Strategické hry v bezpečnostním inženýrství

Strategic games in security engineering

Bc. Jan Cibulka

Diplomová práce
2010

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Jan CIBULKA**
Studijní program:	**N 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Bezpečnostní technologie, systémy a management**
Téma práce:	**Strategické hry v bezpečnostním inženýrství**

Zásady pro vypracování:

1. **Formulace a klasifikace úloh teorie her.**
2. **Antagonistický a neantagonistický konflikt 2 hráčů.**
3. **Konflikt N hráčů, kooperativní teorie.**
4. **Řešení úlohy pro bezpečnostní inženýrství.**
5. **Vytvoření internetové demonstrace.**

Rozsah práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **BARTKO, Róbert. MATLAB II. – Optimalizácia. 1. vyd. Praha : [s.n.], 2008. 227 s. ISBN 978-80-7080-691-3.**
2. **BRICKMAN, Louis. Mathematical Introduction To Linear Programming And Game Theory : undergraduate Texts In Mathematics. 2nd corrected edition. [s.l.] : [s.n.], 1998. 130 s.**
3. **LINDA, Bohdan, VOLEK, Josef. Lineární programování. 2. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2008. 139 s. ISBN 978-80-7395-133-7.**
4. **MAŇAS, Miroslav. Teorie her a optimální rozhodování. Praha : SNTL, 1974. IČ 04-012-74.**
5. **MAŇAS, Miroslav. Teorie her a konflikty zájmů. 1. vyd. Praha : Oeconomica, 2002. 114 s. ISBN 80-245-0450-2.**
6. **MAREŠ, Milan. Principy strategického chování. 1. vyd. Praha : Karolinum, 2003. 120 s. ISBN 80-246-0616-x.**
7. **VOLEK, Josef. Operační výzkum IV : teorie her a optimálního rozhodování. 1. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2003. 101 s. ISBN 80-7194-621-4.**
8. **Teorie her [online]. 2005 [cit. 2010-31-01]. Dostupný z WWW: <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/hry_materialy.html>.**
9. **The MathWorks. Optimization Toolbox : User's Guide. [s.l.] : [s.n.], 2003. 352 s. Dostupný z WWW: <http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/pdf_doc/optim/optim_tb.pdf>.**

Vedoucí diplomové práce: **prof. Ing. Roman Prokop, CSc.**
Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce: **19. února 2010**

Termín odevzdání diplomové práce: **7. června 2010**

Ve Zlíně dne 19. února 2010

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky

L.S.

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Vojtěch Křesálek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Diplomová práce je zaměřena na využití teorie her a optimálního rozhodování jakožto účinného prostředku při řešení problematiky krizového, strategického řízení v oblasti bezpečnostního inženýrství. Klasifikace a formulace úloh teorie her v teoretické části jsou podkladem k vytvoření praktických aplikací v prostředí MATLAB. Ty mají za cíl vyřešit dané úlohy a nalézt tak modely optimálních strategií v rámci bezpečnostního inženýrství. Součástí této práce je webová prezentace sloužící např. pro vzdělávací účely.

Klíčová slova:

teorie her, optimální strategie, maticové hry, bezpečnostní inženýrství, lineární programování, MATLAB

ABSTRACT

This thesis is focused on using theory of games and optimal decision-making processes as an efficient tool in the fields of crisis, strategic management with emphasis on security engineering. The practical aim of this work is to create MATLAB applications based on a classification and formulation of game theory tasks. This applications are to solve given tasks and find models of optimal behaviour strategies in terms of security engineering. The part of this work is a web presentation having e.g. educational purposes.

Keywords:

game theory, optimal strategy, matrix games, security engineering, linear programming, MATLAB

Velmi rád bych touto cestou poděkoval panu prof. Ing. Romanu Prokopovi, CSc., vedoucímu mé diplomové práce, za podnětné rady, cenné připomínky i odborné vedení, kterými přispěl k vypracování této práce. Rovněž bych chtěl na tomto místě poděkovat své rodině a přítelkyni za podporu během mého studia.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně ……………………

podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD

Dnešní doba vyznačující se mohutným rozvojem nejen IT/ICT technologií sebou přináší neustále rostoucí možnosti v oblasti zpracování a využití dat či informací. Na jedné straně bez nich organizace nemohou existovat, na straně druhé pro ně mohou být zdrojem rizik ve smyslu zneužití vůči nim samotným a to na jakékoliv úrovni a s jakýmkoliv úmyslem. Stejně tak nově vyvinuté technologie a mechanické prostředky, jiiž dnes mohou ovlivnit bezpečnost objektů, případně i zdraví kohokoliv z nás.

Existuje celá řada sofistikovaných nástrojů a postupů, jak se vypořádat s těmito bezpečnostními riziky ovlivňující činnost kteréhokoliv objektu či subjektu. Předpokladem k účinnému rozhodování o zmírnění, ještě lépe odstranění těchto rizik, je mimo člověkem získaných zkušeností i znalost rozhodovacích teorií.

Jednou z významných oblastí využívající formálního racionálního rozhodování je teorie her. Tato disciplína aplikované matematiky je rozšířena do mnoha odvětví lidských činností počínaje ekonomie, přes biologii až po např. politologii či vojenství. Zahrnuje v sobě prvky hledání optimálních strategií při řešení tzv. konfliktních situací dvou a více hráčů, přičemž existuje prostor volby z hráčovy množiny strategií. Tyto rozhodovací situace, při nichž může protihráč (okolí) zareagovat na naše dosavadní rozhodnutí a ovlivnit tak náš aktuální stav, jsou typické právě i pro bezpečnostní sektor.

Z těchto důvodů se věnuji ve své práci právě tomuto tématu, jež si klade za cíl aplikovat teorii her za využití dostupných matematických prostředků a aparátů s ohledem na bezpečnostní problematiku.

Výsledkem této práce jsou praktické aplikace naprogramované v prostředí MATLAB znázorňující možná modelová řešení daných bezpečnostních úloh a rovněž poskytující určitý návod k volbě optimálních strategií. Smyslem těchto úloh je také poukázat na podobnost ekonomického využití teorie her a řešení bezpečnostních konfliktů.

Součástí diplomové práce je webová prezentace vytvořená pomocí technologie HTML a kaskádových stylů (CSS), která může být využita např. jako studijní materiál při studiu teorie her.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ÚVOD DO TEORIE HER

Teorie her je formální disciplínou aplikované matematiky. Ačkoliv ve svém názvu nese slovo hra, nezabývá se výhradně „klasickými" hrami jako jsou šachy apod. Studuje možné konflikty a kooperace dvou a více účastníků (hráčů), u nichž se snaží nalézt optimální řešení, resp. volbu takové strategie, jež bude co nejlépe vyhovovat všem aktérům v dané rozhodovací situaci. O tomto přístupu mluvíme tehdy, pokud další aktér/aktéři mohou určitým způsobem ovlivnit naše rozhodnutí a změnit tak naší dosavadní pozici. Tímto se teorie her liší od rozhodování jednoho subjektu, u kterého se neuvažuje interakce s okolím.

Tato teorie je postavena na využití dostupných matematických aparátů, zejména potom využívá poznatků např. lineárního programování. Její snahou je tedy modelovat konfliktní rozhodovací situace a hledat co nejvhodnější či nejpřijatelnější řešení pro všechny účastníky v konkrétním případě.

1.1 Historie

První úlohy podobné těm, se kterými se setkáváme v dnešní teorii her, lze pozorovat již v dobách antiky, zejména potom v oblasti vojenství. Mnoho antických filozofů i vojevůdců se tehdy snažilo nalézt odpověď na otázku, jak by se měl např. voják v bitvě co nejracionálněji zachovat (jakou strategii zvolit) s ohledem na možnosti nejen své, ale i svého protivníka.

Další období, spojené s náznaky teorie her se datuje do 17. století. V této době vznikl pojem pravděpodobnost na základě analýzy hraní společenských her (např. kostky, karetní hry, apod.). O vznik teorie pravděpodobnosti se zasloužili B. Pascal a P. de Fermat. Jejich přínos tkvěl ve formulaci matematického aparátu popisující hraní těchto her. Následoval první výskyt smíšených strategií (později významný pro teorii her), který je spojen s hrou „le Her" a jménem J. Waldegrave. Na základě prudkého rozmachu matematických prostředků i mnoha různých teorií (např. teorie užitku - Bernoulli, Cournotův model oligopolu) v 18. a 19. století, bylo dále mnohem snadnější získat přehled o strategických možnostech svých protihráčů. Myšlenka hledání optimálního řešení tedy nezůstala jen u hraní salónních her, ale začala se díky novým poznatkům přesouvat i do reálného života.

Jako první se o matematizaci pojmu strategická hra pokusil E. Borel, který zavedl pojem ryzí strategie a rovněž dokázal existenci smíšených strategií. Matematizace teorie her nastala až v roce 1928, kdy John Von Neumann definoval na základě důkazu základní větu maticových her (nazývanou také větou o minimaxu).

Hlavním impulsem ke vzniku samostatné teorie her bylo až objevení analogie struktury konfliktní situace u již zmíněných salónových her a ekonomického rozhodování, i když určité výsledky z této teorie existovaly již dříve. Této analogie si všiml John von Neumann a Oskar Morgenstern, kteří poté v roce 1944 publikovali práci pod názvem „Teorie her a ekonomické chování“. Jejich práce se později stala základem a „biblí" teorie her. V následujících letech se teorie, díky své popularitě, velmi rychle rozšířila a nalezla uplatnění téměř ve všech oblastech lidské činnosti.

V dalších letech lze zmínit práce J. F. Nashe (nositel Nobelovy ceny za ekonomii), který definoval základní pojmy teorie her, zejména koncept Nashova rovnovážného bodu. Jako další jména, jež se zasloužila o rozvoj teorie, je možno zmínit práce J. Harsanyiho (hry s neúplnou informací a jejich převod na hru s úplnou informací), L. S. Shapleyho (ukazatel síly hráčů v koaličních hrách), G. B. Dantziga (souvislost lineárního programování a teorie her) a dalších.

V dnešní době je teorie her aplikována do mnoha vědních disciplín a své významné uplatnění nachází v otázkách jak armádní, tak i bezpečnostní problematiky.

1.2 Koncept teorie her

Základním konceptem teorie her je studium a modelování konfliktních rozhodovacích situací - tzv. **her.** Při těchto hrách jsou podmínkou dva a více aktérů (jednotlivci, firmy, úřady, skupiny nebo jejich kombinace), každý se přitom snaží maximalizovat svou **výhru**[1]. Tito aktéři se nazývají **hráči** a mají protichůdné zájmy, přičemž se rozhodují buď individuálně, nebo kolektivně. [4]

Akt jednoho hráče může ovlivnit šanci na výhru nejen jeho samotného, ale i ostatních, takže **výhry** (výplaty) všech účastníků jsou zde navzájem ovlivněny.

Inteligentního hráče nazveme tehdy, pokud se snaží vždy maximalizovat svůj zisk či užitek. Naopak **neinteligentního hráče** rozumíme ve chvíli, kdy je mu výsledek hry lhostejný. Obecně ho lze považovat za náhodný mechanismus, i když svými volbami může ovlivňovat inteligentní hráče. Do hry v mnoha případech vstupují i tzv. ***p* – inteligentní**

1 Výhrou v tomto kontextu rozumíme např. užitek, zisk či zájem na získání nějaké výhody.

hráči, kde $p \in \langle 0,1 \rangle$ je číslo, které určuje úroveň inteligence tohoto protivníka. P – inteligentní hráči se často snaží rozhodovat jako inteligentní hráči. Díky nedostatku informací a např. absenci potřebného času k analýze se nerozhodují optimálně.

Jak již bylo řečeno, každý hráč se snaží maximalizovat svou výhru. Hodnota **výhry** je přitom dána **výplatní funkcí**, která závisí na zvolené **strategii**[2] z hráčova **prostoru strategií**[3].

Cílem teorie her je nalezení optimální strategie, což je taková strategie, která zajistí co nejvyšší výhru nezávisle na tom, jakou strategii volí protihráč. Takovýto přístup poskytuje všem hráčům výběr nejlepšího, nejpřijatelnějšího řešení.

Teorie her stejně jako jiné vědní obory disponuje základními předpoklady, které jsou podle [13] následující

- zúčastnit se mohou minimálně dva účastníci
- každý z účastníků rozhodovací situace zná množinu alternativ svého chování, ale také disponuje množinou alternativ chování svého protivníka/protivníků
- každý z účastníků rozhodovací situace dokáže ocenit efektivnost své volby ve všech možných případech, které by mohly nastat
- každý z účastníků rozhodovací situace volí z množiny možných alternativ nezávisle na volbách protivníků
- alespoň jeden účastník rozhodovací situace je inteligentní hráč, tzn., že jeho jednání je uvědomělé a volbou strategie sleduje určitý cíl

1.3 Klasifikace rozhodovacích situací

Ve chvíli kdy se snažíme objasnit, co lze definovat jako optimální chování, je potřeba co nejpřesněji specifikovat všechny okolnosti, za nichž jednotliví účastníci hledají svá optimální rozhodnutí. Tato klasifikace a tedy rozdělení do jednotlivých tříd je výhodné v tom, že pro jednotlivé třídy je možné využít relativně jednotného způsobu matematického popisu a jedné definice optimálního chování.

2 Strategie = určitý způsob chování hráče v dané partii a chápeme ji jako posloupnost jednotlivých tahů.
3 Prostor strategií = seznam všech možných alternativ, které jsou hráči dostupné.

1.3.1 Atributy konfliktních rozhodovacích situací

Existuje mnoho různých pohledů, podle kterých je možno hry klasifikovat. V zásadě se v literatuře objevuje členění podle

- **typu modelu hry**
- **počtu účastníků - hráčů**
- **inteligence účastníků**
- **zájmů hráčů**
- **informovanosti hráčů**
- **charakteru výher**
- **velikosti prostorů strategií**

Model hry

V teorii her nalézáme základní dva druhy popisu her, které mají společný cíl a to definici obecného matematického modelu konfliktů, resp. rozhodovacích situací. Můžeme se setkat s těmito zápisy her ve formě

- hry v normálním tvaru
- hry v extenzivním tvaru

Hry v **normální formě** jsou de facto primárním cílem popisu modelů teorie her. Jejich snahou je popsat tyto modely v co nejobecnějším tvaru a umožnit tak jejich univerzální způsob řešení v rámci konkrétních situací. Tato forma je určena maticí, která reprezentuje možné hráče, jejich strategie a taktéž zisky. Všeobecně může být definována jako funkce přiřazující zisk každému hráči na základě dané kombinace tahů (strategie). Matematicky ji definujeme takto, přičemž hovoříme o **základním matematickém modelu teorie her**

$$\{\, Q\,; X_1, X_2, \ldots X_{\mathrm{N}}; \mathrm{M}_1(x), \mathrm{M}_2(x), \ldots, \mathrm{M}_{\mathrm{N}}(x) \,\}$$

Množinu $Q = \{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ nazveme množinou hráčů, X_i je prostor strategií *i*-tého hráče a funkci $\mathrm{M}_i(x)$ nazveme výplatní funkci *i*-tého hráče. Výplatní funkce jsou definovány na kartézském součinu $X_1 \times \ldots \times X_{\mathrm{N}}$. [8]

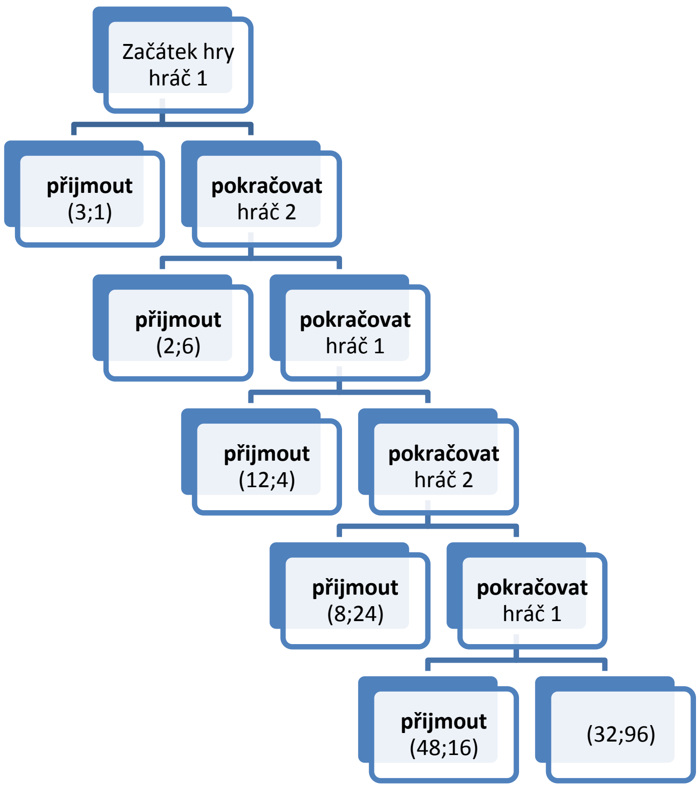
Příklad 2.1 Uvažujme hru dvou hráčů. Hráč 1 vybírá libovolné reálné číslo z intervalu $\langle 0,1 \rangle$, stejně tak hráč 2 volí rovněž libovolné číslo z $\langle -2, 2 \rangle$ a to nezávisle na hráči 1.

Po zveřejnění svých voleb dostane hráč 1 výhru od hráče 2 rovnu součtu zvolených čísel. Matematickým modelem tohoto příkladu je hra ve tvaru

$$\left\{ \{1,2\}; \langle 0,1\rangle, \langle -2,2\rangle; \mathrm{M}_1(x) = x_1 + x_2, \mathrm{M}_2(x) = -(x_1 + x_2) \right\}.$$

Extenzivní forma je využívána k popisu her (např. salónní hry), kde je významné pořadí postupně prováděných tahů. Hra v extenzivním tvaru popisuje rozhodovací situaci ve formě grafu. Rozumíme zde grafů užívaných v teorii grafů, tedy útvaru zadaného uzly a hranami, které tyto uzly spojují. Strom (konkrétní rozhodovací situace) zachycuje všechny případy, které mohou nastat. Uzly jsou v tomto stromu místa, kde se hráč rozhoduje o volbě svého následujícího tahu. Jednotlivé tahy jsou reprezentovány hranou jdoucí z uzlu. Listy stromu potom vyjadřují zisk hráče.

