive ***expr***//**N**. Tato funkce vrací numericky aproximovaný tvar výsledné buňky. Pokud chceme vypsat určitý počet desetinných míst výsledku, použijeme zápis **N**[***expr***, ***n***].

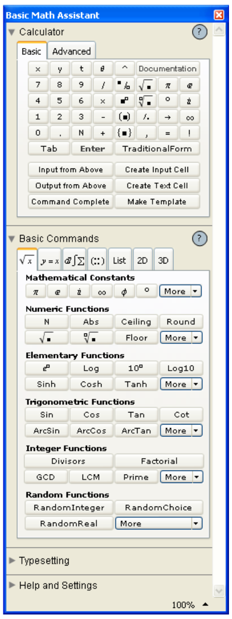
```
In[8]:= 1/7 // N

Out[8]= 0.142857

In[9]:= N[1/7, 10]

Out[9]= 0.1428571429
```

1.3.2 Seskupování a formátování buněk

Seskupování buněk používáme pro zpřehlednění práce v obsáhlejším notebooku. Funkce pro seskupování buněk nalezneme v menu **Cell** → **Grouping**. Zde lze zvolit mezi automatickým a manuálním seskupováním buněk, v manuálním módu využijeme položky **Group cells** a **Ungroup cells** pro sloučení a rozdělení vybraných buněk. Vybranou buňku můžeme také svinout dvojklikem na příslušnou hranatou závorku.
Možnosti nastavení formátování buňky včetně přednastavených stylů najdeme v menu **Format**.

1.3.3 Palety nástrojů

V prostředí Mathematica lze využít předdefinované palety nástrojů nebo si vytvořit vlastní. Palety nástrojů najdeme v menu **Palletes**.



Obr. 1. Panel Basic math assistant

Existující palety:
Calculator - slouží pro jednodušší výpočty, obsahuje mocniny, základní funkce, matice a integrály
Basic commands - základní příkazy prostředí Mathematica včetně nejčastěji používaných funkcí, symbolů a konstant

Typesetting - základní formy pro zápis mocnin, matic a integrálu, písmena řecké abecedy a často používané znaky
Writting and Formatting - formátování textu a buňek
Navigation, Keyboard - obsluha prostředí pomocí myši

1.3.4 Přerušení výpočtu

Klávesová zkratka pro přerušení výpočtu je **ALT + ,** . Používáme ji, pokud spustíme dlouho trvající výpočet se špatnými parametry nebo pokud dojde k zacyklení výpočtu.

1.3.5 Automatické doplňování syntaxe

Pokud neznáme přesný název funkce, kterou chceme volat, napíšeme několik prvních písmen a stiskneme kombinaci kláves **CTRL + K** - z rolovacího menu poté stačí vybrat danou funkci. Pro automatické doplnění parametrů funkce slouží klávesová zkratka **CTRL + SHIFT + K**.

1.3.6 Funkce pro použití Nápovědy

Chceme-li zjistit informace o nějaké funkci nebo symbolu, použijeme symbol **'?'**.

```
In[1]:= ?Sqrt

Sqrt[z] or √z gives the square root of z. >>

In[2]:= ?+

x+y+z represents a sum of terms. >>
```

Následující syntaxe vrací kromě použití funkce i její atributy. Jedná se o zkrácený zápis funkce **Information**[*arg*].

```
In[3]:= ??Sqrt

Sqrt[z] or √z gives the square root of z. >>

Attributes[Sqrt] = {Listable, NumericFunction, Protected}
```

Pokud hledáme nějakou funkci, použijeme následujícího zápisu, který vypíše všechny funkce začínající na Sqrt.

```
In[4]:= ?Sqrt*
```

▼ System`

Sqrt	SqrtBox	SqrtBoxOptions

Při vypracování teoretické části o prostředí Mathematica bylo využito následující literatury [6] , [8].

2 Dvojný integrál

2.1 Dvojný integrál na obdélníku

Budeme předpokládat, že funkce $f(x, y)$ je **spojitá** a **ohraničená** na obdélníku

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

jehož strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Dále postupujeme následovně:

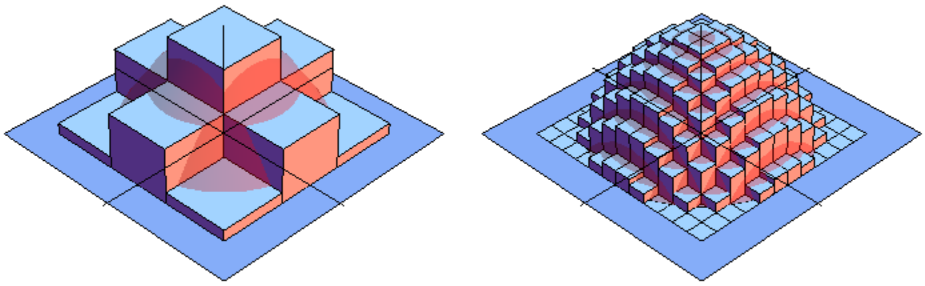
1. Intervaly $\langle a, b\rangle$, resp. $\langle c, d\rangle$ rozdělíme pomocí dělících bodů
   $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b, \text{ resp. } c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$$
   na podintervaly
   $$\langle x_{i-1}, x_i\rangle, \; i = 1, \ldots, m, \quad \text{resp.} \quad \langle y_{j-1}, y_j\rangle, \; j = 1, \ldots, n.$$
   Toto dělení označme $\mathcal{D}$. Délky těchto podintervalů označíme
   $$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \; \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$
   Rovnoběžky s osou y vedené body x_i a rovnoběžky s osou x vedené body y_j rozdělí obdélník D na $m \cdot n$ obdélníků, které označíme D_{ij}. Pro obsah každého takového obdélníku platí
   $$\Delta P_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j.$$

2. V každém obdélníku D_{ij} zvolíme tzv. **reprezentanta**, tj. bod $R_{ij} = (\xi_i, \eta_j)$ a určíme příslušnou funkční hodnotu $z_{ij} = f(\xi_i, \eta_j)$. Množinu všech reprezentantů nazýváme **výběr reprezentantů**, označme ji R.

3. Vytvoříme součin
   $$f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta P_{ij} = f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j.$$
   Tento součin vyjadřuje objem hranolu o podstavě D_{ij} (která má obsah ΔP_{ij}) a výšce $f(\xi_i, \eta_j)$.

4. Sestavíme dvojitý součet
   $$S(f, \mathcal{D}, R) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j.$$

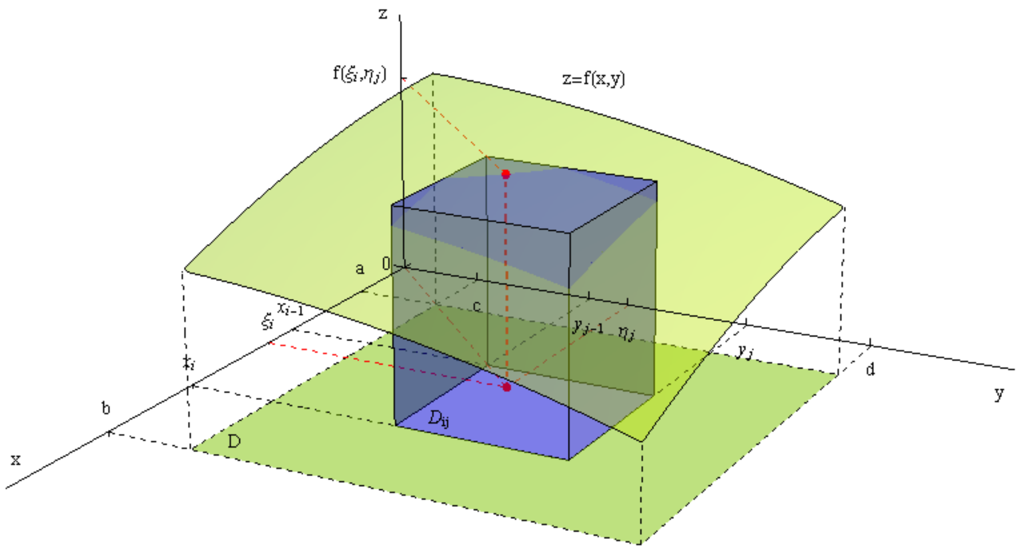
Tento součet nazýváme **(Riemannův) integrální součet** funkce f pro dělení $\mathcal{D}$ a výběr reprezentantů R. Geometricky tento součet vyjadřuje objem tělesa složeného z hranolků vztyčených nad obdélníky D_{ij}. Čím je počet obdélníků (hranolků) větší, tím je vypočtená hodnota objemu přesnější (viz obr. vpravo).



