Lineární algebra a analytická geometrie – sbírka úloh a ešených p íklad

Linear algebra and analytic geometry – problems and solved examples

Klára Javornická

Bakalářská práce
2010

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Klára JAVORNICKÁ**
Osobní číslo:	**A06560**
Studijní program:	**B 3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Informační a řídicí technologie**
Téma práce:	**Lineární algebra a analytická geometrie – sbírka úloh a řešených příkladů**

Zásady pro vypracování:

ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. **Definujte základní pojmy lineární algebry.**
2. **Uveďte vzorové příklady a jejich řešení.**
3. **Napište zadání několika úloh a uveďte pouze jejich výsledky.**
4. **Definujte základní pojmy analytické geometrie lineárních útvarů.**
5. **Uveďte vzorové příklady (útvary, polohové a metrické vztahy) a jejich řešení.**
6. **V příkladech analytické geometrie zdůrazněte využití lineární algebry (vektory, soustavy rovnic, matice apod.)**
7. **Uveďte několik příkladů praktického využití definovaných pojmů a postupů.**

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **BIRKHOFF, Garrett, MAC LANE, Saunders. Prehľad modernej algebry. Bratislava : Alfa, 1979. 472 s.**
2. **PROSKURJAKOV, V.I.. Sbornik zadač po linejnoj algebre. Moskva: Nauka, 1970. 381 s.**
3. **ŠINDELÁŘ, Karel. Analytická geometrie pro začátečníky. Praha: SNTL, 1960. 142 s.**
4. **KOČANDRLE, M., BOČEK, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie. Praha: Prometheus, 2008. 222 s. ISBN 978-80-7196-163-5**
5. **Matematika online – MATEMATIKA I. URL: [cit. 2010-02-02].**

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martin Fajkus, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **5. března 2010**

Termín odevzdání bakalářské práce: **1. června 2010**

Ve Zlíně dne 5. března 2010

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky
①

L.S.

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan

doc. Ing. Ivan Zelinka, Ph.D.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit sbírku úloh a řešených příkladů z lineární algebry a analytické geometrie, která by měla sloužit jako učební pomůcka studentům FAME UTB Zlín v předmětu Matematika E1 a studentů FT UTB Zlín v předmětu Algebra a geometrie.

Klíčová slova: okruh, těleso, lineární vektorové prostor, vektor, matice, soustava lineárních rovnic, determinant, maticové rovnice, eukleidovský vektorový prostor, soustava souřadnic, skalární součin, vektorový součin, smíšený součin, lineární objekty.

ABSTRACT

The aim of this thesis was to create a collection of solved examples and problems of linear algebra and analytic geometry, which should serve as a learning tool for students FAME UTB Zlín in the subject Mathematics E1 and students FT UTB Zlín course in algebra and geometry.

Keywords: circuit element, a linear vector space, vector, matrix, system of linear equations, determinants, matrix equations, Euclidean vector space, coordinate system, the dot product, vector product, mixed product, linear objects.

Tímto bych chtěla poděkovat panu RNDr. Martinu Fajkusovi, Ph.D. za odborné vedení této práce, pomoc, ochotu a čas při jejím konzultování.

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

……….……………….
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD

Lineární algebra je matematický obor zabývající se „lineárními“ matematickými strukturami, jako jsou vektorové prostory. Analytická geometrie je část geometrie, která zkoumá geometrické útvary v euklidovské geometrii pomocí algebraických a analytických metod.V analytické geometrii jsou geometrické útvary v prostoru vyjadřovány čísly a rovnicemi ve zvolených souřadnicových soustavách. Mnohé z těchto problémů jsou úzce svázány s lineární algebrou.

Práce je rozdělena na část o lineární algebře a část o analytické geometrii. Celá práce má 10 kapitol. Každá obsahuje krátký teoretický úvod do problematiky a následují řešené příklady s výkladem a neřešené úlohy s výsledky.