Následující obrázek č.1 ukazuje příklad hry[4] „Stonožka“ v extenzivní formě.



Obrázek č. 1 - příklad hry v extenzivní formě - Stonožka

[4] Pravidlem hry je, že na začátku je dána výhra tak, že začínající hráč vyhrává více než dvojnásobek výhry druhého hráče (v příkladě volíme výhry 3 a 1). Dále hráč, který je na tahu může výhru přijmout a ukončit hru, nebo zvolit pokračovaní hry, přičemž výhry se zdvojnásobí, ale zároveň se hráči mezi sebou vymění. Předpokládá se, že je dán konečný počet tahů.

Počet účastníků - hráčů

Pokud uvažujeme spor, resp. konfliktní situaci rozlišujeme hry

- dvou hráčů
- N hráčů, kde $N > 2$
- s nekonečným počtem hráčů

Typickým příkladem hry dvou hráčů je maticová hra (uvedená v příkladě 2.2).

U her dvou a více hráčů je možnost sestavení tzv. koalic, kde se několik účastníků může dohodnout na strategiích, které jim přinesou zvýšení hodnoty výhry, než kdyby takovou koalici neutvořili. Takovouto situací může být např. konflikt N hráčů (příklad 4.1). Naopak u her s nekonečným počtem hráčů není možné zkonstruovat seznam všech účastníků, příkladem může být trh s cennými papíry.

Inteligence účastníků

Rozlišujeme následující typy hráčů

- inteligentní hráč
- neinteligentní hráč (náhodný mechanismus, hry hrané proti přírodě)
- p – inteligentní hráč

V některých situacích může dojít k tomu, že na jedné straně vystupuje inteligentní hráč a na straně druhé neinteligentní. Při této příležitosti je vhodné dále rozlišovat dva druhy rozhodování. Prvním je **rozhodování za rizika**, při němž je inteligentnímu účastníku známé rozložení pravděpodobností strategií náhodného mechanismu. **Rozhodování za neurčitosti** je opačným případem, kdy inteligentní hráč nezná toto rozložení.

Zájmy účastníků

Toto dělení patří mezi základní dělení v teorii her. Rozeznáváme dva typy her v závislosti na tom, jaké zájmy mají hráči a to

- antagonistické hry (konflikty)
- neantagonistické hry (konflikty) u kterých dále rozlišujeme
    - kooperativní hry
    - nekooperativní hry

O **antagonistickém konfliktu** mluvíme tehdy, pokud zájmy hráčů jsou v přímém protikladu, tzn. jeden hráč získá přesně to, co ztratí ten druhý (např. hra s nulovým součtem, viz dále). Při rozhodování se často setkáváme s případy, kdy každý z účastníků sleduje své vlastní zájmy, avšak tyto zájmy nemusí být v přímém protikladu, potom máme na mysli **neantagonistické konflikty** (např. vězňovo dilema).

U kooperativních her v rámci neantagonistických konfliktů existuje možnost uzavírání koalic před volbou strategií. U nich rozlišujeme tyto dva případy

- hry s přenosnou výhrou
- hry s nepřenosnou výhrou

Situace, kdy je dohoda a úhrada (platba ostatním hráčům) za výpomoc při rozhodnutí možná, nazýváme **přenosnou výhrou**. Opačným případem je konflikt, kdy je dohoda možná, ale úhrada nikoliv, potom hovoříme **o nepřenosné výhře.** Je to stav, kdy je legální uzavírat patřičné smlouvy o spolupráci, ale už není ze zákona možné se o tyto výhry dělit, resp. v některých případech to ani nelze (např. pověst firmy).

Informovanost hráčů

U konfliktních rozhodovacích situací, které se sestávají z provedení posloupnosti tahů, je vhodné si uvědomit množství informace, jimiž hráči disponují před každým tahem a týkají se všeho, co se doposud v partii odehrálo. Rozlišujeme hry s

- úplnou informací
- neúplnou informací

Příkladem prvního typu her jsou šachy (u nich každý ví, co se odehrálo). Hry s neúplnou informací se týkají např. karetních her, kde sice hráči vědí, které karty mají v ruce a které jsou zatím odehrány, ovšem netuší, jaké mají v ruce ostatní hráči a mohou je tak v budoucnu použít.

Charakter výher

Při klasifikaci rozhodovacích situací je nutné brát v úvahu způsob, jakým jsou výhry generovány a jak připadnou na jednotlivé hráče. Podle charakteru výher dělíme

- hry s konstantním součtem
- hry s nekonstantním součtem

Označme výhru každého hráče na konci partie v_i, kde i = 1,2,…, N a platí - li

$$\sum_{i=1}^{N} v_i = konst,$$

hovoříme o hře s **konstantním součtem**[5]. Zvláštním druhem je situace, při níž je *konst* = 0. Zisk jednoho hráče je v tomto případě roven ztrátě druhého, v případě více hráčů jsou výhry a prohry rozděleny navzájem. Klasickým případem hry s konstantním součtem je antagonistický konflikt dvou hráčů s nulovým součtem. Celkový objem výher tedy nezávisí na zvolených strategiích.

U her s **nekonstantním součtem** je celkový objem výher závislý na tom, které strategie hráči volí, není mezi nimi přímý vztah. Modelovým konfliktem může být nekooperativní dvojmaticová hra se dvěma hráči, kde každý z hráčů disponuje svou výplatní maticí (ukázka v příkladě 3.1).

Velikost prostoru strategií

V každém tahu rozhodovací situace je možné odlišit různé počty alternativ, na nichž závisí použitý matematický aparát k následnému rozboru modelů. Existují přitom

- konečné hry - hry s konečným počtem strategií
- nekonečné hry - hry s nekonečným počtem alternativ

Je-li však množina strategií alespoň jednoho hráče nekonečná, jedná se o hru nekonečnou.

Příkladem konečné hry může být hra „kámen-nůžky-papír“, kde jsou k dispozici tři známé strategie. Příklady nekonečných her nalezneme např. v [8].

1.3.2 Analýza konfliktních rozhodovacích situací

Teorie her a její aplikace mají za cíl umožnit rozbor jednotlivých rozhodovacích situací a tedy poskytnout prostředky k tomu, aby se účastník v těchto situacích rozhodoval racionálně. Analýzu můžeme provést ze dvou hledisek a to z

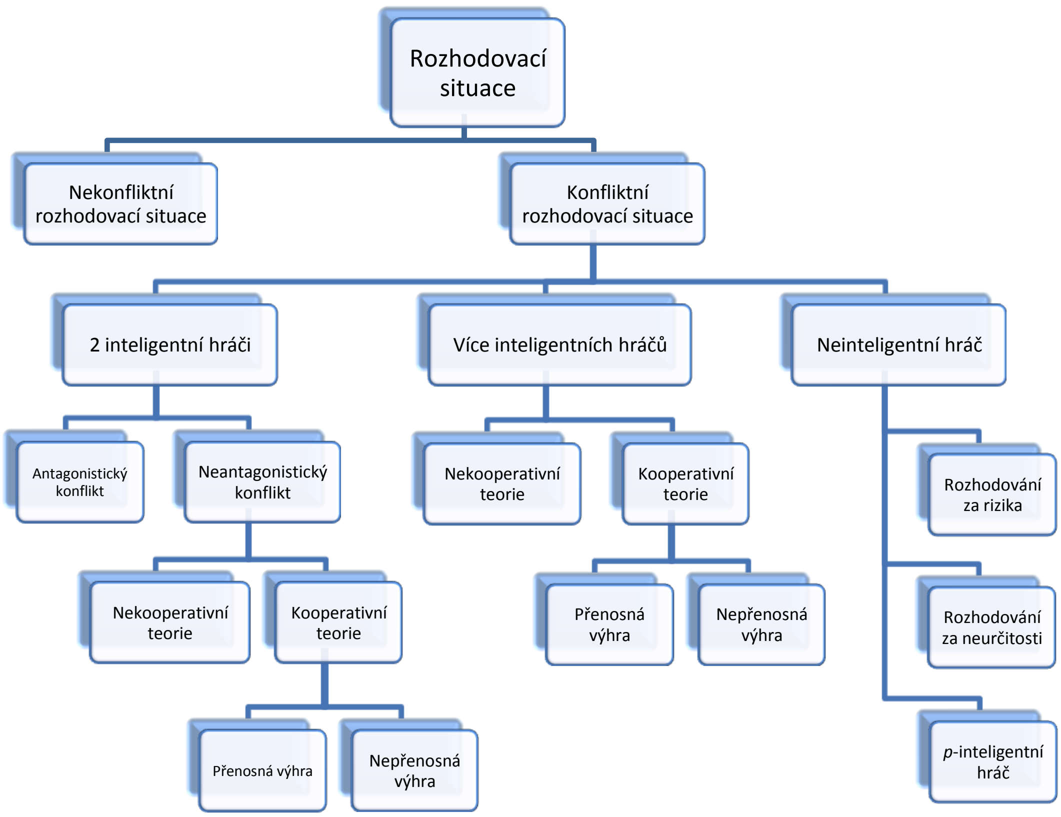
- normativního hlediska (pohled diváka)
- deskriptivního hlediska (pohled hráče)

[5] Tento přístup je charakteristický pro antagonistický konflikt, kde výhra jedince či skupiny znamená stejnou prohru pro ostatní hráče.

V rámci normativního hlediska se snažíme nalézt odpověď na to, **jak** by se měl inteligentní hráč chovat v každé rozhodovací situaci a pokud jde o deskriptivní hledisko, to se snaží **popsat** skutečné chování jedinců či různých skupin. Teorie her se však z velké části věnuje normativnímu hledisku a deskriptivní je spíše předmětem studií psychologických či sociologických věd.

Shrnutí

Na základě popsaných atributů je na následujícím obrázku č.2 podle [7] zobrazen ucelený přehled rozhodovacích situací.



Obrázek č. 2 - přehled rozhodovacích situací

Uvedené dělení popsané v této kapitole má za cíl klasifikovat teorii her podle různých hledisek a je nutno ho brát v úvahu při každém řešení konfliktní situace.

Nejpodstatnější a nejvíce věnované oblasti v teorii her jsou hry **antagonistického** a **neantagonistického** konfliktního typu dvou hráčů a dále pak **konflikt *N* účastníků** či **kooperativní teorie**. Těmto oblastem je v dalším textu věnována pozornost a z nichž vychází aplikace popsané v praktické části.

2 ANTAGONISTICKÉ HRY DVOU HRÁČŮ

Antagonistickým konfliktem budeme rozumět hru, v níž vystupují dva inteligentní hráči, kde se jednoznačně každý z nich snaží o maximalizaci své výhry na úkor protihráče (výhra jednoho je prohrou druhého). Po volbě svých rozhodnutí si rozdělí pevnou hodnotu *K*, která nezávisí na tom, jaká rozhodnutí zvolili.

Zaveďme matematický model antagonistického konfliktu, což je hra v normálním tvaru s konstantním součtem a úplnou informací

$$\{Q=\{1,2\};X_1,X_2;\mathrm{M}_1(x_1,x_2);\mathrm{M}_2(x_1,x_2)\}, \tag{2.1}$$

kde pro všechna $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ platí $\mathrm{M}_1(x_1,x_2)+\mathrm{M}_2(x_1,x_2)=K$. Jelikož je možné uvažovat $N=2$ (hru dvou hráčů), tedy položit $X_1=X$ a $X_2=Y$, lze tento model zjednodušit a zapsat ve tvaru

$$\{Q=\{1,2\};X,Y;\mathrm{M}_1(x,y);\mathrm{M}_2(x,y)\}\ . \tag{2.2}$$

Rovnovážné strategie $\bar{x}\in X$ a $\bar{y}\in Y$ nazveme ve hře (2.2), jestliže platí

$$\mathrm{M}_1(x,\bar{y})\le \mathrm{M}_1(\bar{x},\bar{y}) \text{ a zároveň } \mathrm{M}_2(\bar{x},y)\le \mathrm{M}_2(\bar{x},\bar{y}) \tag{2.3}$$

pro všechna $x\in X$ a $y\in Y$. Jinými slovy, pokud se jakýkoliv hráč odchýlí od své rovnovážné strategie, nemůže si polepšit. Takto definované optimální strategie představují tzv. **Nashovu rovnováhu** (Nashovo rovnovážné řešení) a nazýváme je rovnovážnými strategiemi.

Uvažujme dále případ, kdy konstanta $K=0$, tedy $\mathrm{M}_1(x,y)+\mathrm{M}_2(x,y)=0$. Potom je $\mathrm{M}_1(x,y)=-\mathrm{M}_2(x,y)$. Z tohoto zápisu vyplývá, že pro popis a řešení výše uvedené nerovnosti můžeme díky opačnému znaménku sledovat pouze $\mathrm{M}_1(x,y)$. Jak se můžeme přesvědčit v literatuře, tímto přechází nerovnosti uvedené v (2.3) do tvaru

$$\mathrm{M}(x,\bar{y})\le \mathrm{M}(\bar{x},\bar{y})\le \mathrm{M}(\bar{x},y) \tag{2.4}$$

pro všechna $x\in X$ a $y\in Y$. Číslo $\mathrm{M}(\bar{x},\bar{y})$ rozumíme **cenou hry.** Je to částka, kterou získá první hráč v případě, kdy oba volí své optimální strategie. [8]

2.1 Maticové hry

Modelem, který je v teorii her nejčastěji vyšetřován, je hra

- dvou inteligentních hráčů v normálním tvaru
- s nulovým součtem
- s konečnými prostory strategií $X = \{1, 2, ..., m\}$ a $Y = \{1, 2, ..., n\}$ (2.5)

Tímto způsobem zadaná hra se nazývá **maticová hra**, neboť k jejímu popisu stačí jediná matice, jejíž prvky a_{xy} udávají hodnoty výplatní funkce prvního hráče (hodnota výplatní funkce protihráče je vždy $-a_{xy}$). V takovéto matici typu m, n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

jsou jednotlivé řádky matice strategiemi hráče 1 a jednotlivé sloupce strategiemi hráče 2. Řádky značíme číslem $i = 1, 2, ..., m;$ a sloupce $j = 1, 2, ..., n.$ Vzhledem k symbolice užívané v teorii her a výše uvedenému značení lze dále zapisovat jednotlivé prvky matice jako a_{ij}.

2.2 Rovnovážné strategie

Nyní vyvstává otázka, jak v dané maticové hře nalezneme rovnovážné strategie (Nashův rovnovážný bod) obou hráčů. Uvažujme proto následující jednoduchý příklad.

Příklad 2.1 Vyřešte konflikt, jestliže je matice hry zadána ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 12 & 5 \\ 7 & -1 & 3 & 13 \\ -3 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení: Předpokládejme, že zvýšení zisku jednoho hráče se rovná zvýšení ztráty hráče druhého (každý z nich přitom usiluje o co nejvyšší zisk na úkor druhého). Podle [14] každý hráč proto předpokládá, že se ho bude jeho protihráč snažit co nejvíce poškodit. Postupují tedy dále tímto způsobem. Oba hráči uvažují všechny možné strategie protihráče a naleznou pro sebe nejhorší možné výsledky (hráč 1 označí minimum v každém řádku, hráč 2 označí maximum[6] v každém sloupci). Poté každý z nich zvolí tu strategii, pro kterou je tento nejhorší výsledek co nejlepší - postupuje se tedy cestou „nejmenšího zla“ (hráč 1 vybere z těchto minimálních hodnot maximální[7] a naopak hráč 2 vybere z maximálních hodnot minimum[8]). V tomto příkladu uvedený v [15] bude situace pro oba hráče následující

$$\text{Hráč 1:}\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 12 & 5 \\ 7 & -1 & 3 & 13 \\ -3 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix},\quad \max_i \{a_{ij}\} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{Hráč 2:}\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 12 & 5 \\ 7 & -1 & 3 & 13 \\ -3 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix},\quad \min_j \{a_{ij}\} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 12 & 13 \end{pmatrix} = 3.$$

Je zřejmé, že optimální strategie je v případě prvního hráče $i^* = 1$ a hráče druhého $j^* = 2$. Při volbě jiných než rovnovážných strategií si oba hráči nemůžou polepšit. Pokud by např. druhý hráč zvolil strategii $j = 3$ a první hráč zachoval svou optimální strategii $i = 1$. V tomto okamžiku je cena hry M (1,3) = 12 a hráč 1 tímto způsobem získá 9 jednotek na úkor hráče 2, který se nerozhoduje optimálně.

Z uvedeného příkladu vyplývá, že dvojice rovnovážných strategií (i^*, j^*), resp. prvek $\mathrm{M}(i^*, j^*)$ má tu vlastnost, že je nejmenší na řádku a současně největší ve sloupci. Tento prvek (cena hry $\boldsymbol{v}$) je v tomto příkladu roven 3 a je zároveň Nashovým rovnovážným bodem.

Rovnovážný bod, tedy situace, kdy se dolní cena hry rovná horní ceně hry, nazýváme rovněž **sedlovým prvkem matice**. Vyjadřuje optimální řešení maticové hry a formálně jej lze zapsat následujícím způsobem

$$v = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{2.7}$$

---

[6] Z důvodu opačné hodnoty své výhry vůči hráči 1.

[7] Výběr nejvyšší z nejnižších výher hráče 1 nazýváme **dolní cenou hry**.

[8] Výběr nejmenší z nejvyšších proher hráče 2 nazýváme **horní cenou hry**.

Příklad 2.2 Uvažujme nyní ukázkovou hru[9] (kámen – nůžky – papír) v teorii her zadanou maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Dolní cena hry: $\max_i \min_j a_{ij} = -1$; Horní cena hry: $\min_j \max_i a_{ij} = 1$.