Obr. 2. Dělení množiny D

5. Postupně zjemňujeme oba intervaly na osách x, y a vytvoříme limitu posloupnosti integrálního součtu pro $m \to \infty, n \to \infty$, tj.

$$\lim_{\substack{m\to\infty, n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0, \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta x_i \Delta y_j.$$



Obr. 3. Dvojný integrál na obdélníku

Definice 2.1 Řekneme, že ohraničená funkce f je **(Riemannovsky) integrovatelná na obdélníku** D, jestliže pro $m \to \infty, n \to \infty$ a pro každé dělení $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_j \to 0$ a pro každý výběr reprezentantů R v těchto děleních existuje vlastní limita

$$\lim_{\substack{m\to\infty,n\to\infty \\ \Delta x_i\to 0,\Delta y_j\to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\cdot \Delta x_i \Delta y_j .$$

Tuto limitu nazýváme **(Riemannův) dvojný integrál funkce** $f(x,y)$ **na obdélníku** D a označujeme ji

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy. \tag{1}$$

Poznámka 2.1

1. Dvojný integrál funkce $z = f(x,y)$ na obdélníku D je číslem.

2. Je-li funkce $f(x,y) \geq 0$ na obdélníku D, potom vztah (1) vyjadřuje objem tělesa pod plochou $z = f(x,y)$ na obdélníku $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$.

Věta 2.1 [Výpočet dvojného integrálu na obdélníku] Je-li funkce $f(x,y)$ integrovatelná na obdélníku $D = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$, pak platí

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy. \tag{2}$$

2.2 Dvojný integrál na obecné množině

Definice 2.2 Buď Ω uzavřená ohraničená oblast. Buď D libovolný obdélník obsahující Ω, tj. $\Omega \subseteq D$. Definujme na D funkci g předpisem

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{pro} \quad (x,y)\in\Omega, \\ 0 & \text{pro} \quad (x,y)\in D\setminus\Omega. \end{cases}$$

Potom definujeme **dvojný integrál na množině** Ω předpisem

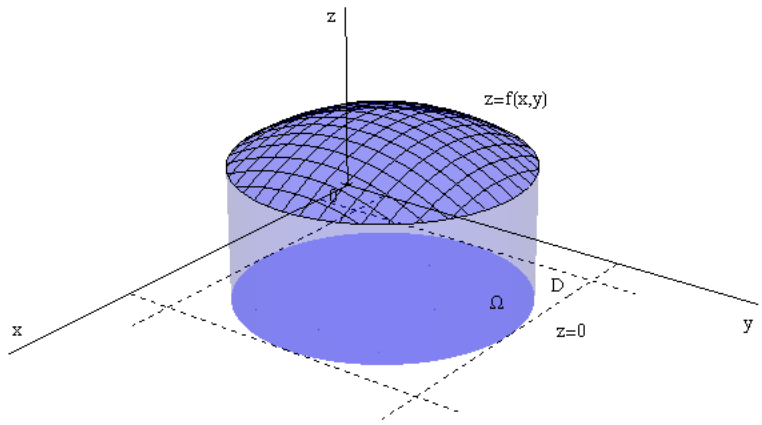
$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \iint_D g(x,y)\,dxdy.$$

Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná na** Ω, jestliže funkce g je Riemannovsky integrovatelná na D.

Poznámka 2.2 Existuje-li $\iint_\Omega dxdy$ (tj. $f(x,y) = 1$ na Ω), pak se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nazývá **měřitelná množina v Jordanově smyslu** (nebo také **Jordanovsky měřitelná**) a příslušný integrál nazýváme **míra** množiny Ω. Geometricky míra znamená obsah množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, budeme ji tedy značit $P(\Omega)$. Píšeme

$$P(\Omega) = \iint_\Omega dxdy,$$

kde $dP := dxdy$ se nazývá **element obsahu** v $\mathbb{R}^2$.



Obr. 4. Dvojný integrál na obecné množině

2.3 Základní vlastnosti dvojného integrálu

Věta 2.2 Nechť f je spojitá na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pak f je integrovatelná na Ω, tj. existuje dvojný integrál

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy.$$

Věta 2.3 Nechť f, g jsou integrovatelné funkce na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a nechť $f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall\,(x,y) \in \Omega$. Pak

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy \leq \iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,dxdy.$$

Věta 2.4 [Linearita integrálu] Nechť $f_1, \ldots, f_n$ jsou integrovatelné funkce dvou proměnných definované na měřitelné množině Ω a nechť $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Pak je integrovatelná také lineární kombinace $c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$ funkcí $f_1, \ldots, f_n$ a platí

$$\iint\limits_{\Omega} [c_1 f_1(x,y) + \cdots + c_n f_n(x,y)]\,dxdy =$$
$$c_1 \iint\limits_{\Omega} f_1(x,y)\,dxdy + \cdots + c_n \iint\limits_{\Omega} f_n(x,y)\,dxdy.$$

Věta 2.5 Je-li funkce f integrovatelná na měřitelné množině Ω, pak je integrovatelná na každé měřitelné podmnožině $M \subseteq \Omega$.

Věta 2.6 [Aditivnost integrálu vzhledem k množině] Nechť funkce f je integrovatelná na měřitelné množině Ω. Nechť je Ω rozdělena na měřitelné množiny $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, které mají společné nejvýše hraniční body. Pak platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \cdots + \iint\limits_{\Omega_n} f(x,y)\,dxdy.$$

2.4 Výpočet dvojného integrálu - Fubiniho věta

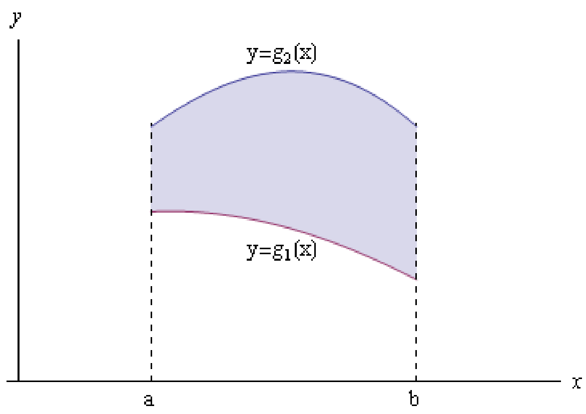
Definice 2.3 **Elementární oblastí v rovině** rozumíme uzavřenou a omezenou rovinnou množinu typu

$$\Omega_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

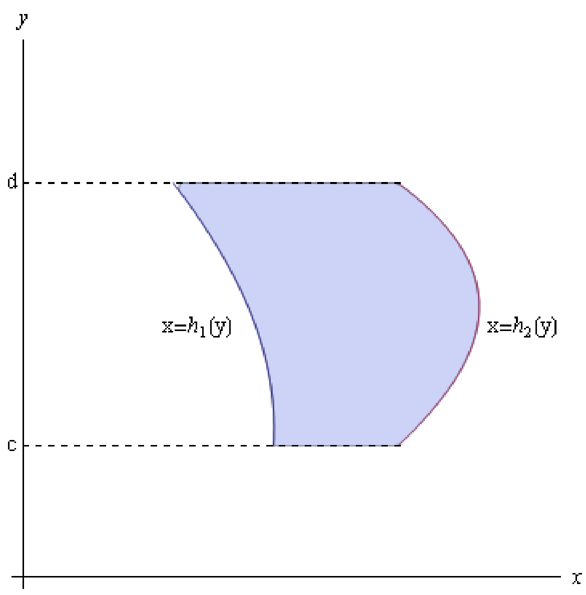
resp.

$$\Omega_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $g_1(x) < g_2(x)$ na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ a $h_1(y) < h_2(y)$ na celém intervalu $\langle c, d\rangle$.