Pro pochopení problematiky je potřebná znalost středoškolské matematiky. V textu je používána běžná symbolika známá ze střední školy. Pro označování základních číselných množin je užito těchto standardních symbolů:

N…….množina všech přirozených čísel

Z…….množina všech celých čísel

Q…….množina všech racionálních čísel

R…….množina všech reálných čísel

K……množina všech komplexních čísel.

I. LINEÁRNÍ ALGEBRA

1 ABSTRAKTNÍ ALGEBRA

Definice: Nechť G je neprázdná množina. Pak libovolné zobrazení $G \times G \to G$ se nazývá operace na množině G. Je-li při tomto zobrazení uspořádané dvojici $(a, b) \in G \times G$ přiřazen prvek $c \in G$, pak budeme obvykle psát: $a \bullet b = c$ a hovořit o operaci • .

Množina G spolu s operací • se nazývá **grupoid** a označuje symbolem (G , •).

Definice: Nechť (G , •) je grupoid. Jestliže platí:

- $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$, pro všechna $a, b, c \in G$ (tzv. asociativní zákon)
  pak se operace • nazývá asociativní operace a (G , •) se nazývá asociativní grupoid neboli **pologrupa.**
- $a \bullet b = b \bullet a$, pro všechna a, $c \in G$ (tzv. komutativní zákon)
  pak se operace • nazývá komutativní operace a (G, •) se nazývá komutativní grupoid.

Definice: Nechť (G, •) je grupoid. Prvek $e \in G$ se nazývá **neutrální prvek** (nebo též jednička) grupoidu (G, •), jestliže platí: $a \bullet e = a \;\wedge\; e \bullet a = a$, pro každý prvek $a \in G$.

V ta:V grupoidu existuje nejvýše jeden neutrální prvek.

Definice: Nechť (G, •) je grupoid s jedničkou e ; nechť $a \in G$. Pak prvek $x \in G$, pro který platí : $a \bullet x = e \;\wedge\; x \bullet a = e$ se nazývá **inverzní prvek** k prvku a (v grupoidu (G, •)).

V ta: V pologrupě s jedničkou ke každému prvku existuje nejvýše jeden inverzní prvek.

V ta: Nechť (G, •) je pologrupa s jedničkou e. Nechť a, $b \in G$ mají v (G, •) inverzní prvky a^{-1},b^{-1}. Pak platí:

- $e^{-1} = e$
- $(a^{-1})^{-1} = a$
- $(a \bullet b)^{-1} = b^{-1} \bullet a^{-1}$

Definice: Nechť (G, •) je pologrupa s jedničkou, s níž ke každému prvku existuje prvek inverzní. Pak (G, •) se nazývá **grupa**. Je-li navíc operace • komutativní, pak se grupa (G, •) nazývá komutativní grupa (nebo též abelovská grupa).

Definice: Nechť R je množina se dvěma operacemi + a • taková, že platí:

- (R, +) je komutativní grupa (neutrální prvek = „nula“ : a + 0 = a ;inverzní prvek –a; a +(-b) = a – b)
- (R, •) je pologrupa
- pro všechna a, b, c $\in$ R platí: $(a + b) \bullet c = c \bullet a + b \bullet c$
  $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ (tzv. distributivní zákony)

Pak R s operacemi + a • se nazývá **okruh** a označuje se (R, +, •).

V ta: Nechť (R, +, •) je okruh; a,b,c $\in$ R libovolné. Pak platí:

- $a \bullet (b - c) = a \bullet b - a \bullet c$; $(b - c) \bullet a = b \bullet a - c \bullet a$
- $a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0$
- $a \bullet (-b) = (-a) \bullet b = -(a \bullet b)$
- $(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$

Definice: Nechť (R, + , •) je okruh; nechť pro nějaké a, b $\in$ R platí:

$$a \neq 0 \quad \wedge \quad b \neq 0 \quad \wedge \quad a \,.\, b = 0\,.$$

Pak se prvky a ,b nazývají netriviální dělitelé nuly v okruhu (R, + , •).