Snadno se tedy můžeme přesvědčit, že v takovéto hře neexistuje sedlový prvek a hra nemá rovnovážné řešení v tzv. **ryzích strategiích** (viz dále).

Pro shrnutí všech možných situací při hledání sedlového bodu matice (Nashovy rovnováhy) je možné se obecně setkat s případy, kdy

- matice obsahuje jeden sedlový prvek (prvek je Nashovým rovnovážným řešením)
- matice obsahuje více sedlových prvků, jejichž hodnoty jsou stejné (tyto sedlové prvky definují alternativní optimální (rovnovážné) strategie
- matice neobsahuje žádný sedlový prvek (neexistuje rovnovážné řešení v ryzích strategiích) [3]

2.3 Smíšené strategie

V příkladě 2.2 nebylo možné naleznout sedlový prvek, i přesto lze hru řešit pomocí teorie her. Podkladem k řešení her tohoto typu, je zavedení nového modelu maticových her, kde hráči budou volit (střídat) jednotlivé strategie s určitou pravděpodobností tak, aby v průměru dosáhli maximální možné výhry.

Novým modelem bude znovu hra v normálním tvaru, kde přípustnými strategiemi hráče 1 budou předpisy, určující s jakými pravděpodobnostmi bude volit prvky z $X = \{1, 2, \ldots, m\}$, a stejně tak pro hráče 2 to budou předpisy, s jakými bude volit prvky z $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definice 2.1 Mějme maticovou hru s prostory strategií (2.5) a maticí hry (2.6). Hru dvou hráčů s nulovým součtem s prostory strategií

[9] V této hře je první řádek hráče 1 vyjádřen strategií „kámen" stejně jako v prvním sloupci hráče 2. Podobně je tomu u dalších strategií. Výhra znamená zisk = 1, remíza = 0 a prohra = -1.

$$X^{\mathrm{S}} = \left\{ x;\ x^{\mathrm{T}} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_m \right],\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \mathrm{x} \geq 0 \right\},$$
$$Y^{\mathrm{S}} = \left\{ y;\ y^{\mathrm{T}} = \left[y_1, y_2, \ldots, y_n \right],\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y \geq 0 \right\}$$

a s výplatní funkcí

$$\mathrm{M}^{\mathrm{S}}\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i \, a_{ij} \, y_j = x^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \, y \tag{2.8}$$

nazveme smíšeným rozšířením původní maticové hry.

Prvky původních prostorů strategií X a Y nazýváme **čisté (ryzí) strategie**. Prvkům z prostorů X^{S} a Y^{S}, které definují rozložení pravděpodobnosti na prostoru ryzích strategií, budeme říkat **smíšené strategie**.

Výplatní funkce $\mathrm{M}^{\mathrm{S}}\left(x, y\right)$ udává střední (očekávanou) výhru hráče 1 (pro hráče 2 je opačné hodnoty) v případě, že hráč 1 volí smíšenou strategii $x \in X^{\mathrm{S}}$ a hráč 2 volí $y \in Y^{\mathrm{S}}$.

Ryzí strategie jsou tedy zvláštním případem (podmnožinou) smíšených strategií, kde jedna z pravděpodobností je rovna jedné, a zbývající pravděpodobnosti jsou nulové.

Pro maticové hry platí důležitá věta, tzv. **základní věta maticových her**:

Věta 2.1 *Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení v rovnovážných strategiích.*

Podle [8] tato věta říká, že pro každou matici A existují dva vektory $\overline{x} \in X^{\mathrm{S}}$ a $\overline{y} \in Y^{\mathrm{S}}$, pro které platí

$$x^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \, \overline{y} \leq \overline{x}^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \, \overline{y} \leq \overline{x}^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \, y. \tag{2.9}$$

Uvedené nerovnice jsou matematickou definicí Nashovy rovnováhy ve smíšených strategiích. Jinak řečeno, hráč, který zvolí jinou, než rovnovážnou strategii si nemůže polepšit. Ve výsledku na tom může zůstat stejně dobře, nebo hůře, ne však lépe.

V jednodušších případech, kdy uvažujeme maticové hry rozměru $m \times 2$ nebo $n \times 2$, využíváme grafických metod k nalezení rovnovážného bodu. Obecně lze říci, že pro řešení maticových her jsou k dispozici ekvivalentní úlohy lineárního programování využívající simplexové metody k nalezení optimálního řešení konfliktní situace.

2.4 Dominované strategie

V některých případech se lze setkat s ryzími strategiemi, které nepřinášejí hráči lepší výsledek, než některá jiná ryzí strategie a to při volbě jakékoli strategie druhého hráče. Tato strategie se nazývá **dominovaná** a neposkytuje lepší výsledek než strategie **dominující**. Mějme následující případ, kde matice A je před a matice C po možné úpravě

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

První řádek matice A obsahuje prvky, které jsou všechny ostře větší než řádek druhý. Racionální hráč druhý (dominovaný) řádek volit nebude, lze ho proto odstranit a dostaneme novou matici B. Rovněž i druhý hráč má šanci odstranit dominovaný sloupec (u matice B je první sloupec dominující a třetí je dominovaný)[10]. [3]

Význam dominovaných strategií není v teorii her až tak významný. Výhoda těchto úprav, je pouze v tom, že umožňují zjednodušit model konfliktní situace.

2.5 Maticové hry a lineární programování

Úlohy lineárního programování se zaměřují na nalezení minima (resp. maxima) lineární funkce n proměnných, popsané soustavou lineárních nerovností, které definují omezení úlohy. Jak bude dále ukázáno, pomocí úloh tohoto typu lze snadným způsobem nalézt optimální smíšené strategie při řešení maticových her.

Mějme následující maticovou hru zadanou maticí (2.6) a strategiemi p (hráč 1) a q (hráč 2)

$$p = (p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m),\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = \{1, 2, \ldots, m\};$$
$$q = (q_1,\ q_2, \ldots,\ q_n),\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0,\ j = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Rovněž předpokládejme, že všechny prvky matice A jsou kladné. Pokud by tomu tak nebylo, můžeme k těmto prvkům přičíst[11] vhodně zvolenou konstantu K, pro niž platí

[10] Pro hráče 2 jsou hodnoty výplatní funkce opačné hodnoty.

[11] Úpravou získáme strategicky ekvivalentní hru. Je dokázáno, že z pohledu volby strategií se nic nezmění.

$$k > \left| \min a_{ij} \right|, i = \{1, 2, ..., m\}; \; j = \{1, 2, ..., n\}. \tag{2.10}$$

Postup pro hledání optimálního řešení je podobný, jako v případě hledání rovnovážných ryzích strategií (příklad 2.1). Hráč 1 se snaží nalézt pro jakékoliv p (v danou chvíli však pevné p) minimální zaručenou výhru v.

Mějme tedy výraz

$$v = \min\{a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + ... + a_{mj} p_m\}; \;\; \forall j = \{1, 2, ..., n\}. \tag{2.11}$$

Je patrné, že

$$v \le a_{1j} \, p_1 + a_{2j} \, p_2 + ... + a_{mj} \, p_m; \;\; \forall j = \{1, 2, ..., n\}. \tag{2.12}$$

Z uvedeného vyplývá, že pro každé j (hráč 2 volí svou ryzí strategii[12]) udává výraz na pravé straně očekávanou výhru hráče 1 při volbě jeho smíšené strategie p.

Podle [14] je očekávaná střední hodnota výhry $\pi(p, q)$ pro smíšenou strategii hráče 2 lineární kombinací těchto hodnot s koeficienty $q_1, q_2, ..., q_n$, jejichž součet je roven 1.

Dále nerovnost (2.12) lze bez ztráty významu převést na tyto lineární kombinace

$$\begin{aligned}
q_1 v &\le q_1(a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m) \\
q_2 v &\le q_2(a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_n v &\le q_n(a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(q_1 + q_2 + ... + q_n)}_{1} \, v &\le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i \, a_{ij} \, q_j = \pi(p, q) \\
v &\le \pi(p, q)
\end{aligned}$$

Hodnota v je proto minimální zaručenou výhrou hráče 1, ať už jeho protihráč volí jakoukoli ryzí nebo smíšenou strategii (vzhledem k (2.11) je v největší číslo splňující poslední nerovnost).

Po vydělení nerovnosti (2.12) hodnotou v, dostaneme nově vzniklou nerovnost

---

[12] Např. hráč 2 volí strategii (0,0,1,0,0). V této situaci je j=3 ,volí tedy svou třetí strategii (sloupec).

$$1 \le a_{1j}\frac{p_1}{v} + a_{2j}\frac{p_2}{v} + \ldots + a_{mj}\frac{p_m}{v} .$$

Pokud označíme $y_i = \frac{p_i}{v}$, zřejmě platí: $y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \frac{1}{v}$. (2.13)

Ve výsledku obdržíme nerovnost

$$1 \le a_{1j}\, y_1 + a_{2j}\, y_2 + \ldots + a_{mj}\, y_m . \qquad (2.14)$$

Jak již bylo řečeno, hráč 1 se snaží maximalizovat svou minimální zaručenou výhru *v* pro svou optimální strategii *p*. Za těchto předpokladů, to ovšem znamená **minimalizovat**

$$\frac{1}{v} = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

při omezeních (2.14) pro všechna $j = \{1, 2, \ldots, n\}$. (2.15)

Takto zavedená úloha se shoduje s **duální úlohou lineárního programování**, jejíž řešení nám poskytne optimální strategii *p* hráče 1.

Postup pro nalezení optimální strategie *q* hráče 2 je identický. Jeho cílem je však minimalizovat svou maximální prohru. Snaží se naleznout proto *v* a *q* tak, aby

$$v \ge a_{i1}\, q_1 + a_{i2}\, q_2 + \ldots + a_{in}\, q_n; \text{ přičemž } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \ge 0,\ j = \{1, 2, \ldots, n\} . \qquad (2.16)$$

Vynásobme nyní nerovnost (2.16) hodnotou $\frac{1}{v}$ a zároveň označme $x_i = \frac{q_j}{v}$. (2.17)

Zřejmě platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{v}.$$

Po zavedení nové proměnné x_i dostaneme nerovnost ve tvaru

$$1 \ge a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n . \qquad (2.18)$$

Ve výsledku se snažíme minimalizovat prohru hráče 2. To ale znamená **maximalizovat**

$$\frac{1}{v} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

při omezeních (2.18) pro všechna $i = \{1, 2, ..., m\}$. (2.19)

Tato maximalizační úloha odpovídá **primární úloze lineárního programování**. [14]

Výše uvedenými postupy byla ukázána přímá souvislost mezi formulací maticových her a úlohami lineárního programování.

2.6 Simplexová metoda

Pro nalezení optimálního řešení úloh lineárního programování se využívá tzv. simplexové metody, což je iterační postup o konečném počtu kroků hledající optimální řešení dané úlohy[13].

Vlastností úloh LP je taková, že jakoukoli maximalizační úlohu je možné převést i na úlohu minimalizační. U maticových her si vystačíme s řešením pouze jedné z dvojic úloh, neboť simplexová metoda poskytuje současně řešení úlohy primární i duální. Je vhodnější řešit úlohu (2.19), neboť v této úloze není třeba zavádět pomocné proměnné k získání výchozí jednotkové báze.

Příklad 2.3 Vyřešte konflikt zadaný v [3] maticí

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: Dolní cena hry se nerovná horní ceně hry - zadaná hra nemá řešení v ryzích strategiích. Podle základní věty maticových her již víme, že každá maticová hra má řešení ve smíšených strategiích. Aby bylo možné řešit tuto úlohu, je nutné, aby všechny prvky matice byly kladné. Podle (2.10) k nim přičteme např. $c = 3$ a získáme tak novou matici

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Formulace problému bude

$$\textbf{maximalizovat } q_1 + q_2 + q_3 \text{ za podmínek}$$

[13] Jelikož předmětem diplomové práce není vyčerpávající výčet definic matematických metod využívající teorie her, algoritmus této univerzální metody je uveden např. v [5]

$$\begin{aligned} 4q_1 + 3q_2 + 2q_3 &\leq 1 \\ 2q_1 + 4q_2 + 5q_3 &\leq 1 \\ q_1, q_2, q_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Po přidání přídavných proměnných lze přepsat nerovnice na rovnice a úloha má dále tvar

$$\begin{aligned} 4q_1 + 3q_2 + 2q_3 + q'_1 \qquad &= 1 \\ 2q_1 + 4q_2 + 5q_3 \qquad + q'_2 &= 1 \\ q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ q_3 \geq 0 & \end{aligned}$$

Výpočet takovéto úlohy je řešen v následující (simplexové) tabulce č.1

Tabulka č. 1 - výpočet úlohy pomocí simplexové tabulky

Proměnné	q_1	q_2	q_3	q'_1	q'_2	b
q'_1	4	3	2	1	0	1
q'_2	2	4	5	0	1	1
Kritérium	-1	-1	-1	0	0	0
Proměnné	q_1	q_2	q_3	q'_1	q'_2	b
q_1	1	3/4	1/2	1/4	0	1/4
q'_2	0	5/2	4	-1/2	1	1/2
Kritérium	0	-1/4	-1/2	1/4	0	1/4
Proměnné	q_1	q_2	q_3	q'_1	q'_2	b
q_1	1	7/16	0	5/16	-1/8	3/16
q_3	0	5/8	1	-1/8	1/4	1/8
Kritérium	0	1/16	0	3/16	1/8	5/16

Vzhledem k tomu, že v posledním řádku tabulky jsou koeficienty proměnných nezáporné, úloha má jediné optimální řešení. Z tabulky č.1 lze číst toto řešení primární úlohy.

$q_1 = \frac{3}{16}$, $q_2 = 0$, $q_3 = \frac{1}{8}$, optimální hodnota kriteriální funkce (cena hry) je $\frac{1}{v+c} = \frac{5}{16}$.

Úloha duální má v tabulce č.1 řešení

$p_1 = \frac{3}{16}$, $p_2 = \frac{1}{8}$, optimální hodnota kriteriální funkce je znovu $\frac{1}{v+c} = \frac{5}{16}$.

Dosazením do vztahů (2.13) a (2.17), které můžeme upravit na tvar

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= p_i (v+c) \\ \bar{y}_j &= q_j (v+c) \end{aligned} \qquad \text{pro } i = \{1,2,...,m\} \text{ a } j = \{1,2,...,n\}$$

získáme tyto rovnovážné strategie

$\bar{x} = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, $\bar{y} = (\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$ a cena hry v (snížena o konstantu c, která byla přičtena k původní matici) je v tomto příkladě rovna 1/5.

Konečné výsledky je možno interpretovat např. tímto způsobem. Hráč 1 volí s pravděpodobností $\bar{x}_1 = 3/5$ strategii č.1 a s pravděpodobností 2/5 strategii číslo 2. Podobným způsobem je tomu u hráče 2. Při těchto optimálních strategiích je cena hry v = 1/5. Výpočet této úlohy pomocí MATLABu je znázorněn v příloze P VI.

3 NEANTAGONISTICKÉ HRY DVOU HRÁČŮ

Mnohem častěji, než s hrami typu antagonistického konfliktu, se v praxi setkáváme se situacemi, v níž zájmy jednotlivých účastníků nejsou v přímém rozporu (výhra jednoho hráče není rovna přímé prohře protihráče). Dále pokud se hráč odkloní od své optimální strategie, může citelně poškodit svého protihráče i za cenu snížení své výhry. Konflikt, který má tyto charakteristické rysy, nazýváme neantagonistickým.

Matematickým modelem neantagonistického konfliktu je podle [8] hra dvou hráčů s nekonstantním součtem ve tvaru

$$\{Q = \{1, 2\}\ ; X, Y; \mathrm{M}_1(x, y); \mathrm{M}_2(x, y)\}\ , \tag{3.1}$$

kde $\mathrm{M}_1(x, y) + \mathrm{M}_2(x, y) \neq konst$.

V těchto případech dále rozlišujeme dvě možné situace, kdy je a není možná dohoda s protivníkem. Toto dělení se týká:

- **nekooperativní teorie**
- **kooperativní teorie** (hry s přenosnou a nepřenosnou výhrou)

Protože lze model konečného neantagonistického konfliktu charakterizovat pomocí dvou matic, nazývají se tyto hry **dvojmaticové**.

3.1 Dvojmaticové hry

Jelikož platí (3.1) a nelze odvodit výhru jednoho hráče z výhry hráče druhého, je nutné definovat pro každého hráče samostatnou matici výher. Tyto hry s konečným počtem strategií a dvěma hráči se nazývají dvojmaticové. Uvažujme matice A a B, které určují výplatní funkce prvého a druhého hráče

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} .$$

Uvedené matice lze zapsat následující formou

$$\begin{pmatrix} a_{11},b_{11} & a_{12},b_{12} & \dots & a_{1n},b_{1n} \\ a_{21},b_{21} & a_{22},b_{22} & \dots & a_{2n},b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1},b_{m1} & a_{m2},b_{m2} & \dots & a_{mn},b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

přičemž první hráč volí *i*-tou strategii a druhý hráč *j*-tou strategii. Výhrou prvního hráče je hodnota a_{ij} a v případě hráče druhého je rovna b_{ij}.

3.1.1 Rovnovážná řešení v ryzích strategiích

Proces hledání rovnovážného bodu je podobný jako v případě jednomaticové hry. U dvojmaticových her však uvažujeme výplatní matice obou hráčů. K nalezení rovnovážného bodu napomůže následující definice

Definice 3.1 Nechť je dána hra dvou hráčů s nekonstantním součtem

$$\{Q = \{1, 2\} \,;\, X, Y; \mathrm{M}_1(x, y); \mathrm{M}_2(x, y)\}\ ,$$

Dvojici strategií $\bar{x},\bar{y}$ nazveme **rovnovážným bodem** této hry, jestliže platí současně obě nerovnice

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1(x,\bar{y}) &\le \mathrm{M}_1(\bar{x},\bar{y}) \\ \mathrm{M}_2(\bar{x},y) &\le \mathrm{M}_2(\bar{x},\bar{y}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

pro všechna $x \in X$ a $y \in Y$. Strategie $\bar{x}$ se nazývá *rovnovážná strategie* hráče prvního a $\bar{y}$ se nazývá *rovnovážná strategie* hráče druhého.