Obr. 5. Elementární oblast typu Ω_x



Obr. 6. Elementární oblast typu Ω_y

Věta 2.7 [Fubiniho věta pro dvojný integrál]

1. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině typu Ω_x. Pak platí
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{3}$$
2. Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině typu Ω_y. Pak platí
$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{4}$$

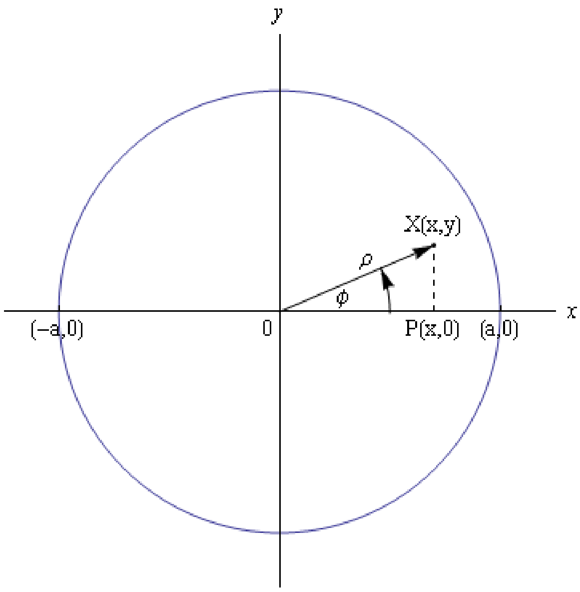
Poznámka 2.3 **Geometrický a fyzikální význam dvojného integrálu.**

1. Mírou měřitelné množiny Ω rozumíme **obsah** množiny Ω a platí
$$P(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} dxdy.$$
2. Je-li $f(x,y)$ nezáporná a spojitá funkce definovaná na měřitelné množině Ω, pak **objem** V tělesa, které je ohraničeno rovinami $z=0, z=f(x,y)$ a rovnoběžkami s osou z vedenými kolmo k hranici množiny Ω, platí
$$V(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy.$$
3. Nechť ϱ je hustota měřitelné množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Je-li tato hustota spojitou funkcí dvou proměnných x, y, pak pro celkovou **hmotnost** M množiny Ω platí
$$M(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \varrho(x,y)\,dxdy.$$

2.5 Transformace dvojného integrálu

Nyní zavedeme polární souřadnice. Pomocí nich určujeme polohu bodu A tak, že určíme vzdálenost ϱ bodu A od počátku soustavy souřadnic a úhel φ, který svírá spojnice počátku a bodu A s kladnou částí osy x.

Definice 2.4 Transformace, která je definována rovnicemi
$$x = g_1(u,v) = \varrho\cos\varphi,$$
$$y = g_2(u,v) = \varrho\sin\varphi,$$
kde $\varrho \in \langle 0,\infty)$, $\varphi \in \langle 0,2\pi)$, se nazývá **transformace do polárních souřadnic.** Rovnice transformují množinu $\mathbb{R}^2$ na množinu $\langle 0,\infty) \times \langle 0,2\pi)$.



Obr. 7. Polární souřadnice

Věta 2.8 Transformace do polárních souřadnic má jakobián $J = J(\varrho, \varphi) = \varrho$.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 Funkce prostředí Mathematica

3.1 Řešení rovnic

Pro řešení rovnic v prostředí Mathematica využíváme funkce **Solve**. Obecný zápis je **Solve**[$\boldsymbol{eqn}, \boldsymbol{var}$] - řeší rovnici eqn pro proměnnou var.

```
In[1]:= Solve[x^2 + 2 x - 4 == 0, x]
```

Out[1]= $\{\{x \to -1 - \sqrt{5}\}, \{x \to -1 + \sqrt{5}\}\}$

Pomocí této funkce lze řešit také soustavy rovnic. Obecný zápis je v tomto případě **Solve**[$\{\boldsymbol{eqn_1}, \boldsymbol{eqn_2}, \ldots\}, \{\boldsymbol{var_1}, \boldsymbol{var_2}, \ldots\}$] - řeší soustavu rovnic pro proměnné $var_1, var_2, \ldots$

```
In[2]:= Solve[{x + y == 1, x - 2 y == 6}, {x, y}]
```

Out[2]= $\{\{x \to \frac{8}{3}, y \to -\frac{5}{3}\}\}$

Některé rovnice nelze vyřešit analyticky pomocí funkce Solve. V těchto případech je třeba rovnice řešit numericky pomocí příkazu **FindRoot**[$\boldsymbol{eqn}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_0}\}$] - hledá numerické řešení rovnice pro počáteční hodnotu $x = x_0$.

```
In[3]:= Solve[Cos[x] == x, x]

        Solve::tdep :
         The equations appear to involve the variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. >>

Out[3]= Solve[Cos[x] == x, x]

In[4]:= FindRoot[Cos[x] == x, {x, 0}]

Out[4]= {x → 0.739085}
```

3.2 Funkce pro výpočet integrálů

Pro výpočet integrálů v prostředí Mathematica slouží funkce **Integrate**. Obecný zápis pro řešení neurčitého integrálu je **Integrate**[$\boldsymbol{func}, \boldsymbol{var}$] - vypočítá neurčitý integrál z funkce $func$ podle proměnné var.

```
In[1]:= Integrate[x^n, x]
```

Out[1]= $\frac{x^{1+n}}{1+n}$

Integrály lze zapsat také symbolicky. Symboly $\int$ a **d** vložíme z nástrojové palety (Palletes $\rightarrow$ Basic Math Assistant) nebo pomocí klavesové kombinace **ESC+int+ESC** a **ESC+dd+ESC**.

In[2]:= $\int x^n \, dx$

Out[2]= $\frac{x^{1+n}}{1+n}$

Pokud chceme vypočítat vícenásobný neurčitý integrál, přidáme do zápisu funkce další proměnnou - **Integrate**$[\boldsymbol{func}, \boldsymbol{var_1}, \boldsymbol{var_2}, \ldots]$.

```
In[3]:= Integrate[x^2 y, x, y]
```

Out[3]= $\frac{x^3 y^2}{6}$

Pro výpočet určitého integrálu použijeme syntaxi
Integrate$[\boldsymbol{func}, \{\boldsymbol{var}, \boldsymbol{varmin}, \boldsymbol{varmax}\}]$ nebo funkci zapíšeme symbolicky.

```
In[4]:= Integrate[x^2, {x, 0, 2}]
```

Out[4]= $\frac{8}{3}$

In[5]:= $\int_0^2 x^2 \, dx$

Out[5]= $\frac{8}{3}$

Následující syntaxe slouží k výpočtu vícenásobného určitého integrálu, obecný zápis funkce je
Integrate$[\boldsymbol{func}, \{\boldsymbol{var_1}, \boldsymbol{var_1 min}, \boldsymbol{var_1 max}\}, \{\boldsymbol{var_2}, \boldsymbol{var_2 min}, \boldsymbol{var_2 max}\}, \ldots]$.

```
In[6]:= Integrate[x^2 y, {x, 0, 2}, {y, 1, 3}]
```