Netriviální komutativní okruh s jedničkou, který nemá dělitele nuly se nazývá obor integrity.

Definice: Komutativní okruh (R, +, •) s vlastností, že (R – {0}, •) je grupa, se nazývá těleso.

Definice: Nechť (V, +) je komutativní grupa (jejíž prvky nazýváme vektory) a (T, + , •) je číselné těleso. Nechť pro každé číslo t ∈ T a každý vektor **u** ∈ V je definován vektor t • **u** ∈ V tak, že platí :

- t • (**u** + **v**) = t • **u** + t • **v**
- (t + s) • **u** = t • **u** + s • **u** pro libovolné t, s ∈ T a **u**, **v** ∈ V
- (t • s) • **u** = t • (s • **u**)
- 1 • **u** = **u**

Potom V se nazývá vektorový prostor nad číselným tělesem T.

ešené p íklady:

1. Rozhodněte, zda (M, ☼,•) je okruh. Přitom množina M a operace ☼, • jsou zadány takto:
   M = **Z** , x ☼ y = x + y – 1 , x • y = x + y – x · y
   a) Nejprve zjistíme, zda je (**Z**, ☼) komutativní grupa.
      x ☼ y = x + y – 1
      y ☼ x = y + x – 1 → je komutativní.
   b) Zjistíme, zda (**Z**, •) je pologrupa.

(x • y) • z = (x + y – x · y) • z =x +y –x · y +z –(x +y –x ·y)· z = x + y + z – xy – xz – yz + xyz

x • (y • z) = x • (y + z - y· z) = x + y + z – yz – x(y + z – yz) = x + y + z – xy – xz – yz + xyz

→ je asociativní.

c) Ověříme, zda platí distributivní zákony.

(x☼y)•z = (x + y – 1)•z = (x + y – 1 + z) – (x + y – 1)·z = x + y – 1 + z – xz – yz + z = x + z – xz + y + z – yz – 1 = x•z + y•z – 1 = x•z☼y•z x•(y☼z) = x•(y + z – 1) = x + y + z – 1 – xy – xz + x = x + y – xy + x + z – xz – 1 = x•y☼x•z

→platí distributivní zákony

=>(M,☼, •) je okruh.

2. Nechť (G, •) je grupa, nechť p ∈ G je pevný prvek. Na množině G definujeme operaci ⁎ takto: x ⁎ y = x • p • y pro všechny x, y ∈ G.
Rozhodněte, zda je (G, ⁎) je grupa.

a) Je asociativní?

(x ⁎ y) ⁎ z = (x • p • y) ⁎ z = x • p • y • p • z

x ⁎ (y ⁎ z) = x ⁎ (y • p • z) = x • p • y • p • z → je asociativní

b) Má jedničku pro všechny x ∈ G?

e ⁎ x = x	∧	x ⁎ e = x
e • p • x = x		x • p • e = x
(e • p • x) • x^{-1} = x ⁎ x^{-1}		x^{-1}• (x • p • e) = x^{-1}• x
e • p • e = e		e • p • e = e
e • p = e		e • p = e
e • p • p^{-1} = e • p^{-1}		p^{-1} • p • e = p^{-1}• e
e • e = e • p^{-1}		e • e = p^{-1}• e
e = e • p^{-1}		e = p^{-1}• e
e = p^{-1}		e = p^{-1}

c) Existuje inverze ke všem a?

ā ⁎ a = e	∧	a ⁎ ā = e
ā • p • a = e		a • p • ā = e
ā • p • a • a^{-1} = e • a^{-1}		a^{-1}• a • p • ā = a^{-1}• e

$\bar{a} \bullet p \bullet e = a^{-1}$	$e \bullet p \bullet \bar{a} = a^{-1}$
$\bar{a} \bullet p = a^{-1}$	$p \bullet \bar{a} = a^{-1}$
$\bar{a} \bullet p \bullet p^{-1} = a^{-1}$	$p^{-1} \bullet p \bullet \bar{a} = a^{-1}$
$\bar{a} \bullet e = a^{-1}$	$e \bullet \bar{a} = a^{-1}$
$\bar{a} = a^{-1}$	$\bar{a} = a^{-1}$

⇨ $(G,*)$ je grupa.