Podle [14] se snadno ověří, že je-li $\bar{x},\bar{y}$ rovnovážný bod, pak

- a_{ij} je **největší prvek ve sloupci** *j* matice A: $a_{ij} = \max\limits_{1 \le k \le m} a_{kj}$
- b_{ij} je **největší prvek v řádku** *i* matice B: $b_{ij} = \max\limits_{1 \le k \le m} b_{kj}$.

Jinými slovy, rovnovážné řešení v ryzích strategiích se snažíme nalézt tak, že v matici A označíme všechna sloupcová maxima a v matici B všechna řádková maxima. Pokud určitá dvojice prvků dvojmatice je označena prvním i druhým hráčem, jde o rovnovážné řešení.

Podle [3] mohou při řešení dvojmaticových her nastat následující případy pro rovnovážná řešení v ryzích strategiích (viz následující příklad 3.1)

- existuje jediné Nashovo rovnovážné řešení v ryzích strategiích, které poskytuje návod k volbě optimálního jednání pro oba hráče (příklad 3.1 - případ č.1).
- existuje více rovnovážných řešení, jedno z rovnovážných řešení je však pro oba hráče výhodnější než ostatní rovnovážná řešení (lépe řečeno dané rovnovážné řešení dominuje ostatní řešení). Hráči tedy zvolí pro sebe nejvýhodnější řešení (příklad 3.1 - případ č.2).
- existuje více rovnovážných řešení, nastává však problém v tom smyslu, že hráči se neshodnou, které rovnovážné řešení zvolit, neboť každý hráč preferuje jiné rovnovážné řešení (příklad 3.1 - případ č.3).
- neexistuje rovnovážné řešení v ryzích strategiích (příklad 3.1 - případ č.4).

Příklad 3.1 Nalezněte Nashovy rovnovážné ryzí strategie u dvojmaticových her[14]

Řešení: Sloupcová maxima levé matice označíme vždy kulatými závorkami a řádková maxima v pravé matici označíme hranatými závorkami.

1) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} (3); [5] & (4); 2 \\ -2; [7] & 2; 1 \end{pmatrix}$$

2) $$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} (7); [9] & -2; 1 \\ -2; 0 & (6); [4] \end{pmatrix}$$

3) $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} (3); [9] & -2; 1 \\ -2; 0 & (6); [4] \end{pmatrix}$$

4) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 3; [5] & (2); -1 \\ (4); 1 & -2; [5] \end{pmatrix}$$

3.1.2 Smíšené rozšíření dvojmaticové hry

Pokud neexistuje Nashovo rovnovážné řešení v ryzích strategiích (příklad 3.1 - případ č.4), využijeme opět smíšeného rozšíření, podobně jako tomu bylo u jednomaticových her.

[14] Uvedený příklad je možné řešit i pomocí autorem vytvořené aplikace v MATLABu (viz příloha P IV). Vytvořený algoritmus bere v úvahu všechny možné případy, které mohou při řešení nastat.

Tento přístup nám zaručí nalezení alespoň jedné dvojice rovnovážných strategií pomocí následující definice.

Definice 3.2 Hru dvou hráčů s prostory strategií

$$X^{S} = \left\{ x;\ x^{T} = \left[x_1, x_2, \ldots, x_m \right],\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x \geq 0 \right\},$$
$$Y^{S} = \left\{ y;\ y^{T} = \left[y_1, y_2, \ldots, y_n \right],\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y \geq 0 \right\} \tag{3.4}$$

a s výplatními funkcemi

$$M_1^{S}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x^{T}\mathrm{A}y,$$
$$M_2^{S}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x^{T}\mathrm{B}y \tag{3.5}$$

nazýváme *smíšené rozšíření dvojmaticové hry*. Pokud je snahou nalézt řešení této hry, úlohu lze formulovat jako hledání optimálního řešení úlohy nelineárního programování[15]. To znamená **maximalizovat**

$$p^{T}(\mathrm{A}+\mathrm{B})q\ -\ e^{T}p\ -\ f^{T}q$$

za podmínek

$$\mathrm{A}q \leq e, \quad \mathrm{B}^{T}p \leq f, \quad p, q \geq 0\ .$$

A a **B** jsou matice obou hráčů o rozměrech m x n (upraveny tak, aby všechny prvky byly kladné). Dále ***p*** a ***q*** jsou vektory o m a n proměnných, **e** a **f** jsou vektory složené z m a n jedniček a **0** jsou relevantní nulové vektory. Výsledné rovnovážné strategie

$$\overline{x} = \frac{\overline{p}}{e^{T}\overline{p}},\quad \overline{y} = \frac{\overline{q}}{f^{T}\overline{q}}$$

nalezneme po provedení zpětných transformací podobně jako u jednomaticových her (viz příklad 2.3).

[15] Podrobnější výklad nelineárního programování v rámci teorie her, včetně uvedení příkladů nalezneme např. v [8].

3.2 Nekooperativní teorie

Nekooperativní hry jsou typické tím, že není možné např. buď ze zákona, nebo už z principu uzavírat možné dohody s protivníkem. Stejně jako u her s konstantním součtem se hledalo optimální řešení, i v tomto případě se snažíme nalézt optimální řešení - Nashův rovnovážný bod. Matematickým modelem je **dvojmaticová hra**.

3.2.1 Manželský spor

Tento modelový konflikt (uvedený např. v [3]) je spojen s manželi, kteří se dohodli na společně stráveném večeru ve městě. Muž preferuje návštěvu fotbalového zápasu, zatímco jeho manželka trávení času po nákupech. Předpokládejme, že nyní jsou v práci a potkají se až večer, přičemž se rozhoduje každý samostatně. Každý z manželů obdrží jednu jednotku užitku tím, že stráví večer společně a další jednotku může každý z nich navíc získat tím, když bude zvolen vlastní program, který dotyčný preferuje. Pokud manželé stráví večer osamoceně, jejich užitky budou patrně nulové. Konflikt takto popsaný, lze definovat následující maticí

Manželka

$$\text{Manžel} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \textit{kopaná} & \textit{nákupy} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{kopaná} \\ \textit{nákupy} \end{array} & \begin{pmatrix} (2),[1] & 0,0 \\ 0,0 & (1),[2] \end{pmatrix} \end{array}$$

Tento konflikt je charakteristický tím, že existuje více rovnovážných řešení, z nichž žádné není dominující, resp. nikdo z toho páru nezná výběr nejvhodnějšího řešení. Manželka bude (teoreticky) upřednostňovat nákupy, proto volí druhý sloupec a naopak manžel bude volit první řádek. Tímto způsobem ale dostaneme řešení $(0,0)$, které není výhodné ani pro jednoho „hráče“.

3.2.2 Vězňovo dilema

Tento známý konflikt se týká dvou hráčů (vězňů), jež mají být potrestáni za společně spáchaný zločin. Každý z nich přitom odděleně musí přiznat (P), či nepřiznat (NP) svou vinu. Tímto mají ovšem možnost určité spolupráce, naopak i vzájemné zrady a ovlivnit tak výši svého trestu, na základě svého rozhodnutí. Situace je následující. Pokud se oba nepřiznají, nebudou plně usvědčeni, a tak dostanou menší trest, než kdyby se oba přiznali a tím na sebe poskytli důkazy. Jestliže, se jeden z vězňů přizná a druhý nikoliv, je prvnímu vězni udělen nižší trest za určitou „pomoc“ při vyšetřování. Druhému je naopak udělen vyšší trest. Konflikt tohoto typu může být zadán např. touto maticí[16]

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & NP \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ NP \end{array} & \begin{pmatrix} (-3),[-3] & (-1),-4 \\ -4,[-1] & -2,-2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

V takto zadané matici jsou uvedena řádková a sloupcová maxima podle vztahu (3.3), určující Nashovu rovnováhu v ryzích strategiích. Oba hráči tedy budou volit strategii přiznat (P). Zvláštností ovšem je, že rovnovážné řešení s výplatami (-3,-3) je horší, než řešení (-2,2). Takovéto řešení nesplňuje podmínku Nashovy rovnováhy, neboť změnou strategie si hráč může polepšit (lze docílit snížení trestu na jeden rok, přičemž druhý hráč bude odsouzen na čtyři roky). Nashovo rovnovážné řešení je tedy rovnovážné, ale nikoliv paretovsky efektivní, neboť výběrem strategie nepřiznat (NP) by oba hráči získali.

V příloze VII je proveden výpočet této úlohy pomocí MATLABu, který uvažuje všechny možné případy, které mohou v této konfliktní situaci nastat.

Opakované vězňovo dilema

Odlišná situace může vzniknout, v případě, že se jedná o tzv. iterované (opakované) vězňovo dilema, což je hra, která se hraje opakovaně. Zde má hráč šanci „potrestat“ protivníka za předchozí nekooperativní hru. V tomto případě racionální strategií může být spolupráce. U her tohoto typu se ukazuje, že pokud počet opakovaných her roste k nekonečnu, tím více se Nashova rovnováha blíží k Paretovu optimu.

Závěrem lze říci, že pokud hráči uvažují krátkodobě a sledují jen svůj zájem bez zohlednění druhé strany, potom se bude každý z hráčů chovat nekooperativně (udá protihráče). Naproti tomu u opakované hry je tomu opačně, hráčům se vyplatí kooperovat.

Pro lepší přehled jsou podle [14] v následující tabulce č.2 uvedeny příklady možných strategií hráčů v opakovaném vězňovu dilema.

[16] Léta strávená ve vězení mají logicky záporný užitek, proto jsou v této matici uvedena záporná čísla.

Tabulka č. 2 - příklady strategií v opakovaném vězňovu dilema

Strategie	Popis
Vždy spolupracuje	Vždy spolupracuje.
Vždy zradí	Vždy zradí.
Nevraživec	Spolupracuje, dokud jej protihráč nezradí, poté vždy zrazuje (neodpouští).
Půjčka za oplátku	V prvním tahu spolupracuje, v dalších opakuje tah protihráče (zradí-li v jednom kole protihráč, v kole následujícím půjčka za oplátku zradí, na spolupráci odpoví v následujícím kole spoluprací).
Podezíravá půjčka za oplátku	V prvním kole zradí, v dalších se chová jako půjčka za oplátku - opakuje předchozí tah protihráče.
Naivní pokušitel	Jako půjčka za oplátku, ale občas zradí (např. náhodně, v průměru jednou za 10 tahů).
Kajícný pokušitel	Jako naivní pokušitel, ale snaží se o ukončení cyklu S-Z způsobeného vlastní zradou - na zradu, která následuje jako odpověď na jeho vlastní nespravedlivou zradu, jednou zareaguje spoluprací.
Nelítostná půjčka za oplátku	Spolupráce s výjimkou situace, kdy protivník zradil alespoň jednou v posledních dvou kolech.
Postupná	Spolupracuje, dokud protivník nezradí. Potom po první zradě jednou zradí a dvakrát spolupracuje, po druhé zradě dvakrát po sobě zradí a dvakrát spolupracuje, …, po *n*-té zradě *n*-krát po sobě zradí a dvakrát spolupracuje, atd.
Postupný zabiják	V prvních pěti kolech zradí, pak dvakrát spolupracuje. Jestliže protivník v 6. a 7. kole zradí, pak postupný zabiják zůstane vždy u zrady, v opačném případě vždy spolupracuje.
Nelítostná půjčka za dvě oplátky	Spolupracuje kromě případu, kdy protivník zradil alespoň dvakrát po sobě v posledních třech kolech.
Něžná půjčka za dvě oplátky	Spolupracuje kromě případu, kdy protivník zradil ve dvou po sobě jdoucích kolech.

3.3 Kooperativní teorie

Jak již bylo řečeno v úvodní kapitole, kooperativní teorie je spojena s hrami, kde je možnost před začátkem hry uzavřít dohodu o volbě strategií. Hráči mohou, ale nemusí spolupracovat. Racionální hráči však budou spolupracovat, pokud to pro ně bude výhodné, resp. ve výsledku získají více, než kdyby nespolupracovali.

3.3.1 Hry s přenosnou výhrou

Kooperativní hry s přenosnou výhrou jsou typické v konfliktních situacích, kdy hráči mohou před začátkem hry uzavírat smlouvy o vzájemné spolupráci a taktéž se dohodnout na případném přerozdělení výhry.

Při řešení her tohoto typu se můžeme setkat s otázkami typu

- kdy uzavírat dohodu?
- na jakých strategiích se dohodnout?
- jakým způsobem přerozdělit výhru?

Označme zaručenou výhru hráče 1, která nemůže být protihráčem ohrožena

$$v(1) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \mathrm{M}_1(x,y).$$

Stejným způsobem vypočteme pro hráče 2 jeho zaručenou výhru vztahem

$$v(2) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \mathrm{M}_2(x,y).$$

Jinak řečeno, hledáme výhry plynoucí z Nashových rovnovážných strategií jako v případě hry jednomaticové.

Celkovou částku výhry, která je díky vzniklé spoluprácí možná definujeme podle [8] jako

$$v(1,2) = \max_{x \in X,\, y \in Y} \left\{ \mathrm{M}_1(x,y) + \mathrm{M}_2(x,y) \right\}. \tag{3.6}$$

Sečteme tedy obě matice hráčů a v takto nově vzniklé matici nalezneme maximum.

Hráči se rozhodnou pro uzavření dohody o spolupráci v situaci, kdy bude platit

$$v(1,2) > v(1) + v(2). \tag{3.7}$$

V tomto okamžiku[17] se vyplatí spolupracovat, jelikož každý z hráčů obdrží svou zaručenou výhru a navíc si mezi sebe rozdělí částku vzniklou vzájemnou spoluprácí. Nyní se naskýtá otázka, jakým způsobem bude celková částka $v(1, 2)$ přerozdělena.

Definujme nejprve a_1 jako částku, kterou získá hráč 1 ze společné výhry $v(1, 2)$, a podobně označme částku a_2, kterou obdrží hráč 2. **Rozdělením**[18] budeme nazývat dvojici částek a_1, a_2, pro něž platí

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 = v(1, 2) \\ &a_1 \geq v(1), \quad a_2 \geq v(2). \end{aligned} \tag{3.8}$$

První řádek vztahu (3.8) stanovuje, že při dělení si hráči musí rozdělit celou společnou výhru. Druhý řádek říká, že každý z hráčů musí obdržet nejméně tolik, kolik by získal, pokud by v dané hře nespolupracoval.

Pomocí definovaného rozdělení lze nyní přistoupit k uvedení způsobů, pomocí nichž je možno částku rozdělit. V literatuře se nejvíce vyskytují tyto nejčastější alternativy rozdělení

- spravedlivé: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{(v(1,2) - v(2))}{(v(1,2) - v(1))}$
- optimální: $\begin{aligned} &\overline{a}_1 = v(1) + (v(1,2) - v(1) - v(2))/2 \\ &\overline{a}_2 = v(2) + (v(1,2) - v(1) - v(2))/2\,. \end{aligned}$ (3.9)

Optimální[19] rozdělení lze interpretovat tak, že každý si ponechá to, co může sám získat a zbytek společné výhry $v(1,2) - v(1) - v(2)$ si rozdělí rovným dílem.

Příklad 3.2 Vyřešte následující konflikt zadaný dvojmaticí s hodnotami výplatních funkcí

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 6;10 & 8;5 & 3;2 \\ 1;3 & 5;6 & 6;6 \\ 0;0 & 15;4 & 5;5 \end{pmatrix}$$

---

[17] Hra, v níž platí (3.7) se nazývá *podstatná*. Pokud neplatí, označujeme ji jako *nepodstatnou*.

[18] Množinu všech rozdělení (a1, a2), která splňují vztah (3.8) definují tzv. jádro hry. Podrobnější vysvětlení nalezneme např. v [3].

[19] Čísla $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ představují těžiště jádra dané hry.

Řešení: Matice pro jednotlivé hráče jsou

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zaručené výhry obou hráčů vyřešíme níže uvedeným způsobem

$$v(1) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} M_1(x,y) = \max_x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$
$$v(2) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} M_2(x,y) = \max_y \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

Pomocí vztahu (3.6) zjistíme, že maximální společná výhra $v(1,2) = 19$ a tedy optimální strategie $(\overline{x}, \overline{y})$ je rovna (3,2). Hra je v tomto příkladu podle (3.7) podstatná a má smysl uzavírat smlouvu. Hráči si např. podle optimálního rozdělení (3.9) rozdělí celkovou výhru tímto způsobem

$$\overline{a}_1 = 3 + (19 - 3 - 4)/2 = 9$$
$$\overline{a}_2 = 4 + (19 - 3 - 4)/2 = 10.$$

Výpočet tohoto příkladu pomocí MATLABu je zobrazen v příloze P VIII.

3.3.2 Hry s nepřenosnou výhrou

U her s nepřenosnou výhrou vycházíme ze situací, kdy není možné přerozdělení výhry, avšak lze uzavřít dohodu o volbě strategií. Tyto situace se vyskytují v okamžiku, kdy je možné legálním způsobem smlouvu uzavřít, ale rozdělit si částku už legální není. Stejně tak se to týká konfliktů, kdy není z principu možné se o získanou částku rozdělit. Např. při uzavírání smlouvy o omezení zbrojení je těžko představitelné, aby jeden stát v době míru platil potenciálnímu nepříteli odškodné za to, že nebude zbrojit.

V rámci kooperativní teorie s nepřenosnou výhrou nás zajímají dvě otázky

- v kterých případech má smysl uzavírat smlouvu o volbě strategií?
- k jakým strategiím se mají hráči zavázat v případě, že smlouva bude uzavřena?