Out[6]= $\frac{32}{3}$

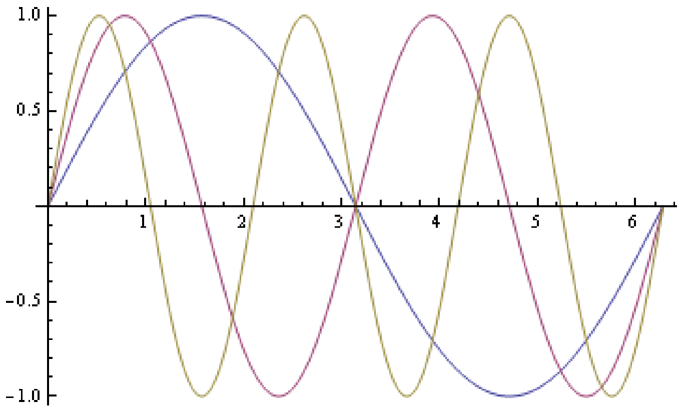
3.3 Grafy funkcí

3.3.1 Vykreslení 2D grafů funkcí

Pro vykreslení grafů funkcí v rovině slouží v Mathematice funkce **Plot**. Obecný zápis funkce je **Plot**$[\boldsymbol{func}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_{min}}, \boldsymbol{x_{max}}\}, \boldsymbol{options}]$, pokud chceme vykreslit několik průběhů funkcí do jednoho grafu, použijeme zápis
Plot$[\{\boldsymbol{func_1}, \boldsymbol{func_2}, \ldots\}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_{min}}, \boldsymbol{x_{max}}\}, \boldsymbol{options}]$.

```
In[1]:= Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[3 x]}, {x, 0, 2 Pi}]
```

Out[1]=



Obr. 8. Ukázka vykreslení grafu $\sin x$, $\sin 2x$ a $\sin 3x$ pomocí příkazu Plot

Funkce Plot má velké množství parametrů, kterými můžeme upravit výsledný vzhled grafu.
Některé parametry funkce Plot:

Axes - vykreslení os grafu

Axes $\rightarrow$ true - vykreslí osy

Axes $\rightarrow$ false - osy nebudou zobrazeny

Axes $\rightarrow$ {true,false} - vykreslí pouze osu x

AxesLabel - popisky os

AxesLabel $\rightarrow$ None - žádné popisky

AxesLabel $\rightarrow$ Automatic - automatické popisky vycházející z proměnných použitých ve funkci Plot

AxesLabel $\rightarrow$ $\{labelx, labely\}$ - popisky jednotlivých os

AxesOrigin - nastavení průsečíku os

AxesOrigin $\rightarrow$ Automatic - automatické určení průsečíku

AxesOrigin $\rightarrow$ $\{x, y\}$ - průsečík v bodě $[x, y]$

Filling - vybarvení určité oblasti grafu

Filling $\rightarrow$ Axis - vybarví oblast mezi průběhem funkce a osou x

Filling $\rightarrow$ Bottom - vybarví oblast pod průběhem funkce

Filling $\rightarrow$ Top - vybarví oblast nad průběhem funkce

Filling $\rightarrow$ *value* - vybarví oblast mezi průběhem funkce a funkcí $y = hodnota$

FillingStyle - slouží k nastavení parametrů Filling

FillingStyle $\rightarrow$ *color* - vybarví oblast zvolenou barvou

FillingStyle → Directive[Opacity[*value*],*color*] - vybarví oblast barvou o zadané sytosti (hodnota sytosti musí být v rozsahu $0 - 1$)

PlotLabel - popisek grafu

PlotLabel → label - zobrazí popisek grafu, textové řetězce musí být zapsány mezi uvozovkami

PlotRange - definování mezí os

PlotRange → Full - vykreslí průběh funkce pro zadaný rozsah x

PlotRange → Automatic - rozsah x je omezen pouze na část, ve které je funkce definována

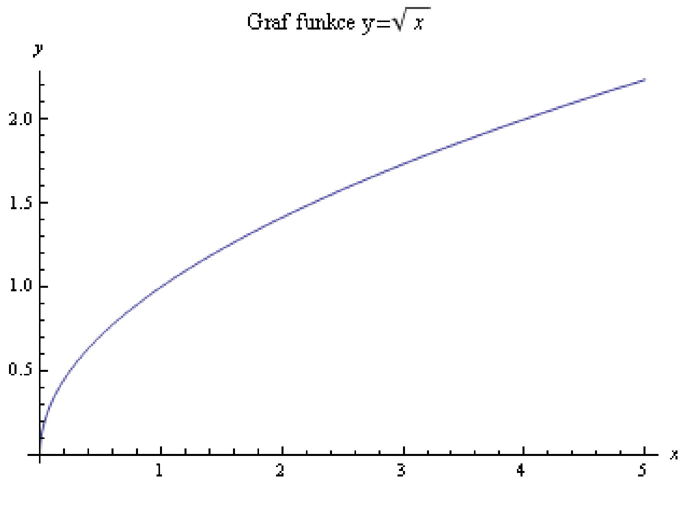
PlotRange → *value* - y je v intervalu $\langle -hodnota; hodnota \rangle$

Ukázka použití některých parametrů

Na následujícím obrázku je vykreslena funkce $y = \sqrt{x}$. Rozsah x je automaticky omezen a je zobrazen popisek grafu a os.

```
In[2]:= Plot[Sqrt[x], {x, -5, 5}, Axes → True, AxesLabel → {x, y},
          PlotLabel → "Graf funkce y=√x", PlotRange → Automatic]
```

Out[2]=

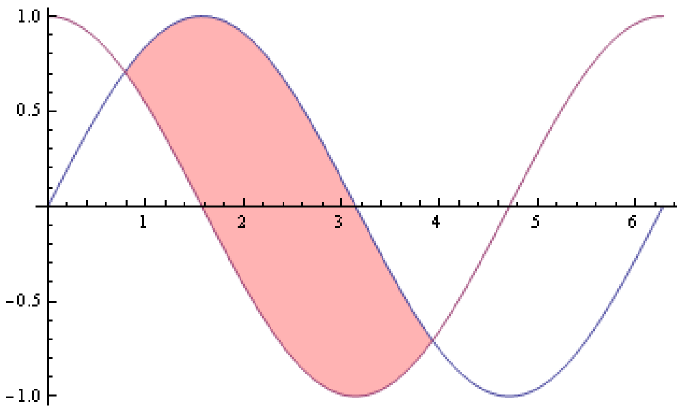


Obr. 9. Ukázka použití parametrů funkce Plot - graf funkce $y = \sqrt{x}$

Na tomto obrázku je zobrazena funkce $\sin x$ a $\cos x$. Plocha mezi průběhy funkcí je vybarvena červenou barvou se sytostí $0,3$.

```
In[3]:= Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2 Pi},
         Filling → {1 → {{2}, {None, {Opacity[0.3], Red}}}}]
```

Out[3]=



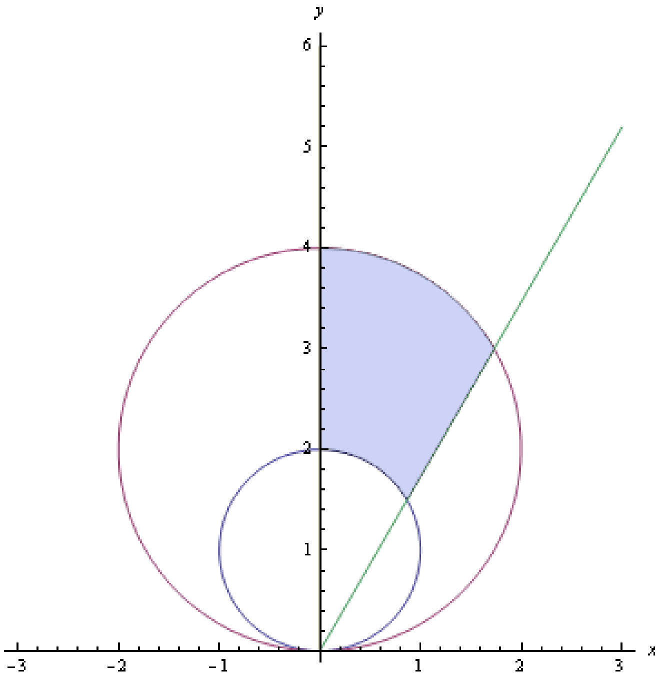
Obr. 10. Ukázka použití parametrů funkce Plot - graf funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$

Některé funkce lze vykreslit pomocí funkce **Plot** jen velmi obtížně. V těchto případech používáme funkce **ContourPlot** a **RegionPlot**, jejich výhodou je možnost zadání vykreslované funkce pomocí rovnice. Obecný zápis funkce **ContourPlot** je
ContourPlot[$\boldsymbol{func, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, options}$] nebo
ContourPlot[$\boldsymbol{\{func_1, func_2, \dots\}, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, options}$] pro vykreslení průběhu více funkcí do jednoho grafu.
Funkce **RegionPlot** slouží k zvýraznění oblasti grafu zadané pomocí nerovnic. Mezi nerovnicemi můžeme použít logický AND - '**&&**' nebo logický OR - '||'. Obecný zápis funkce je
RegionPlot[$\boldsymbol{conditions, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, options}$].