Úkoly:

1. Je dána množina **Q** x **Q** a definovány operace $\oplus, \odot$ takto:
   $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
   $(a, b) \odot (c, d) = (ac – 3bd, ad + bc)$ pro libovolné $(a, b), (c, d) \in$ **Q** x **Q**. Určete, zda (**Q** x **Q**, $\oplus$, $\odot$) je grupa, resp. obor integrity, resp. těleso.
   [(**Q** x **Q**,$\oplus$,$\odot$)je těleso]

2. Určete příklad konečného oboru integrity, který není tělesem.
   [neexistuje]

3. Je dán grupoid (G, •). Určete, zda (G, •) je komutativní grupa, jestliže G = **Z**;
   $x \bullet y = x + (-1)^x y$. [není komutativní]

4. Je dán grupoid (G, •). Rozhodněte, zda tento grupoid je komutativní, resp. asociativní, resp. zda má neutrální prvek. Přitom G = **Z**; $x \bullet y = |x|$
   [není komutativní, je asociativní, nemá neutrální prvek]

5. Určete příklad pologrupy s jedničkou, v níž některému prvku existují 2 prvky inverzní.
   [neexistuje]

2 VEKTORY A MATICE; OPERACE S MATICEMI A VEKTORY (ARITMETICKÝMI A GEOMETRICKÝMI)

Definice: Aritmetický vektor je uspořádaná n-tice prvků (typicky čísel), označovaných jako složky vektoru. Obecněji se dá vektor chápat jako abstraktní prvek vektorového prostoru, který se dá v různých souřadnicích vyjádřit různými n-ticemi, které se však považují za ten samý vektor.

Definice: S vektorem provádíme dvě základní operace, a to sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, které v této souvislosti nazýváme skalárem.

1) Sčítání vektorů přitom splňuje tyto základní vlastnosti:
   Pro všechny vektory **u**, **v**, **w** platí:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ - komutativní zákon
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ - asociativní zákon
- Existuje vektor **o** tak, že $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$
- Existuje vektor $(-\mathbf{u})$ takový, že $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}$

Nulový vektor **o** je jediný, který vyhovuje uvedené vlastnosti. Vektor $(-\mathbf{u})$ se nazývá opačný vektor k vektoru **u**; každý vektor má jediný opačný vektor. Rozdíl dvou vektorů definujeme $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

2) Násobení vektoru skalárem splňuje tyto základní vlastnosti:
   Pro všechny vektory **u**, **v** a všechny skaláry p, q platí:

- $p \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = p \cdot \mathbf{u} + p \cdot \mathbf{v}$ - distributivní zákon
- $(p + q) \cdot \mathbf{u} = p \cdot \mathbf{u} + q \cdot \mathbf{u}$ - distributivní zákon
- $p \cdot (q \cdot \mathbf{u}) = (p \cdot q) \cdot \mathbf{u}$ - asociativní zákon
- $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

V ta: Vektory $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_i)$ a $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_i)$ pro $i = 0 \ldots n$ jsou si rovny, pokud $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$ pro každé $i = 0 \ldots n$.

Definice: Skalární součin vektorů **u, v** (zapisujeme **u** • **v**) je reálné číslo **u** • **v** $= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$; velikost úhlu (odchylky) nenulových vektorů **u, v** je úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro který platí:

$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \bullet |\mathbf{v}|}$.

V ta: Vlastnosti vektorového součinu: pro libovolné vektory **u**, **v**, **w** a každý skalár p platí:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = - \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ - antikomutativní zákon
- $p \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (p \bullet \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$ - asociativní zákon
- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ - distributivní zákon

Definice: Smíšeným součinem tří vektorů **u**, **v**, **w** nazveme číslo **u** • (**v** × **w**), které označujeme (**u**, **v**, **w**).