U her tohoto typu, na rozdíl od kooperativních her s přenosnou výhrou, sledujeme výhry $v(1), v(2)$ každého hráče odděleně, neboť nemá smysl sledovat společnou výhru $v(1,2)$. V dalším nám napomůže následující definice uvedená v [8]

Definice 3.3 Mějme hru $\{Q=\{1,2\}; X, Y;\ \mathrm{M}_1(x,y),\ \mathrm{M}_2(x,y)\}$. Dvojici čísel $\left[a_1, a_2\right]$ nazveme **dosažitelným rozdělením**, pokud $a_1 \geq v(1),\ a_2 \geq v(2)$ a jestliže současně existují strategie $x \in X, y \in Y$ tak, že $\mathrm{M}_1 = (x,y),\ \mathrm{M}_2 = (x,y)$. Všechna tato rozdělení, resp. množinu budeme označovat D. (3.10)

Existuje-li v této množině alespoň jeden prvek $\left[a_1, a_2\right]$ s takovou vlastností, že

$$\left[a_1, a_2\right] \geq \left[v(1), v(2)\right], \tag{3.11}$$

je alespoň pro jednoho z hráčů výhodné uzavřít smlouvu k získání výhry větší než $v(1)$ nebo $v(2)$. Snadno se přesvědčíme např. v [8], že v množině D může nastat případ, kdy existuje více prvků vyhovující vztahu (3.11). V tomto případě se pak snažíme vyloučit ty strategie, které vedou k dosažitelným rozdělením nevyhovující principu nedominovanosti. Tento problém nám usnadní vyřešit následující definice.

Definice 3.4 Dosažitelné rozdělení $\left[b_1, b_2\right] \in D$ nazveme **paretovským rozdělením**[20], pokud neexistuje rozdělení $\left[a_1, a_2\right] \in D$ s takovou vlastností $a_1 \geq b_1$ a $a_2 > b_2$ nebo $a_1 > b_1$ a $a_2 \geq b_2$. Množinu všech těchto paretovských rozdělení označíme jako P. (3.12)

Podobně jako v předchozím případě, kde byla uvedena definice dosažitelného rozdělení, můžeme se i zde setkat s případy, kdy hra má paretovských rozdělení více. Pokud by hra disponovala jediným prvkem na množině P, bude řešení hry zřejmé. Zaveďme proto další definici.

Definice 3.5 Nechť $\bar{b} = \left[\bar{b}_1,\ \bar{b}_2\right]$ je **střední hodnota** rozložení pravděpodobností s nejmenším obsahem informace na množině P (pokud existuje). Rozdělení $\bar{a} = \left[\bar{a}_1,\ \bar{a}_2\right] \in P$ nazveme optimálním, jestliže má vlastnost

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \min_{a \in P} \rho(a, \bar{b}), \tag{3.13}$$

[20] V literatuře se značí i jako nedominované rozdělení.

kde ρ je (euklidovská) metrika v E2. Optimálními strategiemi nazveme ty strategie $\bar{x} \in X, \bar{y} \in Y$, pro které platí $a_1 = \mathrm{M}_1(\bar{x}, \bar{y}),\ a_2 = \mathrm{M}_2(\bar{x}, \bar{y})$.

Příklad 3.3 Nalezněte optimální strategie, pokud je hra zadána následující maticí, přičemž předpokládáme kooperativní hru s nepřenosnou výhrou

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 100;70 & 170;190 & 160;70 \\ 270;150 & 150;120 & 280;140 \\ 90;150 & 80;130 & 50;30 \end{pmatrix}.$$

Řešení: V této hře je $v(1) = 150$ a $v(2) = 120$. Množina *D* všech dosažitelných rozděleních je rovna podle (3.10) $\{(170, 190); (270, 150); (150, 120); (280, 140)\}$. V dalším kroku nalezneme podle (3.12) paretovskou množinu, která obsahuje rozdělení $\{(170, 190); (270, 150); (280, 140)\}$. Snadno ověříme, že střední hodnota $\bar{b}$ je $(240, 160)$ a podle (3.13) zjistíme, že nejbližším rozdělením ke střední hodnotě je rozdělení $\bar{a} = (270, 150)$. Hráč 1 tedy získá výhru rovnu 270 a hráč 2 získá výhru rovnou 150.

Výpočet tohoto příkladu pomocí MATLABu je zobrazen v příloze P IX.

4 KONFLIKT *N* HRÁČŮ

Ve chvíli, kdy budeme uvažovat v rámci teorie her účast většího počtu hráčů, naskýtá se otázka možnosti tvorby **koalic** hráčů, jakožto základního pojmu v oblasti konfliktu *N* hráčů, která zároveň souvisí s **koaliční strukturou** (viz dále). V mnoha případech se oblast konfliktu *N* hráčů stává významnou, neboť tato problematika je pro praxi velmi významná, i když by zasloužila větší prostor pro její hlubší rozpracování.

4.1 Koalice

Koalicemi chápeme skupiny hráčů, kde hráči spolupracují při volbě svých strategií, stejně tak při přerozdělování svých výher. V tomto směru mohou nastat dva extrémy - všichni zúčastnění hráči v rámci jedné koalici tvoří jednu velkou koalici. V opačném případě, kdy hráč nevstoupí do žádné koalice, rozumíme koalici jednoprvkovou.

Celkově lze ve hře tohoto typu s N hráči utvořit celkový počet $2^N - 1$ koalic[21], přičemž jeden hráč může být členem v $2^{N-1} - 1$ různých koalicích. [8]

4.2 Koaliční struktura

Množinu všech koalic, kterou lze v dané situaci utvořit nazýváme **koaliční strukturou**. Např. struktura $(\{2,4\},\{3,1\},\{5\})$ znamená, že kooperují hráči 2 a 4, dále hráči 3 a 1, hráč 5 však jedná samostatně. Koaliční struktura může nabýt podle možností těchto forem

- volná disjunktní koaliční struktura
- volná nedisjunktní koaliční struktura
- fixovaná koaliční struktura

Hry s volnou disjunktní koaliční strukturou jsou takové struktury, které jsou složené z koalic, v nichž se každý hráč vyskytuje právě jednou. Volné nedisjunktní koaliční struktury jsou význačné tím, že připouštějí účast hráče současně ve více koalicích. Poslední, fixovaná koaliční struktura, se týká her, kde jsou přípustné pouze disjunktní koaliční struktury složené z $(N-1)$- prvkových a jednoprvkových koalic tak, že v každé struktuře se vyskytuje právě jedna $(N-1)$ - prvková koalice a jedna jednoprvková koalice.

[21] $2^N - 1$, protože prázdnou množinu nepočítáme.

Pro oblast konfliktu N hráčů jsou nejlépe rozpracovány hry s volnou disjunktní koaliční strukturou, neboť např. pro hry s volnými nedisjunktními koalicemi je obtížné specifikovat chování hráče v různých koalicích, ve kterých je členem. V dalším textu proto bude práce výhradně omezena na volnou disjunktní koaliční strukturu.

4.3 Typy modelů

Pokud se zaměříme na možné formy zápisu matematického modelu konfliktu N hráčů, lze vycházet z následujících způsobů

- hry v normálním tvaru
- hry ve tvaru charakteristické funkce

4.3.1 Hry v normálním tvaru

Matematickým modelem konfliktu N účastníků v normálním tvaru je hra[22]

$$\left\{Q=\{1,2,...,N\};\; X_1, X_2, ..., X_N;\; \mathrm{M}_1(x_1, x_2, ..., x_N), ..., \mathrm{M}_2(x_1, x_2, ..., x_N)\right\},$$

kde Q je množina hráčů $\{1,2,...N\}$, $N>2$. Množiny strategií hráčů sestávají z X_i pro $i \in Q$, přičemž strategie i-tého hráče jsou $x_i \in X_i$. Soubor strategií zvolenými všemi hráči je $x=\{x_1, ..., x_i, ..., x_N\}$. Kartézský součin množin strategií definuje množinu všech možných výsledků jako $\mathrm{X}=\prod_{i\in Q} X_i$. Hráči v této hře disponují výplatními funkcemi $\mathrm{M}_i(x)$ podobně jako v předchozích případech. [14]

Při modelování kooperativních her je v mnoha případech výhodné přejít od hry v normálním tvaru k tzv. hře ve tvaru charakteristické funkce.

4.3.2 Hry ve tvaru charakteristické funkce

Charakteristická funkce hry je reálná funkce v definovaná na množině všech koalic. Přiřazuje všem podmnožinám (koalicím) jistou hodnotu v, která je rovna jejich výhře. Na charakteristickou funkci jsou kladeny omezení, z nichž nejvýznamnější je podmínka tzv. superaditivnosti, která je uvedena v následující shrnující definici podle [8] .

[22] Předpokládáme, že všichni účastníci jsou inteligentními hráči, kteří se snaží maximalizovat svou výhru a každý účastník zná závislost mezi vlastní strategií a strategiemi ostatních účastníků a také efektem, který získá volbou své strategie.

Definice 4.1 Nechť $v(K)$ je reálná funkce definovaná na množině všech koalic, které lze vytvořit z koalice všech hráčů $Q = \{1, 2, ..., N\}$. Jestliže pro každé dvě disjunktní koalice K a L platí

$$v(K) + v(L) \leq v(K \cup L), \tag{4.1}$$

nazývá se funkce v **superaditivní**. Hodnoty charakteristické funkce udávají sílu jednotlivých koalic. Jestliže místo (4.1) platí pro každé dvě disjunktní koalice K a L rovnost $v(K) + v(L) = v(K \cup L)$, nazývá se funkce v **aditivní**. Hry se superaditivní funkcí se nazývají *podstatné*, v opačném případě jsou *nepodstatné*.

Jinými slovy, při vytvoření větší koalice je výhra větší nebo rovna součtu výher menších koalic[23].

Podobně jako v předchozích dvou kapitolách i zde můžeme zavést pojem hry s konstantním součtem.

Definice 4.2 Hru zadanou charakteristickou funkcí v nazveme *hrou s konstantním součtem*, jestliže pro každou koaliční strukturu $(K_1, K_2, ..., K_r)$ platí

$$v(K_1) + v(K_2) + ... + v(K_r) = konst \quad (= v(Q)).$$

Ukázkovým příkladem hry s konstantním součtem, kterou nalezneme např. v [3] může být volební hra, ve které vítězná (vládnoucí) koalice získává výhru označenou symbolicky 1 a poražená koalice získává výhru -1.

4.4 Formování koalic a rozdělení výher

Základním úkolem konfliktních situací N hráčů je snaha nalézt odpověď na tyty otázky

- jakou koaliční strukturu budou racionálně se chovající hráči prosazovat?
- jak si hráči uvnitř realizovaných koalic rozdělí získanou výhru?

Aby bylo možné odpovědět na tyto otázky, je nejprve nutné definovat základní dva principy, které je nutné v těchto hrách sledovat, neboť porušení jakéhokoliv principu může ohrozit zájmy účastníků kooperativní rozhodovací situace. Hovoříme o principu

[23] Na tomto místě je vhodné podotknout, že podmínka superaditivnosti nemusí být v praktických situacích vždy splněna (např. spojení všech tří hráčů nemusí být přínosná, jako spojení dvou hráčů vůči zbývajícímu třetímu).

- kolektivní racionality
- skupinové stability

Rovněž je nutné pro popsání konečného rozdělení výher zavedení vektoru rozdělení výher $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, kde a_i je částka, kterou obdrží i-tý hráč. Výhra každého hráče se odvíjí jednak od celkové výhry koalice, v níž je hráč členem, tak i od způsobu přerozdělení výhry uvnitř koalice.

4.4.1 Princip kolektivní racionality

Tento princip[24] vyjadřuje zájem na maximalizaci výhry samotné koalice, která je poté k dispozici pro další přerozdělení, a od něhož se odvíjí proces formování koaliční struktury. Ten je takový, že v první fázi bychom měli sestavit koalici s nejvyšší celkovou výhrou. Pokud se v koalici nacházejí všichni hráči (K = Q), celý proces je u konce. V opačném případě je druhým krokem opět sestavení koalice s nejvyšší výhrou, přičemž k dispozici jsou hráči, kteří netvoří koalici z prvního kroku. Tímto způsobem se postupuje tak dlouho, dokud se nevytvoří plnohodnotná koaliční struktura např. $(K_1, K_2, ..., K_r)$ s vlastností $K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_r = Q$.

4.4.2 Princip skupinové stability

Samotná podmínka kolektivní racionality nestačí k tomu, aby byla plně definována přijatelná rozdělení a. K tomu je potřeba ještě splnění následujících podmínek

$$\underset{i \in K}{a_i} = v(K) \tag{4.2}$$

$$\sum_{i \in L} a_i \geq v(L), \quad L \in K. \tag{4.3}$$

Podmínka (4.2) definuje rozdělení celé výhry koalice mezi jednotlivé hráče. Druhá nerovnice zajišťuje to, že každá podkoalice L (např. i samotný hráč) musí obdržet při dělení výhry koalice K takovou částku, kterou podkoalice L může získat vystoupením z koalice K. [3]

[24] Aplikace tohoto principu je uvedena v příkladě 4.1.

4.4.3 Jádro kooperativní hry

Podobně jako u kooperativních her 2 hráčů s přenosnou výhrou, i v těchto hrách uvažujeme jádro hry, které je významné pro rozdělení výher pro jednotlivé účastníky konfliktní situace. K tomu napomůže následující definice

Definice 4.3 Množinu rozdělení a, která splňuje všechny podmínky (4.2) a (4.3), nazveme *jádrem hry* zadané charakteristickou funkcí v. Jestliže podmínky (4.2) a (4.3) nesplňuje žádné rozdělení, řekneme, že jádro hry je *prázdné*.

Matematicky je jádro hry vyjádřeno jako množina všech řešení jedné rovnice a soustavy nerovností (množina rozdělení výher a). Díky lineární algebře je známo, že takováto množina, je-li omezená, tvoří konvexní polyedr. Její libovolný prvek lze vyjádřit jako konvexní kombinaci konečného počtu krajních bodů této množiny. Tím, že nalezneme krajní body, je jádro plně určeno (viz následující obrázek č.3).

Při řešení konfliktních situací N hráčů mohou nastat případy, kdy v ustavující koaliční struktuře vznikají koalice, které nejsou určeny jednoznačně (charakteristická funkce nabývá shodných hodnot pro více koalic). Za těchto okolností jsou další možnosti závislé na tom, zda hra splňuje podmínky kolektivní racionality a skupinové stability. Pokud hra obě podmínky splňuje, potom má hra více jader (viz příklad 4.1), v opačném případě je jádro hry prázdné.

Pro lepší představu jsou uvedeny následující dva příklady ukazující řešení konfliktní situace a její rozdělení a.

Příklad 4.1 Nalezněte jádro hry s charakteristickou funkcí

$$\begin{aligned}
&v\left(\{1,2,3\}\right)=0\ ,\\
&v\left(\{1,2\}\right)=v\left(\{1,3\}\right)=v\left(\{2,3\}\right)=1\ ,\\
&v\left(\{1\}\right)=v\left(\{2\}\right)=v\left(\{3\}\right)=-1\ .
\end{aligned}$$

Řešení: Vzhledem k principu kolektivní racionality množina všech hráčů Q nedisponuje maximální výhrou. Výpočet jádra lze odvodit pouze z koaličních struktur $\left(\{1,2\},\{3\}\right)$, $\left(\{1,3\},\{2\}\right)$ nebo $\left(\{2,3\},\{1\}\right)$. Řešením hry jsou tři jádra, která dostaneme jako řešení soustav podmínek (4.2) a (4.3), konkrétně

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_1 \geq -1\,, \quad a_2 \geq -1\,;$$
$$a_1 + a_3 = 1, \quad a_1 \geq -1\,, \quad a_3 \geq -1\,;$$
$$a_2 + a_3 = 1, \quad a_2 \geq -1\,, \quad a_3 \geq -1\,.$$

Příklad 4.2 Nalezněte jádro hry s charakteristickou funkcí

$$v\left(\{1,2,3\}\right) = 2\,,$$
$$v\left(\{1,2\}\right) = v\left(\{1,3\}\right) = v\left(\{2,3\}\right) = 1\,,$$
$$v\left(\{1\}\right) = v\left(\{2\}\right) = v\left(\{3\}\right) = 0\,.$$

Řešení: Všechny možné rozdělení hry dostaneme na základě podmínek (4.2) a (4.3), tedy pomocí následující soustavy rovnice a šesti nerovností

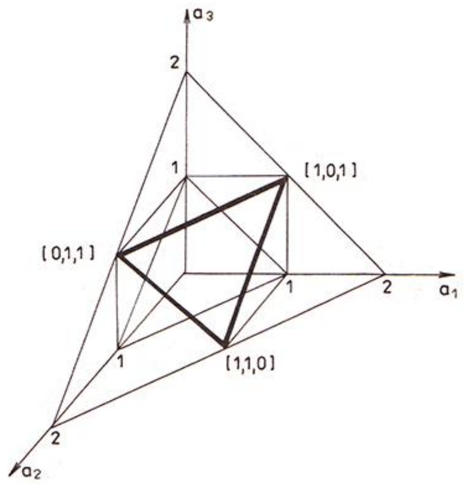
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 2\,, \\ a_1 + a_2 \phantom{{}+a_3} &\geq 1\,, \\ a_1 \phantom{{}+a_2} + a_3 &\geq 1\,, \\ a_2 + a_3 &\geq 1\,, \\ a_1 \geq 0\,,\ a_2 \geq 0\,,\ a_3 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Následuje výpočet pomocí metod lineárního programování (např. podle [5]), kterým nalezneme krajní rozdělení jádra rovné

$$\begin{aligned} &[1,1,0]\,, \\ &[1,0,1]\,, \\ &[0,1,1]\,, \end{aligned} \tag{4.4}$$

stejně tak nalezneme základní optimální řešení úlohy. Všechna ostatní rozdělení z jádra dostaneme jako konvexní kombinace rozdělení (4.4). Geometricky je jádro znázorněno na následujícím obrázku č.3. [8]

Závěrem lze shrnout, že konfliktní situace popsané charakteristickými funkcemi dovolují snadno řešit hry v tom smyslu, že je téměř bezproblémové nalezení koaliční struktury, včetně vyšetření jádra, které k nim náleží. Mnohem komplikovanější situace ale nastává ve chvíli, kdy neexistuje jediné jádro sestávající se z jediného rozdělení (pokud je k dispozici jediné jádro s jediným rozdělením, je řešení nasnadě). Koncepce uvedeného řešení pak neudává jednoznačný návod na chování v dané konfliktní situaci, jestliže není možné nalezení jediného jádra.