Na následujícím obrázku je demonstrováno použití příkazů **ContourPlot** a **RegionPlot**. Pomocí prvního z nich vykreslíme dvě kružnice $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 4y$ a dvě přímky $x = 0$ a $y = \sqrt{3}x$. Dále zvýrazníme plochu mezi křivkami použitím podmínek $2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y$, $x \geq 0$ a $y \geq \sqrt{3}x$. K zobrazení obou grafů do jednoho obrázku použijeme příkazu **Show** - obecný zápis je
Show[$\boldsymbol{graphics_1, graphics_2, \dots, options}$].

```
In[4]:= graf1 = ContourPlot[{x^2 + y^2 == 2 y, x^2 + y^2 == 4 y, x == 0, y == Sqrt[3] x},
           {x, -3, 3}, {y, 0, 6}];
        graf2 = RegionPlot[{2 y < x^2 + y^2 < 4 y && x > 0 && y > Sqrt[3] x},
           {x, -3, 3}, {y, 0, 6}, PlotPoints → 50];
        Show[graf1, graf2, Axes → True, Frame → False, AxesLabel → {x, y}]
```

Out[6]=

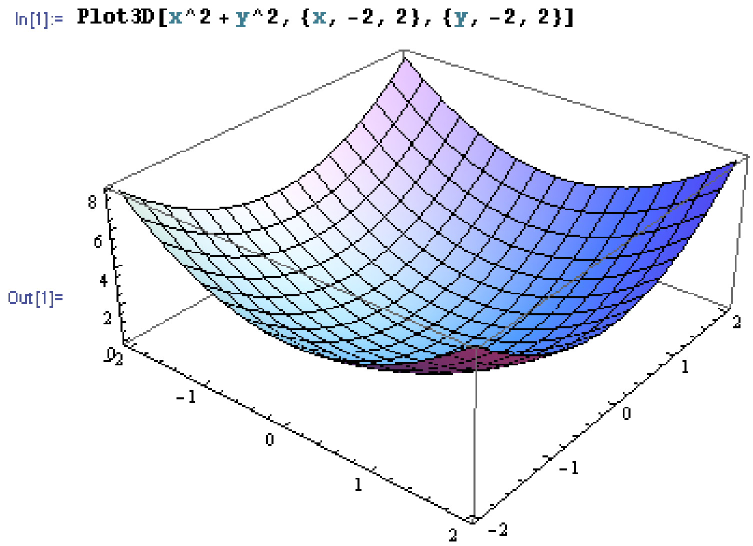


Obr. 11. Ukázka použití příkazů ContourPlot a RegionPlot

U těchto funkcí lze využít většinu parametrů uvedených u funkce **Plot**.

3.3.2 Vykreslení 3D grafů funkcí

Pro vykreslení 3D grafů funkcí slouží v Mathematice funkce **Plot3D**. Obecný zápis funkce je **Plot3D**[$\boldsymbol{func, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, options}$], případně **Plot3D**[$\boldsymbol{\{func_1, func_2, \ldots\}, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, options}$] pro vykreslení více funkcí do jednoho grafu.



Obr. 12. Vykreslení funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ (rotační paraboloid)

Tato funkce má opět velké množství parametrů, kterými lze výsledný graf upravit podle našich požadavků.
Některé parametry funkce Plot3D:

Boxed - zobrazení kvádru (krychle) kolem vykresleného grafu

Boxed $\rightarrow$ True - výchozí nastavení, kvádr je zobrazen

Boxed $\rightarrow$ False - kvádr není zobrazen

Lightning - využití simulovaného světla

Lightning $\rightarrow$ True - výchozí nastavení

Lightning $\rightarrow$ False - stínování v závislosti na y nebo parametru ColorFunction

Mesh - vykreslení mřížky na ploše grafu

Mesh $\rightarrow$ True - výchozí nastavení

Mesh $\rightarrow$ False - mřížka nebude vykreslena

PlotPoints - počet vykreslovaných bodů (hustota sítě)

PlotPoints $\rightarrow$ *value* - vykreslí zvolený počet bodů

PlotPoints $\rightarrow$ $\{valuex, valuey\}$ - vykreslí různý počet bodů ve směru x a y

RegionFunction - vykreslí graf funkce pouze nad určenou množinou

RegionFunction $\rightarrow$ Function$[\{x, y, z\}, conditions]$ - vykreslí graf nad množinou zadanou podmínkami

Shading - stínování plochy

Shading → True - stínování plochy v závislosti na y

Shading → False - plocha bude bílá

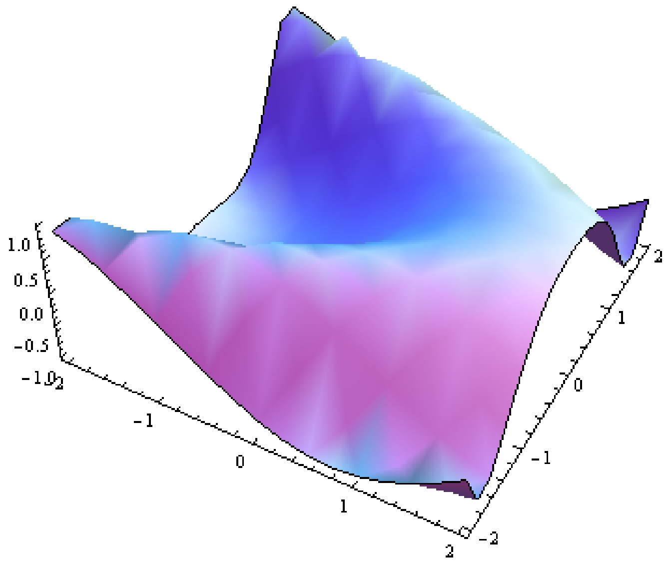
Jako parametry funkce Plot3D lze použít i většinu parametrů uvedených u funkce Plot.