V ta: Pro libovolné vektory **u**, **v**, **w, a** a každý skalár p platí:

- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = - (\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = - (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = - (\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$
- $p \bullet (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (p \bullet \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ - asociativní zákon
- $(\mathbf{u} + \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ - distributivní zákon

V ta: V E_3 platí vztah pro smíšený součin takto:

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \bullet v_2 \bullet w_3 + v_1 \bullet w_2 \bullet u_3 + w_1 \bullet u_2 \bullet v_3$$

$$- w_1 \bullet v_2 \bullet u_3 - u_1 \bullet w_2 \bullet v_3 - v_1 \bullet u_2 \bullet w_3$$

Definice: Maticí typu (m, n) nazýváme tabulku čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců.Zapisujeme to takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Číslu a_{ik} říkáme prvek ležící v i-tém řádku a k-tém sloupci matice. Matici A typu (m, n) zapisujeme někdy také jako A_{mn}. Čtvercovou maticí řádu n rozumíme matici , kde m = n.

V ta: Dvě matice A a B stejného typu (m, n) se rovnají (což zapisujeme A = B), právě tehdy když platí $a_{ik} = b_{ik}$ pro každé i, k.

V ta: Součtem dvou matic A a B stejného typu (m, n) je matice C = A + B téhož typu, právě tehdy když platí $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ pro každé i, k. Analogicky definujeme rozdíl C = A – B dvou matic.

V ta: Součinem reálného čísla c s maticí A je matice c•A téhož typu s prvky c•a_{ik} pro každé i, k.

V ta: Součinem matic A_{mn} a B_{np} je matice $C_{mp} = A_{mn} \cdot B_{np}$, která má prvky $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bullet b_{kj}$ pro každé i, j.

V ta:k-tá mocnina matice A_{nn} je matice A_{nn}^k, kterou získáme postupným násobením matice sebe samou ($A_{nn}^k = A_{nn}^{k-1} \bullet A_{nn}$).

V ta: Nechť A, B, C jsou matice stejného typu , O a E jsou nulová a jednotková matice, c, d jsou reálná čísla. Pak platí:

- A + B = B + A
- A + (B + C) = (A + B) + C
- A + O = O + A = A
- A – A = O
- (c +d) • A = c•A + d•A
- c •(A + B) = c•A + c•B
- c •(d•A) = (c • d) •A
- 1 • A = A
- c • O = O
- 0 • A = O

Matice (- 1) •A ≡ O – A se nazývá opačná matice k matici A a označujeme ji –A.

ešené p íklady:

1. Spočítejte matici A:

$$3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$a_{11} = 3\cdot 1 + 2 - 1 = 4$

$a_{12} = 3\cdot 4 + 6 - 0 = 18$

$a_{13} = 3\cdot 6 + 9 - 0 = 27$

$a_{14} = 3\cdot 2 + 0 - 5 = 1$, analogicky spočítáme i ostatní řádky nové matice A

výsledkem je matice $A = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 27 & 1 \\ 21 & 20 & 20 & 0 \\ 10 & -2 & -3 & 6 \\ -1 & 5 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

2. Spočítejte vektor **u**:

$6\cdot(3; 6; 1; 7) - 2\cdot (1; 4; 6; 7) + (0; 3; 5; 9) = \mathbf{u}$

$u_1 = 6\cdot 3 - 2\cdot 1 + 0 = 16$

$u_2 = 6\cdot 6 - 2\cdot 4 + 3 = 31$

$u_3 = 6\cdot 1 - 2\cdot 6 + 5 = -1$

$u_4 = 6 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 9 = 37$

výsledný vektor **u** = (16; 31; -1; 37)

3. Jsou dány vektory **u** = (3; 6; 1; 7) a **v** = (1; 4; 6; 7). Spočítejte skalární součin těchto vektorů.

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 7 \cdot 7 = 3 + 24 + 6 + 49 = 82$

Skalární součin těchto vektorů je roven 82.