Obrázek č. 3 - geometrické znázornění jádra kooperativní hry

4.5 Další pojmy

Během vývoje her ve tvaru charakteristické funkce vzniklo velké množství koncepcí, ani jedna z těchto koncepcí však nepodává přesný normativní návod jak řešit konflikty tohoto typu. Díky tomu byly vyvinuty metody, které sice nedávají přesný postup řešení, na druhou stranu umožňují provádět různé analýzy týkající se např. vyjednávání hráčů (teorie vyjednávání) o rozdělení výher nebo ohodnocení pozice jednotlivých hráčů.

Mezi významné oblasti, kterými se kooperativní hry *N* hráčů zabývají, patří pojmy jako např. Shapleyho hodnota a pojem Nukleus[25].

Shapleyho hodnota

V roce 1953 navrhl americký matematik a ekonom Lloyd Stowell Shapley metodu odhadu síly hráče z hlediska jeho mezního přínosu ke všem koalicím, v nichž může být členem. Lze říci, že bere v úvahu hráčův příspěvek k úspěchu koalice, do níž náleží. Toto řešení je označováno jako Shapleyův vektor. *N*-rozměrný Shapleyův vektor lze např. podle [14] definovat jako $H = \left(H_1, H_2, ..., H_n\right)$, přičemž jednotlivé složky označují střední hodnotu mezního přínosu i-tého hráče ke všem koalicím, ve kterých může být členem.

Přínos hráče ke koalici *K* vypočteme následujícím způsobem

[25] Podrobnější informace o této problematice je možné nalézt např. v [14].

$$v(K) + v\left(K - \{i\}\right).$$

Koalice $K - \{i\}$ má k-1 členů a je možné ji proto vytvořit

$$\binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}$$

způsoby (hráč i je mimo výběr, do koalice vstupuje jako poslední).

Střední hodnota přínosu hráče i k úhrnu všech jednočlenných, dvoučlenných, …, N-členných koalic lze potom stanovit jako

$$\mathrm{H}_i = \sum_{K \subset Q,\, i \in K} \frac{(N-k)!(k-1)!}{N!} \left(v(K) - v\left(K - \{i\}\right) \right).$$

Výpočet Shapleyho vektoru je využíván v mnoha oblastech, mezi něž patří např. volební hry (Shapleyův-Shubikův index síly).

Uvedený příklad 4.1 v této kapitole i zmínka o Shapleyho vektoru nejsou jediné, kterým se problematika konfliktu N hráčů věnuje. V literatuře nalezneme další pojmy, které mnohem detailněji rozpracovávají např. politické či ekonomické aplikace.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

5 BEZPEČNOSTNÍ INŽENÝRSTVÍ A STRATEGICKÉ HRY

Dnešní moderní doba se vyznačuje prudkým rozvojem nejen IT/ICT technologií. To sebou ovšem přináší jistá rizika - zvyšují se schopnosti i možnosti útočníků, ať už se jedná o jednotlivce, skupiny lidí či uměle vytvořené systémy. Tak jak rychle vzrůstají možnosti útoků, hledají se protiopatření, která „vyplní" mezery stávající se terčem útoků. S jistou nadsázkou se dá říci, že útočníci jsou vždy o krok vpřed - „hrají s námi jakousi hru".

Existují doporučené metody pro řízení a tedy snížení rizika na nejnižší možnou míru, avšak ve většině případů je rozhodujícím faktorem člověk, který volí určité strategie takovým způsobem, aby v konečném výsledku „zvítězil". Teorie rozhodování zahrnuje spoustu metod, prostředků i doporučení, tak i samotná teorie her může být nápomocna při hledání optimálních strategií, pokud se zaměříme na bezpečnostní sektor.

Teorie her však nepodává vždy 100% jednoznačný návod, jak strategie optimálně volit. Výhodou teorie her je její deskriptivní charakter, který nám může posloužit jako určitá výhoda v budoucím konfliktu, jestliže budeme předem znalí problematiky konfliktních situací.

V dalším textu jsou nastíněny možná řešení bezpečnostních konfliktů mající spíše demonstrativní záměr, nikoliv normativní. Na úvod je dle mého názoru nutné přiblížit pojem bezpečnost jako takový[26]. Pro lepší představu je na následujícím obrázku č.4 znázorněna jedna z možných kategorizací pojmu bezpečnost.

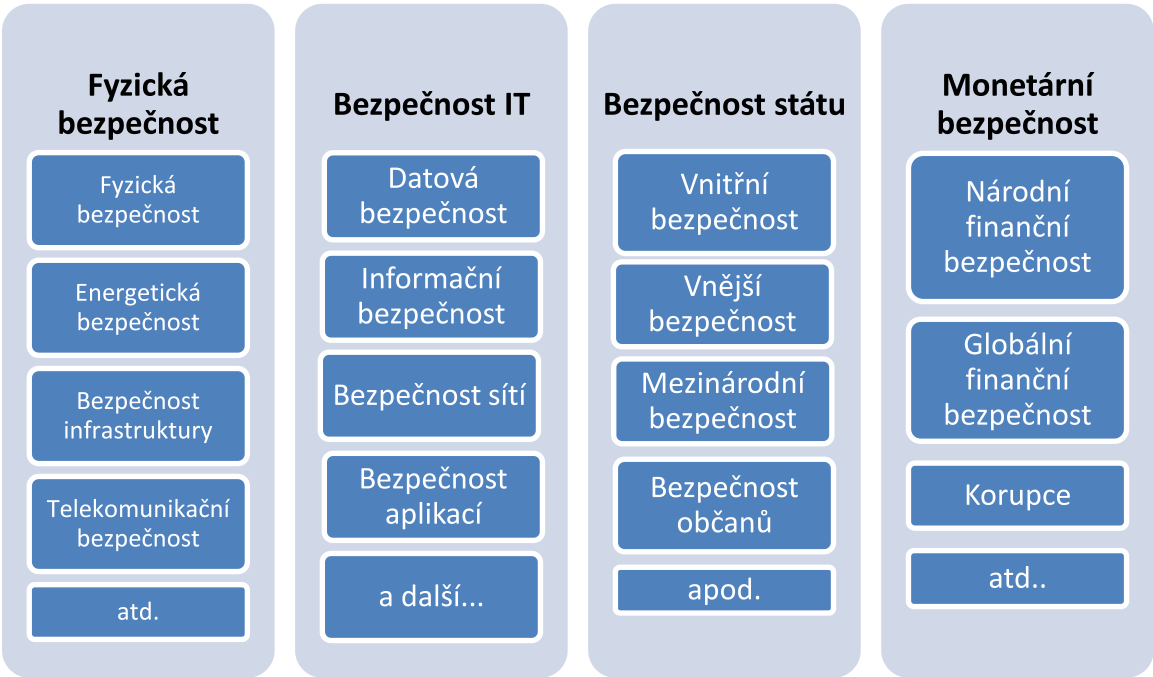
Znázorněné dělení není vyčerpávající, pokud vezmeme v úvahu další oblasti bezpečnosti, které zasahují do více oblastí současně (např. bezpečnost a ochrana zdraví při práci, personální bezpečnost, telekomunikační bezpečnost, atd.).

Teorie her v kombinaci s bezpečnostní problematikou nalézá své uplatnění zejména v těchto odvětvích

- válka a obrana
- politologie
- počítačové systémy
- doprava

[26] Podle jedné z definic je **bezpečnost** stav, kdy jsou na nejnižší možnou míru eliminovány hrozby pro objekt a jeho zájmy. Tímto objektem (referenčním objektem bezpečnosti) může být stát, mezinárodní organizace, mezinárodní systém, sociální skupina (národ, národnostní menšina, ženy, jednotlivec).

- telekomunikace
- finance
- právo, etika
- sociologie, psychologie
- a další



Obrázek č. 4 - přehled oblastí bezpečnostní problematiky

5.1 Historie a současnost

Jedna ze zásadních publikovaných zmínek o analýzách konfliktních rozhodovacích situací, resp. bezpečnostních strategií s využitím teorie her je uvedena v publikaci od autorů Snyder a Diesing (1977), kde oba autoři pomocí elementárních poznatků teorie her analyzují červencovou krizi z roku 1914, která vyústila v První světovou válku. Mezi další období, jež byly vyšetřovány jako hry s nulovým součtem, patří zejména období Studené války a analýzy vybraných bitev 2. světové války (A.G. Holywood - 1954), včetně studia vojenských strategií (např. McDonald a Tukey - 1949).

Naproti tomu analýzy her s nenulovým součtem (neantagonistické hry) jsou, co se týče bezpečnostních konfliktů, spojovány v následujících letech s analýzou mezinárodních konfliktů, kde rozhodující roli sehrály zejména obchodní, resp. ekonomické „války“, mající dopad na mezinárodní bezpečnostní situace. Důkazem přínosu teorie her bylo v tomto směru udělení Nobelovy ceny za ekonomii americkému prof. Schellingovi v roce 2005.

Samozřejmostí je, že předchozím výčtem období studium her neznamená konec vývoje, ba naopak. Růst významu teorie her v souvislosti s bezpečnostní problematikou má stoupající tendenci, o které se lze přesvědčit v mnoha moderních aplikacích.

Jako příklad je možné uvést např. využití teorie her při řešení bezpečnosti uvnitř počítačových sítí. Dalším příkladem může být systém ARMOR[27] vyvinutý na University of Southern California v USA. Tento SW systém je v současnosti nasazen na letišti v Los Angeles. Jeho filozofie je taková, že pomocí matematického algoritmu je určeno, kdy a kam se mají umístit různé typy hlídek a kontrol, v závislosti na možném ohrožení a předchozím záznamu činností na letišti. Systém je jedinečný v tom, že díky svému algoritmu přináší téměř nemožnost předpovídat chování (obvyklé rozmístění jednotek, hlídek) policie na letišti, což znesnadňuje plánování i provedení teroristických útoků.

5.2 Maticové bezpečnostní hry

Typicky vyšetřovanou úlohou v teorii her je jednomaticová hra, pro kterou je charakteristické to, že každý hráč zná svou množinou alternativ, ale i protihráče. Každý hráč navíc dokáže odhadnout důsledky svých voleb (strategií). V bezpečnostním průmyslu může být takovýto přístup přínosný pro snadnější výběr vhodné bezp. strategie. Jestliže budeme uvažovat hráče (v tomto případě např. firmu) bránící své zájmy, lze za jistých předpokladů i odhadů chování protihráče aplikovat teorii her k nalezení optimální volby strategie. Uvažujme nyní zjednodušenou demonstrativní úlohu.

Společnost XY tvoří tři pobočky - A, B a C. Z určitých zdrojů se ovšem dozvěděla, že existuje hrozba přepadení jedné její pobočky s cílem ukrást nějaké hodnotné aktivum. Firma XY v té době využívá např. tři bezpečnostní strategie sloužící k zabezpečení svých objektů. Nyní díky známému riziku se rozhoduje, kterou strategii do budoucna posílit (lze jen jednu např. vzhledem k finanční situaci dané firmy), tak aby minimalizovala riziko ztráty. Podobně můžeme uvažovat např. lupiče nebo jiného pachatele, jehož cílem je výběr pobočky s cílem krádeže aktiva. Pachatel si rovněž získá potřebné informace o tom, jaké bezpečnostní strategie v současnosti firma XY využívá (např. CCTV, EZS, hlídky, apod.).

[27] Více informací o tomto systému je možno nalézt např. na http://teamcore.usc.edu/ARMOR-LAX/

Dále předpokládejme, že útvar firmy mající na starost zabezpečení celé společnosti si sestaví pro snazší rozhodování o investici následující zjednodušenou matici.

$$\text{Firma XY} \quad \begin{array}{c} \\ BS1 \\ BS2 \\ BS3 \end{array} \begin{array}{c} \text{Pachatel} \\ \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & -12 & -5 \\ -15 & -24 & -3 \\ -18 & -6 & -7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hodnoty v matici můžeme interpretovat např. takto - ve chvíli, kdy se pachatel rozhodne pro pobočku A, a společnost se rozhodne pro posilnění bezpečnostní strategie č.1 (BS1), firma utrpí ztrátu ve výši 4 jednotek. Podobně je tomu u zbývajících hodnot matice.

Podle (2.7) se pokusíme najít sedlový prvek matice. Dolní cena hry je rovna 6 a horní cena je rovna 7. Snadno se tedy můžeme přesvědčit, že v takovéto hře neexistuje sedlový prvek a hra nemá rovnovážné řešení v ryzích strategiích. Proto je dále nutné nalézt smíšené strategie, resp. pravděpodobnosti, s nimiž bude firma XY volit své bezpečnostní strategie. V příloze P III je zobrazen výpočet pomocí MATLABu, podobně jako tomu bylo u příkladu 2.3. Z provedených výpočtů vyplývá, že firma XY se přikloní k investici do bezpečnostní strategie č.1 s pravděpodobností 3/5 a s pravděpodobností 2/5 do strategie č.3.

5.3 Nekooperativní bezpečnostní hry

5.3.1 Bezpečnost IT firmy vs hacker

Jak již bylo zmíněno v úvodu diplomové práce, s mohutným vývojem IT/ICT technologií roste současně riziko ztráty, zneužití dat (informací) ve firmách, organizacích či institucích. Díky těmto globálním podmínkám jsou určité typy organizací nuceny vynakládat nemalé prostředky na udržení efektivní ochrany svých aktiv, mezi něž patří právě ochrana dat a informací.

V případě, že u nich dojde k bezpečnostnímu incidentu na úrovni např. IT systémů, důsledky mohou nabýt katastrofálních důsledků. Důkazem toho jsou celosvětově prováděné výzkumy, které vyčíslují vysoké částky škod[28], pokud budeme uvažovat ztráty

[28] Odhady se pohybují např. pro USA okolo 280 miliard dolarů díky útokům a virovým infekcím.

ekonomických prostředků, tak i dlouholeté nabyté pověsti firmy. Jelikož se firmy obávají ztráty své důvěryhodnosti a tedy i potenciálních zájmů investorů, snaží se své interní statistiky útoků logicky skrývat. Reálné údaje jsou pak v tomto směru značně zkreslené, což dle mého názoru není až tak významné, jako ten fakt, že řešení strategické problematiky bezpečnosti IT systémů je ve většině firem zřejmě nedokonalá (pokud by se firmy chovali mnohem racionálněji, způsobené škody by byly na nižší úrovni).

Některé společnosti tedy tímto způsobem stále podstupují jisté neuvědomělosti, a ve výsledku mohou prohrávat „hry“ s hackery a dalšími podobnými typy útočníků. Firmy se samozřejmě brání investicemi do kvalitního IT managementu, včetně provedení nejrůznějších procesů jako je analýza rizik atd. Stačí si však uvědomit jednoduchou hru, která se může odehrávat mezi vedením firmy a potenciálním hackerem či jiným typem útočníka. Výsledkem může být pro společnosti, kterých se tento možný konflikt týká, mnohem zřetelnější pohled na bezpečnostní strategii IT systémů i uvědomění, jaké typy konfliktů mohou nastat. Příkladem může být hra uvedená v [12].

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Hacker} \\
 & & \begin{array}{cc} \textit{lehký útok} & \textit{těžký útok} \end{array} \\
\text{Firma XY} & \begin{array}{c} \textit{nízká investice} \\ \textit{vysoká investice} \end{array} & \begin{pmatrix} -5{,}6 & -10{,}8 \\ -8{,}4 & -7{,}5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Každý z účastníků v této hře může volit ze dvou strategií. V případě firmy označme první strategii - vysoká investice do zabezpečení, a druhou strategii - nízká investice do zabezpečení. U hackera uvažujme dvě strategie a to lehký útok a těžký útok na firemní IT systémy.

Pokud firma bude investovat nízký obnos prostředků do zabezpečení a hacker se rozhodne zvolit lehčí formu útoku, potom výhra, resp. prohra firmy je záporné hodnoty rovné 5. Tuto pomyslnou hodnotu lze např. odvodit z investice do zabezpečení, včetně nákladů na nedetekované útoky. V této situace je užitek hackera roven 6 jednotkám (užitek z úspěšného napadení mínus pomyslné ztráty z detekce útoku). Podobným způsobem lze interpretovat ostatní hodnoty v matici.

Rovnovážným bodem a tedy i řešením této zjednodušené hry je podle (3.3) dvojice -7,5 (vysoká investice a těžký útok hackera).

Uvažujme nyní situaci, kdy se firma nebude chovat strategicky a domnívá se, že hacker zvolí lehčí formu útoku[29]. Rozhodne se tedy investovat do ochrany méně, neboť navýšení ochrany se jí nevyplatí (-5 > -8). Pravý hacker ovšem bude vždy volit těžší formu útoku, neboť jeho cílem je co nejvíce poškodit firmu. Hra, pokud budou zvoleny tyto strategie (nízká investice, těžký útok) dopadne pro firmu v tomto případě nejhorším možným výsledkem ze všech (-10).

Tato aplikační úloha poukazuje na to, že firmy by měly vždy zvážit své možnosti investic do zabezpečení a neměly by ignorovat strategické možnosti, pokud jde např. o potenciální konflikt s hackerem nebo jiným typem útočníka.

Výpočet této úlohy pomocí MATLABu je zobrazen v příloze P IV.

5.3.2 Vězňovo dilema a bezpečnostní inženýrství

Vězňovo dilema je charakteristické pro stav, kdy dva hráči nejsou předem přesvědčeni o možné spolupráci svého protivníka (nejsou předem dohodnuti). Jelikož se každý z těchto hráčů zajímá pouze o svůj zájem, hráč bude vždy volit svou zaručenou strategii a to „přiznat“ i za cenu toho, že pokud by se oba „nepřiznali“, mohli by ve finále získat více. V reálném světě nacházíme analogie této hry v mnoha oblastech, od ekonomie, přes biologii až např. po armádní oblast. Společným rysem je vždy otázka možnosti opakování a úrovně společné komunikace. Mnoho provedených experimentů ukazují, že v případě opakované hry, má hra větší prostor ke kooperaci. Snižuje se počet „podrazů“, a tak sílí etická stránky hry.