Ukázka použití některých parametrů

Na následujícím obrázku je vykreslena funkce $f(x, y) = \sin(x + y^2)$. Mřížka a osový kvádr nejsou zobrazeny, hustota vykreslovaných bodů je změněna.

```
In[2]:= Plot3D[Sin[x + y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, Boxed → False,
          Mesh → False, PlotPoints → 5]
```

Out[2]=

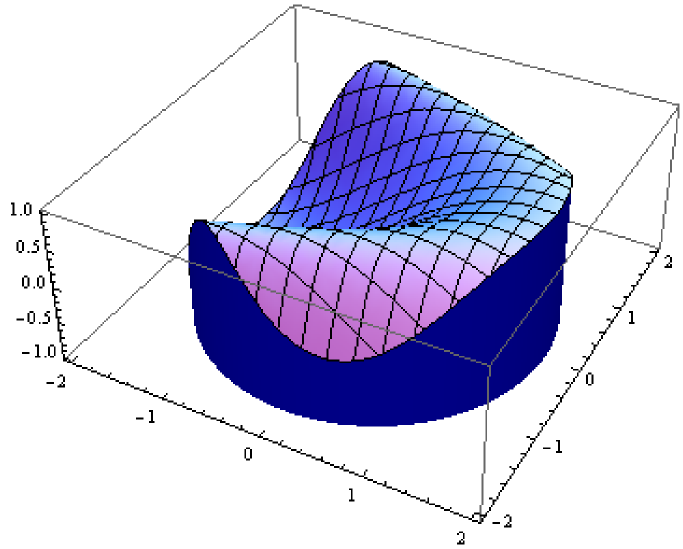


Obr. 13. Ukázka použití parametrů funkce Plot3D - graf funkce $f(x, y) = \sin(x + y^2)$

Na tomto obrázku je stejný graf, ale je v rovině xy omezený kružnicí $x^2 + y^2 = 3$. Těleso, které vznikne mezi grafem funkce a rovinou xy, je vybarveno modrou barvou.

```
In[3]:= Plot3D[Sin[x + y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, Filling → Bottom,
          RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 3], FillingStyle → Blue]
```

Out[3]=



Obr. 14. Ukázka použití parametrů funkce Plot3D - graf funkce $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ nad kružnicí $x^2 + y^2 = 3$

4 Ukázkové příklady

V této části je uvedeno použití prostředí Mathematica pro výpočet základních typů příkladů.

4.1 Výpočet obsahu plochy

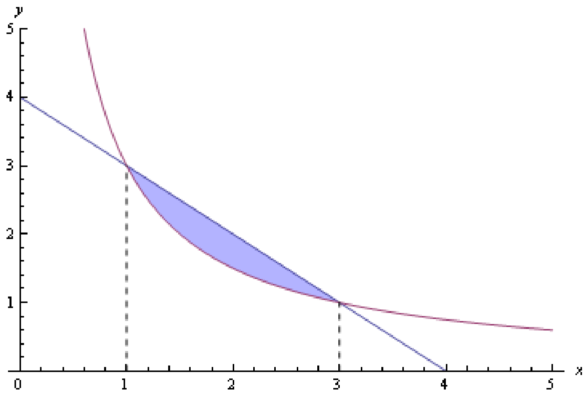
Zadání:
Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami
$x + y = 4$ a $xy = 3$.

Řešení:
První křivka je přímka $y = 4 - x$.
Druhá křivka je hyperbola $y = \frac{3}{x}$.

Určíme x-ové souřadnice průsečíků křivek:

$$y = 4 - x$$
$$y = \frac{3}{x}$$

$$\tfrac{3}{x} = 4 - x$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 3$$



Obr. 15. Ukázkový příklad č. 1 - Zadaná plocha ohraničená křivkami

K získání průsečíků v Mathematice využijeme funkce Solve.

```
In[2]:= Solve[{y == 4 - x, y == 3 / x}, {x, y}]

Out[2]= {{y → 1, x → 3}, {y → 3, x → 1}}
```

Obsah plochy vypočítáme jako $\iint\limits_{\Omega} dx\,dy$.

Integrační meze množiny Ω jsou:

$$1 \leq x \leq 3$$
$$\tfrac{3}{x} \leq y \leq 4 - x$$

Integrace funkce pomocí Fubiniovy věty:

$$\iint\limits_{\Omega} dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{\frac{3}{x}}^{4-x} dy \right) dx = \int_1^3 \Big[y \Big]_{\frac{3}{x}}^{4-x} dx = \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x} \right) dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln|x| \right]_1^3 = 4 - 3\ln 3$$

Pro kontrolu správnosti výpočtu použijeme funkci Integrate.

```
In[3]:= Integrate[1, {x, 1, 3}, { y, 3 / x, 4 - x}]

Out[3]= 4 - 3 Log[3]
```

4.2 Výpočet objemu tělesa

Zadání:

Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $z = x^2$, $y = 0$, $x^2 - y + 2 = 0$ a $x + y - 4 = 0$.

Řešení:

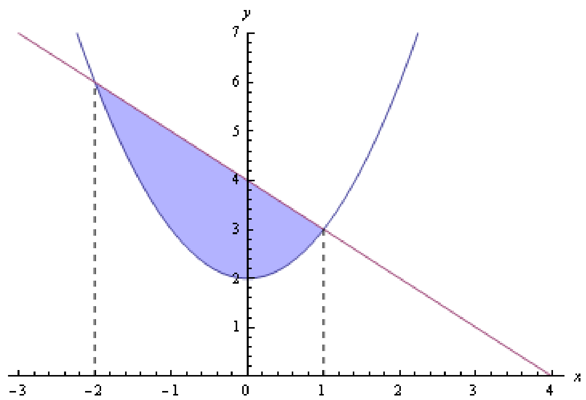
Objem tělesa pomocí dvojného integrálu vypočteme podle vzorce

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy,$$

kde Ω je množina v rovině x, y ohraničená křivkami $x^2 - y + 2 = 0$ (parabola) a $x + y - 4 = 0$ (přímka).

Určíme x-ové souřadnice průsečíků křivek:

$$\begin{array}{c} y = x^2 + 2 \\ x + y - 4 = 0 \\ \hline x^2 + x - 2 = 0 \\ x_1 = 1,\ x_2 = -2 \end{array}$$



Obr. 16. Ukázkový příklad č. 2 - Zadaná množina Ω

K získání průsečíků v Mathematice využijeme funkce Solve.

```
In[2]:= Solve[{x^2 - y + 2 == 0, x + y - 4 == 0}, {x, y}]

Out[2]= {{y → 3, x → 1}, {y → 6, x → -2}}
```

Integrační meze množiny Ω jsou:

$$-2 \le x \le 1$$
$$x^2 + 2 \le y \le 4 - x$$

Zadanou funkci zintegrujeme pomocí Fubiniovy věty:

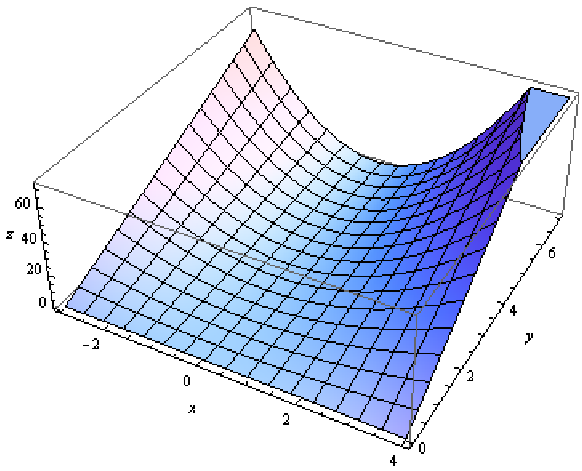
$$\iint\limits_{\Omega} x^2 y \, dx \, dy = \int_{-2}^{1} \Big(\int_{x^2+2}^{4-x} x^2 y \, dy \Big) \, dx = \int_{-2}^{1} \Big[\frac{1}{2} x^2 y^2 \Big]_{x^2+2}^{4-x} \, dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \Big(-\frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{2}x^4 - 4x^3 + 6x^2 \Big) \, dx = \Big[-\frac{x^7}{14} - \frac{3x^5}{10} - x^4 + 2x^3 \Big]_{-2}^{1} = \frac{486}{35} \doteq 13,9j^3$$

Pro kontrolu správnosti výpočtu použijeme funkci Integrate.

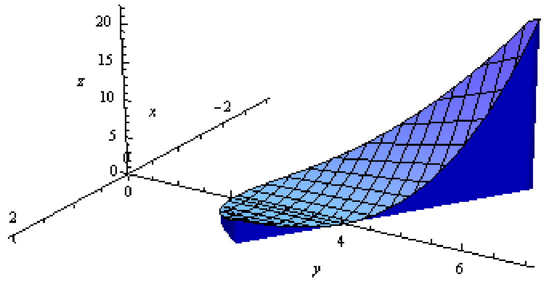
```
In[3]:= Integrate[y x^2, {x, -2, 1}, { y, x^2 + 2, 4 - x}]

         486
Out[3]= ---
         35
```

Na obrázku vidíme graf funkce $f(x, y) = x^2 y$, která shora omezuje těleso, jehož objem jsme počítali.