4. Jsou dány vektory **a** = (2; 8; 5), **b** = (1; 3; 7), **c** = (5; 4; 6). Spočítejte vektorový součin vektorů **a** a **b** a smíšený součin těchto vektorů **a**•(**b** × **c**).

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \left(\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) =$$

$$((8 \cdot 7 - 3 \cdot 5); -(2 \cdot 7 - 1 \cdot 5); (2 \cdot 3 - 1 \cdot 8)) = ((56 - 15); -(14 - 5); (6 - 8)) = (41; -9; -2)$$

Výsledný vektor je (41; -9; -2).

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3) =$$

$$=(2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 8 \cdot 7 - 5 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 7 - 1 \cdot 8 \cdot 6) = 36 + 20 + 280 - 75 - 56 - 48$$

$$= = 336 - 179 = 157$$

Výsledek smíšeného součinu je 157.

5. Spočítejte součin matic A•B = C, kde matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ a matice

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$c_{11} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 1 + 24 + 0 + 2 = 27$

$c_{12} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 0 + 12 + 30 + 2 = 44$

$c_{13} = 1{\cdot}0 + 4{\cdot}2 + 6{\cdot}7 + 2{\cdot}3 = 0 + 8 + 42 + 6 = 56$

$c_{14} = 1{\cdot}5 + 4{\cdot}0 + 6{\cdot}9 + 2{\cdot}0 = 5 + 0 + 54 + 0 = 59$

analogicky spočítáme i ostatní řádky výsledné matice C

výsledná matice C = $\begin{pmatrix} 27 & 44 & 56 & 59 \\ 44 & 43 & 47 & 95 \\ 14 & 13 & 24 & 24 \\ 15 & 29 & 41 & 36 \end{pmatrix}$

6. Spočtěte třetí mocninu matice A z předchozího příkladu.

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Analogicky podle předchozího příkladu spočítáme součin A•A zleva a získáme matici

$A^2 = \begin{pmatrix} 51 & 38 & 40 & 38 \\ 65 & 73 & 83 & 41 \\ 14 & 29 & 44 & 26 \\ 28 & 22 & 26 & 29 \end{pmatrix}$, kterou zprava násobíme maticí A. Protože se jedná o totožné matice, je pořadí násobení zaměnitelné.

Výsledná matice $A^3 = \begin{pmatrix} 475 & 848 & 688 & 416 \\ 898 & 863 & 1002 & 668 \\ 378 & 326 & 377 & 326 \\ 282 & 328 & 420 & 273 \end{pmatrix}$

Úkoly:

1. Vezměte vektory **a**(2; 8; 5;0), **b**(1; 3; 7; 0), **c**5; 4; 6; 0), **u**(3; 6; 1; 7), **v**(1; 4; 6; 7) a spočítejte vektor **d** podle následujících vztahů:
   a) **d** = 4**u** + 3**v** – 7**b** [(8; 15; −27; 49)]
   b) **d** = 6**b** – 3**a** + 7**c** [(35; 22; 49)]
   c) **d** = (**a**• **b**) · **c** – 6**b** + 5**a** [(309; 266; 349)]
   d) **d** = **c** × **a** + 4**b** [(−24; 25; 60)]
   e) **d** = **u**· (**v** •**a**) + **b** × **c** [(182; 413; 55; 448)]
   f) **d** = 7**u** + 10**a** – 6**b** + 8**v** [(43; 136; 63; 105)]

2. Jsou dány matice A, B, C, nalezněte matici D podle následujících vztahů.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $3 \cdot A - B + 6 \cdot C = D$ $\qquad \left[D = \begin{pmatrix} 14 & 5 & 29 \\ 27 & 17 & 6 \\ 4 & 32 & 11 \end{pmatrix} \right]$

b) $A \cdot B = D$ $\qquad \left[D = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 15 \\ 12 & 6 & 10 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right]$

c) $B \cdot A = D$ $\qquad \left[D = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 14 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix} \right]$

d) $C \cdot A - 6 \cdot B + A \cdot B = D$ $\qquad \left[D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 22 \\ 2 & 4 & 28 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \right]$

e) $B^3 = D$ $\qquad \left[D = \begin{pmatrix} 25 & 14 & 26 \\ 24 & 13 & 18 \\ 70 & 38 & 85 \end{pmatrix} \right].$