Dle mého názoru je toto významné nejen pro oblast bezpečnostního inženýrství. Uvažme jednoduchou situaci ve firmě, řešící zabezpečení svých objektů. Kdyby existovala taková (ovšem nereálná) morálka, kde nebude nikdo v pokušení objekt napadnout, nebo z něj něco ukrást, nebude potřeba investic do zabezpečení. Takto ušetřené finance by se dále mohly s jistotou použít pro jiné účely. Dilema je však v tom, že z racionálního hlediska, je pro zloděje „podraz“ nejlepší volbou. Podobně je tomu téměř ve všech oblastech souvisejících s bezpečnostní jako takovou. Možnosti opakování hry a volba strategií[30], resp. prostor pro snížení bezpečnostních konfliktů a situací je tedy rozhodující, včetně důkladné analýzy možných strategií.

[29] Praxe bohužel ukazuje, že většina firem se takto chová, dokud vůči nim nenastane úspěšný útok.

[30] Např. podle tabulky č.2.

5.4 Kooperativní bezpečnostní hry

Vstup dvou bezpečnostních agentur na regionální trh

Následující smyšlený příklad si klade za cíl demonstrovat možné využití teorie her, resp. **kooperativní hru s nepřenosnou výhrou**[31] v kombinaci s průmyslem bezp. inženýrství.

Uvažujme proto dvě fiktivní bezpečnostní agentury - bezpečnostní agenturu X (BX) a bezpečnostní agenturu Y (BY). Každou z nich vlastní bývalý zaměstnanec (pan X a pan Y) s praxí u Policie ČR i dlouholetého působení v nejmenované úspěšné bezp. agentuře. Oba se navzájem znají, ale každý z nich se chce vydat svou vlastní cestou a je jisté, že v dalším období si budou vzájemnou konkurencí. Postupem času si nechá každý odděleně provést nejrůznější analýzy poptávky, které jim poskytnou podklady k rozhodování o tom, v jakém městě zahájit činnost vlastní bezpečnostní agentury, a to jak na základě statistických údajů, tak i vlastních zkušeností, apod. Společně přitom uvažují o třech městech[32], kde zahájí svou činnost jako vlastníci svých agentur - buď v Ústí nad Labem, ve Zlíně anebo v Plzni. Oba tuto informaci, že každý z nich uvažuje o stejných městech, získali např. díky svým společným známým z minulosti (nebo pečlivě provedená analýza poukazuje pouze na tato tři města, kde je možný potenciál uplatnění).

Díky svým schopnostem i na základě získaných údajů dokáže každý z nich ohodnotit jistý finanční zisk či užitek (včetně např. průměrného počtu trestných činů na základě statistických údajů) získaný, pokud bude daný vlastník uvažovat vstup do každého z měst s ohledem na svého známého (v tuto chvíli již konkurenta). Matice takovýchto fiktivních výplat je uvedena v následující dvojmatici

$$\begin{array}{cc} & \text{BY} \\ \text{BX} & \begin{pmatrix} 80;50 & 150;120 & 140;50 \\ 250;130 & 130;100 & 250;40 \\ 70;130 & 60;110 & 30;20 \end{pmatrix} \end{array}$$

První řádek odpovídá strategii č.1 pro BX - zahájit činnost v Ústí nad Labem. Druhý řádek odpovídá strategii otevření agentury ve Zlíne a třetí Plzni. Podobně je tomu u BY, kde první sloupec odpovídá Ústí nad Labem, atd.

---

[31] V tomto příkladě je uvažována nepřenosná výhra, neboť oba vlastníci nepředpokládají rozdělení zisků na základě možné vzájemné spolupráce, neboť jejich podnikatelská činnost je v začátcích.

[32] Uvedená města jsou vybrána zcela náhodně.

Při pohledu na tuto dvojmatici lze usoudit, že pokud by oba otevřeli svou agenturu v Plzni (strategie (30,20)), zřejmě by to nebylo výhodné ani pro jednoho z vlastníků. Pokud by se však měli jednotlivě rozhodnout bez ohledu na svého konkurenta, nejvíce zisku by jim přineslo otevření agentury ve Zlíně. Ve chvíli, kdy oba současně zvolí alternativu Zlína, přinese jim tato volba následující zisky plynoucí z poskytovaných služeb, které mimo jiné mohou snížit i počet trestných činů v tomto kraji. Zjistíme tedy, že zaručené výhry jsou

$$v(1) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \mathrm{M}_1(x, y) = \max_x \begin{pmatrix} 80 \\ 130 \\ 30 \end{pmatrix} = 130,$$
$$v(2) = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \mathrm{M}_2(x, y) = \max_y \begin{pmatrix} 50 & 100 & 20 \end{pmatrix} = 100.$$

Vlastníci bezpečnostních agentur mohou ovšem „slevit“ ze své strategie (bojovat tvrdě s konkurencí) a po vzájemném setkání se dohodnout na případné vzájemné volbě strategií, které jim mohou přinést vyšší zisk, než kdyby spolu nespolupracovali. Tomu se tak stane, jestliže si budou vědomy, že existuje nějaké rozdělení *D,* které jim ve výsledku přinese více, než jejich zaručená výhra (zisk). Podle (3.10) nejprve zjistí, že množina *D* dosažitelných rozdělení zahrnuje následující dvojice (150,120), (250,130), (130,100). V následujícím a posledním kroku naleznou z této množiny jediné Paretovské rozdělení rovné (250,130).

Výhodné pro oba vlastníky bude, pokud se dohodnou na volbě svých strategií, jelikož rozdělení (250,130), resp. strategie (Zlín, Ústí nad Labem) jim přinese více než jejich zaručené výhry (130,100). Na jednu stranu mohou tímto způsobem zvýšit svůj zisk, na straně druhé mohou přispět i např. k většímu snížení počtu trestných činů.

Výpočet této úlohy pomocí MATLABu je uveden v příloze P V, kde je možné spatřit zadání hodnot výplatních matic pro oba hráče a následný algoritmus, který nalezne již uvedené jediné paretovské rozdělení.

5.5 Budoucnost teorie her s aplikací na bezpečnostní problematiku

Závěrem lze říci, že teorie her a její úlohy umožňují ve většině případů deskriptivní formou popsat některé typy bezpečnostních konfliktů, které nastaly jak v minulosti, tak i ty, jež se týkají dnešní doby. Jsou ovšem omezeny do značné míry tím, že uvažujeme téměř plnou informovanost hráčů, resp. vycházíme z předpokladů uvedených v úvodní kapitole (např. každý z hráčů zná svou i protihráčovu množinu alternativ, včetně ohodnocení důsledku po výběru konkrétní strategie, atd.).

Výše uvedené podmínky nemusí být v dnešní době vždy splněny. Hráči nemusí disponovat pokaždé úplnou informací o možnostech protihráče. Aplikace her tohoto typu je potom dále nutné řešit mnohem sofistikovanějším způsobem. Vývoj teorie her však nachází řešení i v těchto situacích, ačkoliv tato oblast je stále předmětem vývoje.

Příkladem her s neúplnou informací může být již zmíněný systém ARMOR zavedený na letišti v Los Angeles (využívající Bayesovsko-Stackelbergovi hry[33]).

Další zajímavou a rozvíjenou aplikací teorie her ve smyslu bezpečnostního inženýrství je model koaliční hry v rámci analýzy rizik IT systémů. Takovýto model[34] je postaven na kooperaci N hráčů, kde tito hráči mohou být např. jednotlivá oddělení či samostatné jednotky rozsáhlé firmy (společnosti, organizace), spolupracující za účelem dosažení co nejefektivnější úrovně bezpečnosti (s ohledem na ekonomickou i organizační stránku věci). V případě malých firem může být takováto síť spolupráce založena i na kooperaci více firem tohoto formátu. Praktický přínos tkví v tom, že pomocí teorie her je mnohem snadnější způsob nalezení tvorby koalic (spolupráce) jednotek s ohledem na deklarované bezpečnostní cíle a využít tak synergického efektu.

---

[33] Podrobnější informace o Bayesovsko-Stackelbergových hrách a jejich využití nalezneme např. na http://www.cs.duke.edu/~conitzer/stackelbergAAMAS10.pdf.

[34] Více o této problematice lze nalézt na http://www.tansu.alpcan.org/papers/Walid-Alpcan-ICIMP10.pdf.

ZÁVĚR

Úvodní kapitola diplomové práce je zaměřena na historický vývoj teorie her a její pozdější uplatnění v dnešní moderní vědě, počínaje ekonomie, přes biologii až po např. vojenskou, či bezpečnostní problematiku. Snahou je systémovým přístupem klasifikovat teorii her na základě nejvýznamnějších vlastností a podat tak ucelený přehled na tuto rozsáhlou teorii.

Druhá kapitola věnující se antagonistickým hrám objasňuje hry dvou hráčů s konstantním součtem, zejména potom poukazuje na jednoduchost matematické formulace maticových her a jejich řešení za pomoci známých úloh lineárního programování.

Následující třetí kapitola - neantagonistické hry popisuje případy, kdy výhra jednoho hráče není přímo odvoditelná od chování druhého hráče. Za těchto podmínek hovoříme o hrách s nekonstantním součtem. Charakter těchto her je pro praxi mnohem častější a přínosnější, neboť bere v úvahu i protihráčovu výplatní matici. Zahrnuje jak možnosti kooperace, tak i nekooperativní hry (např. vězňovo dilema).

Čtvrtá kapitola je zaměřena na konflikt *N* hráčů. Důvodem je široké uplatnění her tohoto typu v reálném světě, nejen ekonomickém. Příkladem může být tvorba koalic, resp. organizace vzájemné spolupráce jednotek při tvorbě řešení bezpečnosti IT systémů.

V páté kapitole jsou nastíněny praktické aplikace teorie her v bezpečnostním inženýrství. Uvedené úlohy demonstrují možný přístup k této oblasti s cílem poskytnout snadnější způsob rozhodování pro bezpečnostní management. Součástí těchto úloh jsou vytvořené aplikace v MATLABu, které usnadňují nalezení optimálních strategií a rovněž ukazují na možnosti využití tohoto matematického softwaru při řešení konfliktů v rámci teorie her.

Cílem diplomové práce je podat přehlednou klasifikaci teorii her, demonstrovat její nejčastěji vyšetřované typy her a možné aplikace v rámci bezpečnostního inženýrství. Kromě toho může práce dále sloužit jako materiál pro prvotní seznámení s teorií her, i jako podnět k hlubšímu rozpracování této problematiky.

Celá práce je rovněž dostupná ve formě webové prezentace a přináší tak určitou interaktivitu. Webová prezentace byla naprogramována pomocí jazyka HTML a kaskádových stylů (CSS).

ZÁVĚR V ANGLIČTINĚ

The introductory chapter deals with a description of historical development of game theory and its subsequent implementation in terms of today's modern science, which is applied to many areas from economics to military or security fields. Also, its aim is to use system approach to classify game theory based on its the significant attributes in order to get better overview.

The second chapter - antagonistic games is focused on a clarification of the two-player games with constant sum. There are shown particular benefits of the simple use of matrix games and its solutions by using linear programming methods.

The next, third chapter, is devoted to non-antagonistic games in which one player's win is not directly derived from the second player behaviour. In these cases, we talk about non-zero sum games. These games occure much more in practice as they involve the second player‘s matrix of payoffs. The nature of these games includes both possibilities of cooperation and non-cooperative tasks (e.g. the prisoner's dilemma).

In real world, not only in the field of economics, it can be useful to create coalitions to receive higher profits. This attitude is described in the fourth chapter. One of the applications can be seen in a mutual cooperation while dealing with corporate IT security systems.

The final chapter focuses on practical tasks in terms of game theory and its relation to security engineering. These examples demonstrate a more easier way in which security management can make their decision processes. Also, the practical part of this thesis includes solved tasks made within MATLAB, which provides much faster and more comfortable way while finding optimal strategies. These MATLAB applications are also used to show relations to theory of games.

The main objective of this thesis is to make a classification of game theory, demonstrating the most used types of games and its sample solutions. At the same time there are made calculations for applications with emphasis on security engineering. Moreover, this work can be served as a study material for introduction to game theory, as well as an incentive to greater development of this area.

This thesis is also available as a web presentation and was programmed with use of HTML and CSS languages to provide an interactive method of game theory study.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

Monografie:

[1] BARTKO, Róbert. *MATLAB II. - Optimalizácia*. 1. vyd. Praha : [s.n.], 2008. 227 s. ISBN 978-80-7080-691-3.

[2] BRICKMAN, Louis. *Mathematical Introduction To Linear Programming And Game Theory : undergraduate Texts In Mathematics*. 2nd corrected edition. [s.l.] : [s.n.], 1998. 130 s.

[3] DLOUHÝ, Martin; FIALA, Petr. *Úvod do teorie her*. první. Praha : Oeconomica, 2007. 114 s. ISBN 978-80-245-1273-0.

[4] DOCKNER, Engelbert, et al. *Differential games in economics and management science*. New York, USA : Cambridge University Press, 2001. 382 s. ISBN 0-521-63732-4.

[5] LINDA, Bohdan, VOLEK, Josef. *Lineární programování*. 2. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2008. 139 s. ISBN 978-80-7395-133-7.

[6] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a optimální rozhodování*. Praha : SNTL, 1974. IČ 04-012-74.

[7] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a konflikty zájmů*. 1. vyd. Praha : Oeconomica, 2002. 114 s. ISBN 80-245-0450-2.

[8] MAŇAS, Miroslav. *Teorie her a její aplikace*. Praha : SNTL, 1991. 280 s. ISBN 80-03-00358-X.

[9] MAREŠ, Milan. *Principy strategického chování*. 1. vyd. Praha : Karolinum, 2003. 120 s. ISBN 80-246-0616-x.

[10] VOLEK, Josef. *Operační výzkum IV : teorie her a optimálního rozhodování*. 1. vyd. Pardubice : Univerzita Pardubice, 2003. 101 s. ISBN 80-7194-621-4.

[11] WILLIAMS, Paul D. . *Security Studies : An Introduction*. [s.l.] : [s.n.], 2008. 568 s. ISBN 978-0-415-42562-9.

Internetové zdroje:

[12] CAVUSOGLU, Hasan; CAVUSOGLU, Huseyin; RAGHUNATHAN, Srinivasan. ECONOMICS OF IT SECURITY MANAGEMENT: FOUR IMPROVEMENTS TO CURRENT SECURITY PRACTICES. *CAIS* [online]. 2004, 14, [cit. 2010-06-05]. Dostupný z WWW: <http://www.utdallas.edu/~huseyin/paper/practice.pdf>.

[13] Strategie (teorie her) In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 29.1.2010 [cit. 2010-03-15]. Dostupné z WWW: < http://cs.wikipedia.org/wiki/Strategie_%28teorie_her%29>.

[14] HYKŠOVÁ, Magdalena. *Teorie her a optimální rozhodování* [online]. 2009 [cit. 2010-03-15]. Dostupné z WWW: <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/>.

[15] ROUBAL, Jiří. *Teorie her : Optimální rozhodování a řízení*. In . [s.l.] : [s.n.], 2006, 2004-03-01 [cit. 2010-03-28]. Dostupné z WWW: <http://support.dce.felk.cvut.cz/pub/roubalj/teaching/ORR/seminars/ORR_cv4_ths.pdf>.

[16] *The MathWorks. Optimization Toolbox : User's Guide*. [s.l.] : [s.n.], 2003. 352 s. Dostupný z WWW: <http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/pdf_doc/optim/optim_tb.pdf>.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

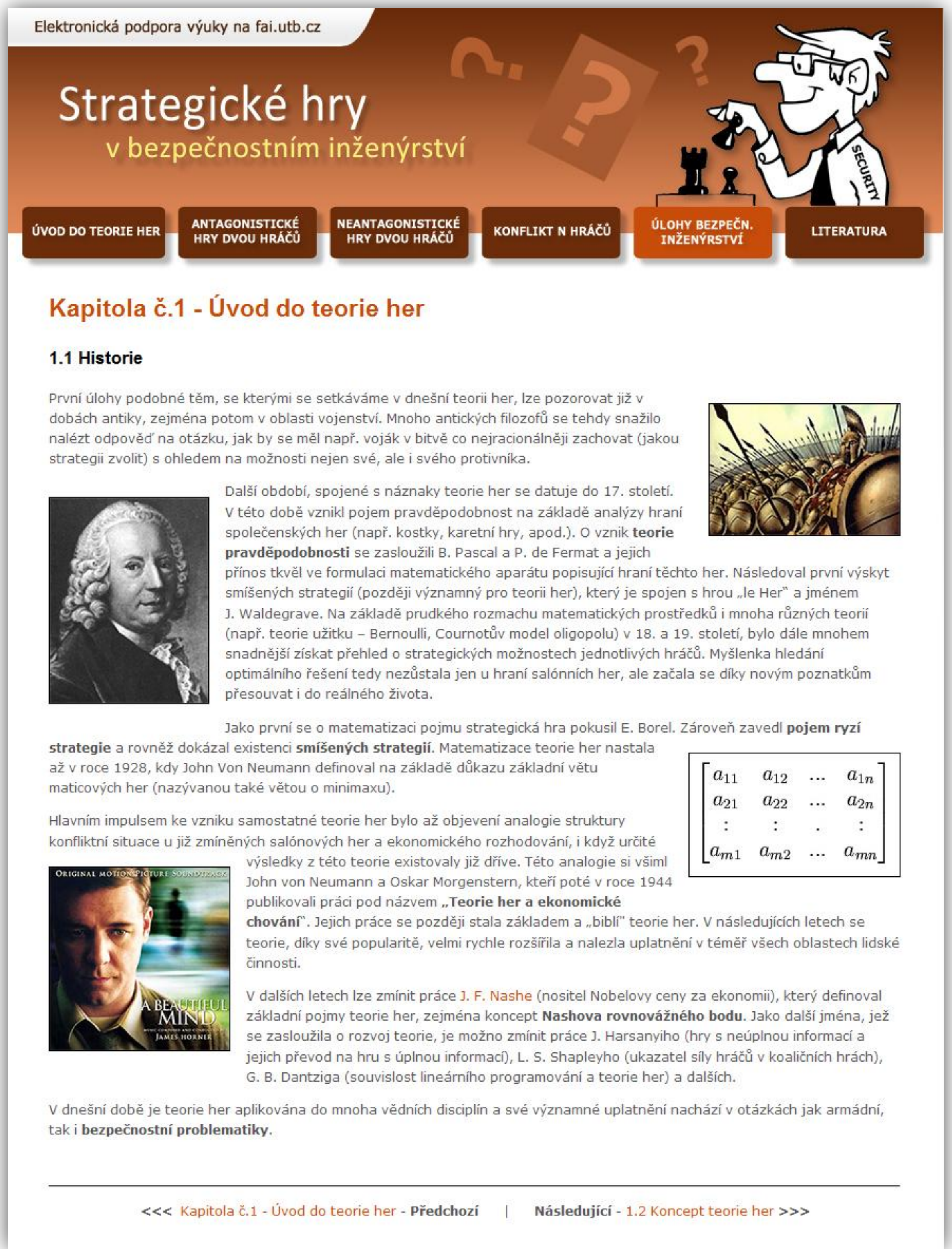
ARMOR	Assistant for Randomized Monitoring Over Routes
BX	Fiktivní bezpečnostní agentura X
BX	Fiktivní bezpečnostní agentura Y
CSS	Cascading Style Sheets (Kaskádové styly)
HTML	HyperText Markup Language (Hypertextový značkovací jazyk)
IT/ICT	Informační/komunikační technologie
LP	Lineární programování.