Obr. 17. Ukázkový příklad č. 2 - Graf funkce $f(x, y) = x^2 y$

Na tomto grafu je těleso ohraničené shora funkcí $f(x,y) = x^2y$ a zdola nulovou funkcí $g(x,y) = 0$. Obě funkce uvažujeme na množině Ω.



Obr. 18. Ukázkový příklad č. 2 - Zadané těleso

4.3 Výpočet objemu tělesa - transformace do polárních souřadnic

Zadání:
Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte objem tělesa určeného nerovnostmi $z \le xy$, $z \ge 0$, $x^2+y^2 \ge 2x$, $x^2+y^2 \le 4x$ a $y \ge 0$.

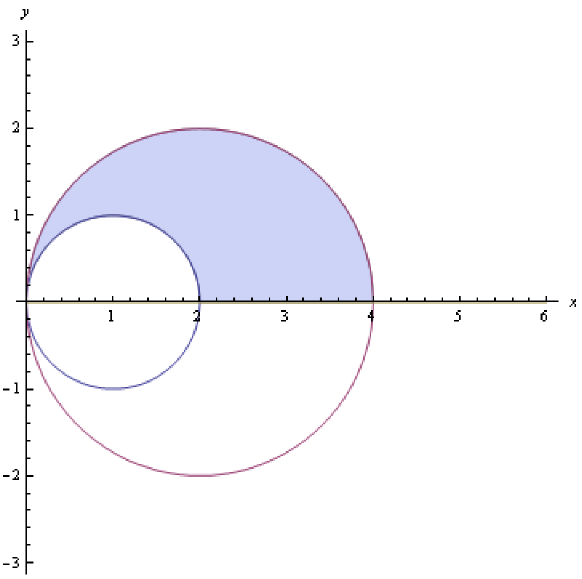
Řešení:
Rovnice $x^2+y^2 = 2x$ a $x^2+y^2 = 4x$ jsou v prostoru $\mathbb{R}^3$ rovnicemi válcových ploch, jejichž kolmé průměty do roviny xy jsou kružnice. Rovnice $y = 0$ určuje v rovině xy osu x.

$$x^2+y^2 = 2x \to (x-1)^2+y^2 = 1 \quad x^2+y^2 = 4x \to (x-2)^2+y^2 = 4$$

Výpočet integračních mezí pro ρ:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 2x \\ \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi &= 2\rho\cos\varphi \\ \rho^2 &= 2\rho\cos\varphi \\ \rho &= 2\cos\varphi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^2+y^2 &= 4x \\ \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi &= 4\rho\cos\varphi \\ \rho^2 &= 4\rho\cos\varphi \\ \rho &= 4\cos\varphi \end{aligned}$$

Kolmý průmět do roviny xy je zobrazen na následujícím obrázku.



Obr. 19. Ukázkový příklad č. 3 - Zadaná množina Ω

Výpočet v prostředí Mathematica:

```
In[4]:= Solve[r^2*(Cos[p])^2+r^2*(Sin[p])^2 == 2 r*Cos[p], r]

Out[4]= {{r → 0}, {r → 2 Cos[p]}}

In[5]:= Solve[r^2*(Cos[p])^2+r^2*(Sin[p])^2 == 4 r*Cos[p], r]

Out[5]= {{r → 0}, {r → 4 Cos[p]}}
```

Integrační meze množiny Ω jsou:

$$0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}$$
$$2\cos\varphi \leq \rho \leq 4\cos\varphi$$

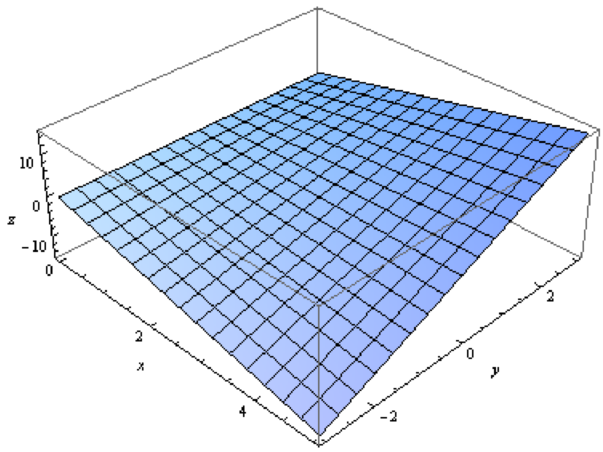
Zadanou funkci zintegrujeme pomocí Fubiniovy věty:

$$\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi\, \rho\, d\rho \right) d\varphi =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi\, d\rho \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \frac{256\cos^4\varphi - 16\cos^4\varphi}{4}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 60\cos^5\varphi \sin\varphi\, d\varphi =$$
$$\left| \begin{array}{cc} \text{Substituce} & \text{Subst. mezí} \\ \cos\varphi = t & \varphi = 0 \rightarrow t = 1 \\ -\sin\varphi\, d\varphi = dt & \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \end{array} \right| = 60 \int_1^0 -t^5\, dt =$$
$$= 60 \int_0^1 t^5\, dt = 60 \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = 10j^3$$

Kontrola správnosti výpočtu pomocí prostředí Mathematica:

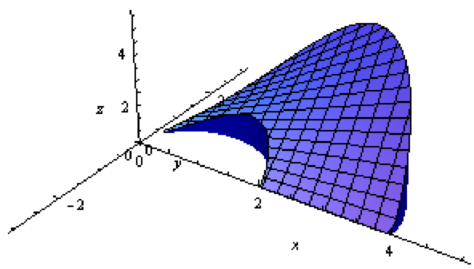
```
In[6]:= Integrate[x^3*Cos[y]*Sin[y], {y, 0, π/2}, {x, 2*Cos[y], 4*Cos[y]}]

Out[6]= 10
```

Na obrázku vidíme graf funkce $f(x, y) = xy$, která shora omezuje těleso, jehož objem jsme počítali.



Obr. 20. Ukázkový příklad č. 3 - Funkce $f(x, y) = xy$

Na tomto grafu je těleso ohraničené shora funkcí $f(x, y) = xy$ a zdola nulovou funkcí $g(x, y) = 0$. Obě funkce uvažujeme na množině Ω.



Obr. 21. Ukázkový příklad č. 3 - Zadané těleso

5 Ukázkové příklady v prostředí Maple a Matlab

V této části jsou příklady z předchozí kapitoly vypočítány pomocí prostředí Maple a Matlab.

5.1 Výpočet obsahu plochy

Zadání:
Pomocí dvojného integrálu vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami
$x + y = 4$ a $xy = 3$.

Řešení:
Určení x-ové souřadnice průsečíků křivek:

$$\begin{gathered} y = 4 - x \\ y = \frac{3}{x} \end{gathered}$$

Maple

> $solve\left(\left\{y = 4 - x, y = \frac{3}{x}\right\}, \{x, y\}\right)$

$$\{x = 3, y = 1\}, \{x = 1, y = 3\} \quad \textbf{(1)}$$

Matlab
```
>> syms x y
>> r=solve('x+y-4','x*y-3');
>> r=[r.x r.y]

r =

[ 3, 1]
[ 1, 3]
```

Integrační meze množiny Ω jsou:

$$\begin{gathered} 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{3}{x} \leq y \leq 4 - x \end{gathered}$$

Integrace:

$$\int_1^3 \left(\int_{\frac{3}{x}}^{4-x} dy \right) dx$$

Maple

```
> with(student) :
> Doubleint(1, y = 3/x ..4 - x, x = 1 ..3)
```

$$\int_1^3 \int_{\frac{3}{x}}^{4-x} 1 \, dy \, dx \qquad (2)$$

```
> value(%)
```

$$4 - 3\ln(3) \qquad (3)$$

Matlab

```
>> int(int(1,y,3/x,4-x),x,1,3)

ans =

4-3*log(3)
```

5.2 Výpočet objemu tělesa

Zadání:

Pomocí dvojného integrálu vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $z = x^2$, $y = 0$, $x^2 - y + 2 = 0$ a $x + y - 4 = 0$.