3 LINEÁRNÍ VEKTOROVÝ PROSTOR

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad T; nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V. Pak vektor $\mathbf{u} = t_1.\mathbf{u}_1 + \ldots + t_k \bullet \mathbf{u}_k$, kde $t_1, \ldots, t_k \in T$ se nazývá lineární kombinace konečné posloupnosti vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ nebo stručně lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Množina všech lineárních kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ se bude označovat symbolem:

$L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$, tzn. $L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \{t_1.\mathbf{u}_1 + \ldots + t_k \bullet \mathbf{u}_k \mid t_1, \ldots, t_k \in T \text{ libovolné}\}$

Definice: Nechť V je vektorový prostor na T a nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je konečná posloupnost vektorů z V. Jestliže existují čísla $t_1, \ldots, t_k \in T$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, tak, že $t_1.\mathbf{u}_1 + \ldots + t_k \bullet \mathbf{u}_k = \mathbf{o}$, pak říkáme, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé. V opačném případě říkáme, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé.

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad T. Konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ z V se nazývá báze vektorového prostoru V, jestliže platí:

- Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé
- Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ generují vektorový prostor V, tzn. $L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = V$.

Definice:Řekneme, že konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ z V je maximální lineárně nezávislá posloupnost vektorů ve V, jestliže:

- Vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé
- Pro libovolné $\mathbf{w} \in V$ jsou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}$ lineárně závislé.

V ta: Konečná posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ je bází vektorového prostoru V právě tehdy když je maximální lineárně nezávislou posloupností vektorů ve V.

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad T. Pak

- Je-li V nulovým vektorovým prostorem (tzn. $V = \{\mathbf{o}\}$), říkáme, že dimenze V je nula
- Existuje-li báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ prostoru V, pak říkáme, že dimenze V je k
- Je-li $V \neq \{\mathbf{o}\}$ a nemá-li žádnou bázi, pak říkáme, že dimenze V je nekonečno.

Píšeme: dimV = 0, resp. dimV = k, resp. dimV = ∞.

Úmluva: všude v dalším se budeme zabývat pouze konečnědimenzionálními vektorovými prostory.

Definice: Matici A považujeme za řádkově ekvivalentní s maticí B, píšeme A ~ B, pokud jsme matici B získali z matice A pomocí tzv. řádkových elementárních transformací, a to:

- Výměnou dvou řádků
- Vynásobením řádku číslem různým od nuly
- Přičtením násobku řádku k jinému řádku

Pomocí těchto elementárních transformací můžeme danou matici převést na ekvivalentní matici, která bude v tzv. trojúhelníkovém tvaru, to bude znamenat, že pod hlavní diagonálou bude mít samé nuly.

Definice: Matice má hodnost h, jestliže trojúhelníková matice řádkově ekvivalentní s A má právě h nenulových řádků.

ešené p íklady:

1. Jsou dány vektory **a**(3; 2; 1), **b**(7; 5; 0), **c**(– 2; 3; 4), **d**(12; 4; – 3). Vyjádřete vektor **d** jako lineární kombinaci vektorů **a**, **b**, **c**.