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM TABULEK

SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA P I: UKÁZKA WEBOVÉ PREZENTACE Č.1



Elektronická podpora výuky na fai.utb.cz

Strategické hry
v bezpečnostním inženýrství

ÚVOD DO TEORIE HER | ANTAGONISTICKÉ HRY DVOU HRÁČŮ | NEANTAGONISTICKÉ HRY DVOU HRÁČŮ | KONFLIKT N HRÁČŮ | ÚLOHY BEZPEČN. INŽENÝRSTVÍ | LITERATURA

Kapitola č.1 - Úvod do teorie her

1.1 Historie

První úlohy podobné těm, se kterými se setkáváme v dnešní teorii her, lze pozorovat již v dobách antiky, zejména potom v oblasti vojenství. Mnoho antických filozofů se tehdy snažilo nalézt odpověď na otázku, jak by se měl např. voják v bitvě co nejracionálněji zachovat (jakou strategii zvolit) s ohledem na možnosti nejen své, ale i svého protivníka.

Další období, spojené s náznaky teorie her se datuje do 17. století. V této době vznikl pojem pravděpodobnost na základě analýzy hraní společenských her (např. kostky, karetní hry, apod.). O vznik **teorie pravděpodobnosti** se zasloužili B. Pascal a P. de Fermat a jejich přínos tkvěl ve formulaci matematického aparátu popisující hraní těchto her. Následoval první výskyt smíšených strategií (později významný pro teorii her), který je spojen s hrou „le Her" a jménem J. Waldegrave. Na základě prudkého rozmachu matematických prostředků i mnoha různých teorií (např. teorie užitku – Bernoulli, Cournotův model oligopolu) v 18. a 19. století, bylo dále mnohem snadnější získat přehled o strategických možnostech jednotlivých hráčů. Myšlenka hledání optimálního řešení tedy nezůstala jen u hraní salónních her, ale začala se díky novým poznatkům přesouvat i do reálného života.

Jako první se o matematizaci pojmu strategická hra pokusil E. Borel. Zároveň zavedl **pojem ryzí strategie** a rovněž dokázal existenci **smíšených strategií**. Matematizace teorie her nastala až v roce 1928, kdy John Von Neumann definoval na základě důkazu základní větu maticových her (nazývanou také větou o minimaxu).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Hlavním impulsem ke vzniku samostatné teorie her bylo až objevení analogie struktury konfliktní situace u již zmíněných salónových her a ekonomického rozhodování, i když určité výsledky z této teorie existovaly již dříve. Této analogie si všiml John von Neumann a Oskar Morgenstern, kteří poté v roce 1944 publikovali práci pod názvem **„Teorie her a ekonomické chování"**. Jejich práce se později stala základem a „biblí" teorie her. V následujících letech se teorie, díky své popularitě, velmi rychle rozšířila a nalezla uplatnění v téměř všech oblastech lidské činnosti.

V dalších letech lze zmínit práce J. F. Nashe (nositel Nobelovy ceny za ekonomii), který definoval základní pojmy teorie her, zejména koncept **Nashova rovnovážného bodu**. Jako další jména, jež se zasloužila o rozvoj teorie, je možno zmínit práce J. Harsanyiho (hry s neúplnou informací a jejich převod na hru s úplnou informací), L. S. Shapleyho (ukazatel síly hráčů v koaličních hrách), G. B. Dantziga (souvislost lineárního programování a teorie her) a dalších.

V dnešní době je teorie her aplikována do mnoha vědních disciplín a své významné uplatnění nachází v otázkách jak armádní, tak i **bezpečnostní problematiky**.

<<< Kapitola č.1 - Úvod do teorie her - **Předchozí** | **Následující** - 1.2 Koncept teorie her >>>

PŘÍLOHA P II: UKÁZKA WEBOVÉ PREZENTACE Č.2

ÚVOD DO TEORIE HER | ANTAGONISTICKÉ HRY DVOU HRÁČŮ | NEANTAGONISTICKÉ HRY DVOU HRÁČŮ | KONFLIKT N HRÁČŮ | ÚLOHY BEZPEČN. INŽENÝRSTVÍ | LITERATURA

Kapitola č.5 - Bezpečnostní inženýrství a strategické hry

- 5.1 Historie a současnost
- 5.2 Maticové bezpečnostní hry
- 5.3 Nekooperativní bezpečnostní hry
- 5.4 Kooperativní bezpečnostní hry
- 5.5 Budoucnost teorie her s aplikací na bezpečnostní problematiku
- 5.6 Příklady v MATLABu

Úvod

Dnešní moderní doba se vyznačuje prudkým rozvojem nejen IT/ICT technologií. To sebou ovšem přináší jistá rizika - zvyšují se schopnosti i možnosti útočníků, ať už se jedná o jednotlivce, skupiny lidí či uměle vytvořené systémy. Tak jak rychle vzrůstají možnosti útoků, hledají se protiopatření, která „vyplní" mezery stávající se terčem útoků. S jistou nadsázkou se dá říci, že útočníci jsou vždy o krok vpřed - „hrají s námi jakousi hru".
Existují doporučené metody pro řízení a tedy snížení rizika na nejnižší možnou míru, avšak ve většině případů je rozhodujícím faktorem člověk, který volí určité strategie takovým způsobem, aby v konečném výsledku „zvítězil". Teorie rozhodování zahrnuje spoustu metod, prostředků i doporučení, tak i samotná teorie her může být nápomocna při hledání optimálních strategií, pokud se zaměříme na bezpečnostní sektor.
Teorie her však nepodává vždy 100% jednoznačný návod, jak strategie optimálně volit. Výhodou teorie her je její deskriptivní charakter, který nám může posloužit jako určitá výhoda v budoucím konfliktu, jestliže budeme předem znalí problematiky konfliktních situací.

V dalším textu jsou nastíněny možná řešení bezpečnostních konfliktů mající spíše demonstrativní záměr, nikoliv normativní. Na úvod je dle mého názoru nutné přiblížit pojem bezpečnost jako takový. Pro lepší představu je na následujícím obrázku č.4 znázorněna jedna z možných kategorizací pojmu bezpečnost.

Znázorněné dělení není vyčerpávající, pokud vezmeme v úvahu další oblasti bezpečnosti, které zasahují do více oblastí současně (např. bezpečnost a ochrana zdraví při práci, personální bezpečnost, telekomunikační bezpečnost, atd.).
Teorie her v kombinaci s bezpečnostní problematikou nalézá své uplatnění zejména v těchto odvětvích

- válka a obrana
- politologie
- počítačové systémy
- doprava
- telekomunikace
- finance
- právo, etika
- sociologie, psychologie
- a další

<<< Kapitola č.4 - Konflikt N hráčů **Předchozí** | **Následující** - 5.1 - Historie a současnost >>>

PŘÍLOHA P III: ŘEŠENÍ ÚLOHY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ POMOCÍ MATLABU (BEZPEČNOSTNÍ ÚLOHA)

Command Window

```
Zadejte počet řádků matice A: 3
Zadejte počet sloupců matice A: 3

Nyní proběhne naplnění matice koeficientů.

Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a11: -4
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a12: -12
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a13: -5
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a21: -15
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a22: -24
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a23: -3
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a31: -18
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a32: -6
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a33: -7

Matice A koeficientů je:

A =

     -4             -12             -5
    -15             -24             -3
    -18              -6             -7


Matice neobsahuje všechny prvky kladné, např. prvek -24.
Ke všem prvkům matice A proto bude nyní přičtena konstanta k=26.
Nová matice A bude mít následující tvar:

A =

     22              14             21
     11               2             23
      8              20             19


Nyní proběhne naplnění vektoru b pravých stran b1,b2,...,bn.

Zadejte prosím hodnotu pravé strany pro 1.řádek: 1
Zadejte prosím hodnotu pravé strany pro 2.řádek: 1
Zadejte prosím hodnotu pravé strany pro 3.řádek: 1

Vektor pravých stran b je:

b =

      1
      1
      1
```

```
Naplnění vektoru f - cenových indexů c1,c2,...,cn.

Zadejte prosím hodnotu cenového indexu c1: 1
Zadejte prosím hodnotu cenového indexu c2: 1
Zadejte prosím hodnotu cenového indexu c3: 1

Vektor cenových indexů f je:

f =

       1              1              1

Nyní proběhne výpočet primární úlohy.
-----------------------------------
Optimization terminated.
Vektor smíšených strategií hráče Y je:

y =

       3/10           7/10           0

Nyní proběhne výpočet duální úlohy.
-----------------------------------
Optimization terminated.
Vektor smíšených strategií hráče X je:

x =

       3/5            0              2/5

Cena hry V je:

v =

     -48/5
```

PŘÍLOHA P IV: ŘEŠENÍ NEKOOPERATIVNÍ HRY (BEZPEČNOSTNÍ ÚLOHA) POMOCÍ MATLABU

```
Command Window
Zadejte počet strategii hráče X: 2
Zadejte počet strategii hráče Y: 2

Nyní proběhne naplnění matice výplatních funkcí pro hráče X
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,1): -5
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,2): -10
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,1): -8
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,2): -7

Nyní proběhne naplnění matice výplatních funkcí pro hráče Y
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,1): 6
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,2): 8
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,1): 4
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,2): 5

Matice výher hráče X je:
A =

    -5          -10
    -8           -7

Matice výher hráče Y je:
B =

     6            8
     4            5


Existuje jedno Nashovo rovnovážné řešení v ryzích strategiích:

Hráč X volí strategii č.2 a získá výhru rovnou -7.
Hráč Y volí strategii č.2 a získá výhru rovnou 5.
>>
```

PŘÍLOHA P V: ŘEŠENÍ KOOPERATIVNÍ HRY S NEPŘENOSNOU VÝHROU (BEZPEČNOSTNÍ ÚLOHA) POMOCÍ MATLABU

Command Window

```
Zadejte počet strategii hráče X: 3
Zadejte počet strategii hráče Y: 3

Nyní proběhne naplnění matice výplatních funkcí pro hráče X
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,1): 80
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,2): 150
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,3): 140
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,1): 250
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,2): 130
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,3): 250
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,1): 70
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,2): 60
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,3): 30

Nyní proběhne naplnění matice výplatních funkcí pro hráče Y
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,1): 50
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,2): 120
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,3): 50
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,1): 130
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,2): 100
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,3): 40
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,1): 130
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,2): 110
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,3): 20

Matice výher hráče X je:
A =

    80   150   140
   250   130   250
    70    60    30

Matice výher hráče Y je:
B =

    50   120    50
   130   100    40
   130   110    20

Zaručená výhra hráče X je: 130.
Zaručená výhra hráče Y je: 100.

Existuje jedno Paretovské rozdělení a tedy dvojice strategii:
P =

   250   130

>>
```

PŘÍLOHA P VI: ŘEŠENÍ ÚLOHY LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ POMOCÍ MATLABU (PŘÍKLAD 2.3)

Command Window

```
Zadejte počet řádků matice A: 2
Zadejte počet sloupců matice A: 3

Nyní proběhne naplnění matice koeficientů.

Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a11: 1
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a12: 0
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a13: -1
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a21: -1
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a22: 1
Zadejte prosím hodnotu pro koeficient a23: 2

Matice A koeficientů je:

A =

     1     0    -1
    -1     1     2


Matice neobsahuje všechny prvky kladné, např. prvek -1.
Ke všem prvkům matice A proto bude nyní přičtena konstanta k=3.
Nová matice A bude mít následující tvar:

A =

     4     3     2
     2     4     5


Nyní proběhne naplnění vektoru b pravých stran b1,b2,...,bn.

Zadejte prosím hodnotu pravé strany pro 1.řádek: 1
Zadejte prosím hodnotu pravé strany pro 2.řádek: 1

Vektor pravých stran b je:

b =

     1
     1
```

```
Naplnění vektoru f - cenových indexů c1,c2,...,cn.

Zadejte prosím hodnotu cenového indexu c1: 1
Zadejte prosím hodnotu cenového indexu c2: 1
Zadejte prosím hodnotu cenového indexu c3: 1

Vektor cenových indexů f je:

f =

       1              1              1

Nyní proběhne výpočet  primární  úlohy.
-----------------------------------
Optimization terminated.
Vektor smíšených strategií hráče Y je:

y =

       3/5            0              2/5

Nyní proběhne výpočet  duální  úlohy.
-----------------------------------
Optimization terminated.
Vektor smíšených strategií hráče X je:

x =

       3/5            2/5

Cena hry V je:

v =

       1/5
```

PŘÍLOHA P VII: ŘEŠENÍ ÚLOHY TYPU „VĚZŇOVO DILEMA“ POMOCÍ MATLABU

```
Command Window

Nyní proběhne naplnění výplatní matice z pohledu hráče(vězně) X:

Zadejte prosím hodnotu pro strategii (Přiznat, Přiznat): -3
Zadejte prosím hodnotu pro strategii (Přiznat, Nepřiznat): -1
Zadejte prosím hodnotu pro strategii (Nepřiznat, Přiznat): -4
Zadejte prosím hodnotu pro strategii (Nepřiznat, Nepřiznat): -2

Nyní proběhne naplnění výplatní matice z pohledu hráče(vězně) Y:

Zadejte prosím hodnotu pro strategii (Přiznat, Přiznat): -3
Zadejte prosím hodnotu pro strategii (Přiznat, Nepřiznat): -4
Zadejte prosím hodnotu pro strategii (Nepřiznat, Přiznat): -1
Zadejte prosím hodnotu pro strategii (Nepřiznat, Nepřiznat): -2

Výplatní matice hráče X je:

vezenX =

    -3    -1
    -4    -2


Výplatní matice hráče Y je:

vezenY =

    -3    -4
    -1    -2

Nashovo rovnovážné řešení je při použití strategii (Přiznat, Přiznat).
>>
```

PŘÍLOHA P VIII: ŘEŠENÍ KOOPERATIVNÍ HRY S PŘENOSNOU VÝHROU (PŘÍKLAD 3.3) POMOCÍ MATLABU

```
Command Window
Zadejte počet strategií hráče X: 3
Zadejte počet strategií hráče Y: 3

Nyní proběhne naplnění matice výplatních funkcí pro hráče X
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,1): 6
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,2): 8
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,3): 3
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,1): 1
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,2): 5
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,3): 6
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,1): 0
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,2): 15
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,3): 5

Nyní proběhne naplnění matice výplatních funkcí pro hráče Y
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,1): 10
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,2): 5
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,3): 2
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,1): 3
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,2): 6
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,3): 6
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,1): 0
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,2): 4
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,3): 5

Matice výher hráče X je:
A =

     6     8     3
     1     5     6
     0    15     5

Matice výher hráče Y je:
B =

    10     5     2
     3     6     6
     0     4     5

Zaručená výhra hráče X je: 3.
Zaručená výhra hráče Y je: 4.

Matice společných výher je:
C =

    16    13     5
     4    11    12
     0    19    10


Maximální společná výhra je: 19.

Hráčům se vyplatí spolupracovat, výhru si mohou rozdělit např. následujícím způsobem:

Hráč č.1 získá: 9.

Hráč č.2 získá: 10.
>>
```

PŘÍLOHA P IX: ŘEŠENÍ KOOPERATIVNÍ HRY S NEPŘENOSNOU VÝHROU (PŘÍKLAD 3.4) POMOCÍ MATLABU

```
Command Window
Zadejte počet strategií hráče X: 3
Zadejte počet strategií hráče Y: 3

Nyní proběhne naplnění matice výplatních funkcí pro hráče X
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,1): 100
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,2): 170
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,3): 160
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,1): 270
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,2): 150
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,3): 280
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,1): 90
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,2): 80
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,3): 50

Nyní proběhne naplnění matice výplatních funkcí pro hráče Y
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,1): 70
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,2): 190
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(1,3): 70
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,1): 150
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,2): 120
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(2,3): 140
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,1): 150
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,2): 130
Zadejte prosím hodnotu pro strategii(3,3): 30

Matice výher hráče X je:
A =

   100   170   160
   270   150   280
    90    80    50

Matice výher hráče Y je:
B =

    70   190    70
   150   120   140
   150   130    30

Zaručená výhra hráče X je: 150.
Zaručená výhra hráče Y je: 120.

Střední hodnota rozložení pravděpodobnosti je (240,160).
Nejblíže střední hodnotě je dvojice strategií (270,150).
>>
```