Řešení:

Určení x-ové souřadnice průsečíků křivek:

$$y = x^2 + 2$$
$$x + y - 4 = 0$$

Maple

```
> solve({y = x^2 + 2, y = 4 - x}, {x, y})
```

$$\{x = 1, y = 3\}, \{x = -2, y = 6\} \qquad (1)$$

Matlab

```
>> syms x y
>> r=solve('x+y-4','x^2-y+2');
>> r=[r.x r.y]

r =

[  3, 1]
[ -2, 6]
```

Integrační meze množiny Ω jsou:

$$-2 \leq x \leq 1$$
$$x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x$$

Integrace:

$$\int_{-2}^{1} \left(\int_{x^2+2}^{4-x} x^2 y \, dy \right) dx$$

Maple

```
> with(student) :
> Doubleint(x^2y, y = x^2 + 2 ..4 - x, x = -2 ..1)
```

$$\int_{-2}^{1} \int_{x^2+2}^{4-x} x^2 y \, dy \, dx \qquad (2)$$

```
> value(%)
```

$$\frac{486}{35} \qquad (3)$$

Matlab

```
>> int(int((x^2)*y,y,x^2+2,4-x),x,-2,1)

ans =

486/35
```

5.3 Výpočet objemu tělesa - transformace do polárních souřadnic

Zadání:
Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte objem tělesa určeného nerovnostmi $z \leq xy$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 2x$, $x^2 + y^2 \leq 4x$ a $y \geq 0$.

Řešení:
Výpočet integračních mezí pro ρ:

$$x^2 + y^2 = 2x \qquad\qquad x^2 + y^2 = 4x$$
$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi \qquad\qquad \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \cos \varphi$$

Maple

$$> \ solve\left(r^2 \cdot (\cos(p))^2 + r^2 \cdot (\sin(p))^2 = 2\, r \cdot \cos(p), r\right)$$

$$0, \frac{2\cos(p)}{\cos(p)^2 + \sin(p)^2} \qquad (1)$$

$$> \ solve\left(r^2 \cdot (\cos(p))^2 + r^2 \cdot (\sin(p))^2 = 4\, r \cdot \cos(p), r\right)$$

$$0, \frac{4\cos(p)}{\cos(p)^2 + \sin(p)^2} \qquad (2)$$

Matlab

```
>> syms p r
>> solve('r^2*(cos(p))^2+r^2*(sin(p))^2-2*r*cos(p)',r)

ans =

[                              0]
[ 2*cos(p)/(cos(p)^2+sin(p)^2)]

>> solve('r^2*(cos(p))^2+r^2*(sin(p))^2-4*r*cos(p)',r)

ans =

[                              0]
[ 4*cos(p)/(cos(p)^2+sin(p)^2)]
```

Integrační meze množiny Ω jsou:

$$0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2}$$
$$2\cos\,\varphi \leq \rho \leq 4\cos\,\varphi$$

Integrace:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\,\varphi}^{4\cos\,\varphi} \rho^3 \cos\,\varphi\,\sin\,\varphi\; d\rho \right) d\varphi$$

Maple

```
> with(student) :
> Doubleint(r^3·cos(p)·sin(p), r = 2·cos(p)..4·cos(p), p = 0..π/2)
```

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{2\cos(p)}^{4\cos(p)} r^3 \cos(p)\sin(p)\,dr\,dp \qquad (3)$$

```
> value(%)
```

$$10 \qquad (4)$$

Matlab

```
>> int(int(r^3*cos(p)*sin(p),r,2*cos(p),4*cos(p)),p,0,pi/2)

ans =

10
```

Poznámka: Dvojný integrál ze složitějších funkcí nelze v Matlabu řešit symbolicky. Numerické řešení získáme pomocí příkazu *double(int(int(. . .). . .))*, funkce *dblquad* nebo pomocí uživatelských funkcí, které lze volně stáhnout na internetu.

6 Srovnání

Porovnání těchto tří programů je velmi obtížné. Nejnovější verze těchto prostředí nabízejí přibližně stejné sady nástrojů a rozdíly v rychlosti výpočtů nejsou znatelné (alespoň při běžném používání). Záleží tak spíše na individuálním výběru uživatele - zda mu vyhovuje interface, syntaxe atd.

Pro řešení dvojných integrálů a běžných matematických problémů mi přišla nejjednodušší Mathematica, proto bych ji doporučil začátečníkům. Pomocí palet nástrojů lze volat většinu základních funkcí a také zapsat základní matematické operace jako sumy, odmocniny, integrály atd. klasickým způsobem. Velkou výhodou je barevné zvýrazňování syntaxe a také rozsáhlá nápověda, ve které lze pro každou funkci nalézt desítky ukázkových příkladů, demonstrační projekty a výukové tutoriály.

ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo uvést a popsat příkazy, které se používají při výpočtu dvojného integrálu užitím programu Mathematica.
V úvodní části je uveden přehled základních definic a metod výpočtu dvojného integrálu doplněný přehlednými grafy pro snažší porozumění dané problematice. Jsou zde také popsány základy práce v prostředí Mathematica a funkce používané při řešení dvojného integrálu včetně grafické reprezentace funkcí. V závěru jsou uvedeny příklady vypočítané pomocí dalších prostředí, a to Maple a Matlab včetně porovnání všech tří programů.
Vzhledem k tomu, že dvojný integrál je zařazen do kurzu Matematika 2 pro posluchače 1. ročníku studia na FAI UTB Zlín, může tato práce sloužit jako pomůcka při studiu dané problematiky.

CONCLUSION

The purpose of this thesis was to define and to describe commands used in computing of double integrals using Mathematica.
In the introduction section there are mentioned basic definitions and methods of the computing of double integrals completed by well-arranged graphs to better understanding of the given problem. There are described basic commands used in Mathematica and functions used in solving of double integrals including their graphical representation. In the end there are presented solved examples using Maple and Matlab including comparing of all programs.
With respect to the fact that double integral is included in the course Mathematics 2 for the students on Faculty of Applied Informatics, TBU, Zlín, this bachelor thesis can be used as a studying aid as well.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] THOMAS, G. *Thomas'Calculus - Media Upgrade, 11 th. Ed.*, Pearson Addison Wesley 2008. ISBN 0-321-48987-X

[2] PLCH, R. ; ŠARMANOVÁ, P. ; SOJKA, P. *Integrální počet funkcí více proměnných-Interaktivní sbírka příkladů a testových otázek [online]*, Brno 2009. ISSN 1802-128X. Dostupné online na: `http://is.muni.cz/do/1499/el/estud/prif/js09/integral/Integraly_funkce_promenne.pdf`

[3] TOMICA, R. Cvičení z matematiky II., Brno, VUT, 1974

[4] REKROTYS, *K. Přehled užité matematiky II.*, Prometheus 2000. ISBN 80-7196-181-7

[5] *The Mathematica Book*, manuál pro software Mathematica

[6] CHRAMCOV, B. *Základy práce v prostředí Mathematica*, UTB ve Zlíně 2006. ISBN 80-7318-510-5

[7] LOMTATIDZE, L., PLCH, R., *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky* MU Brno 2003. ISBN 80-210-3228-6

[8] *WOLFRAM RESEARCH [online]*. Dostupné online na: `http://www.wolfram.com/`

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM PŘÍLOH

Zdrojové kódy k příkladům a obrázkům na CD v příloze.