$\mathbf{d} = t_1 \cdot \mathbf{a} + t_2 \cdot \mathbf{b} + t_3 \cdot \mathbf{c}$

$12 = 3t_1 + 7t_2 - 2t_3$

$4 = 2t_1 + 5t_2 + 3t_3$

$\underline{-3 = t_1 + 4t_3}$ dostáváme tři rovnice o třech neznámých t_1, t_2, t_3

Z poslední rovnice můžeme vyjádřit $t_1 = -3 - 4t_3$ a dosadit do zbylých rovnic

$12 = -9 - 12t_3 + 7t_2 - 2t_3$

$\underline{4 = -6 - 8t_3 + 5t_2 + 3t_3}$

$21 = 7t_2 - 14t_3$

$\underline{10 = 5t_2 - 5t_3}$ tuto rovnici vykrátíme 5 a vyjádříme $t_2 = 2 + t_3$

$21 = 14 + 7t_3 - 14t_3$ odkud $t_3 = -1$, zpětným dosazením $t_2 = 1$ a $t_1 = 1$

Vektor $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$

2. Rozhodněte, zda dané vektory z vektorového prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé, je-li $\mathbf{u}_1(1; 1; -1; 2)$, $\mathbf{u}_2(-4; 1; 1; -3)$, $\mathbf{u}_3(2; -3; 1; -1)$, $\mathbf{u}_4(1; 1; 1; 1)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Elementárními úpravami jsme dostali matici ve trojúhelníkovém tvaru a zjistili jsme, že soustava má nekonečně mnoho řešení, z čehož vyplývá, ž vektory jsou lineárně závislé.

3. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{u}_1(2; 1; 2)$, $\mathbf{u}_2(-3; 0; 1)$, $\mathbf{u}_3(5; 4; 3)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$.

Nejprve zjistíme, zda jsou vektory lineárně nezávislé.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 0 \end{array}\right)$$

Vektory jsou lineárně nezávislé

Můžeme tedy říci, že vektorový prostor $\mathbf{R}^3$ má dimenzi 3 a vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ tvoří bázi tohoto prostoru, protože jsou lineárně nezávislé, jsou 3 a dimenze je také 3.

4. Určete hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice má 3 nenulové řádky, má tedy hodnost 3, píšeme h(A) = 3.

Úkoly:

1. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ jsou dány vektory **u, v, w.** Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro které jsou tyto vektory lineárně závislé, resp. lineárně nezávislé.

   a) $\mathbf{u}(1; 1; 1)$, $\mathbf{v}(1; a; 1)$, $\mathbf{w}(2; 2; a)$

[pro $a = 1 \vee a = 2$ jsou lineárně závislé, pro $a \in \mathbf{R} - \{1; 2\}$ jsou lineárně nezávislé]

   b) $\mathbf{u}(0; 2; a)$, $\mathbf{v}(-1; 3; 2)$, $\mathbf{w}(2; -4; a)$

[pro $\forall a \in \mathbf{R}$ jsou lineárně nezávislé]

2. Nechť **u, v, w** jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru V. Rozhodněte, zda následující vektory z V jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

a) $(2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 3\mathbf{w})$, $(\mathbf{u} + 4\mathbf{v} - \mathbf{w})$, $(3\mathbf{u} + 5\mathbf{v} + 4\mathbf{w})$

[vektory jsou lineárně závislé]

b) $(\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w})$, $(3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathrm{w})$, $(7\mathbf{u} + 14\mathbf{v} - 13\mathbf{w})$

[vektory jsou lineárně závislé]

3. Určete hodnost matice A, je-li:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$ $[h(A) = 2]$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$ $[h(A) = 3]$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $[h(A) = 2]$

4. Rozhodněte, zda dané matice A, B, C, D tvoří bázi vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ [ano]

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ [ne]

4 SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Je dán systém m lineárních rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots..+a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots..+a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots.$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots..+a_{mn}x_n = b_m$$

Kde a_{ik} jsou reálná čísla a x_k jsou neznámé. Pomocí maticového počtu můžeme tento systém zapsat takto: AX = B, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Řešením této tzv. nehomogenní soustavy rozumíme uspořádanou n-tici (p_1,……, p_n) takovou, že po dosazení p_i za x_i přejdou všechny rovnice soustavy v identity. Řešitelnost soustavy lineárních rovnic určuje Frobeniova věta:

Frobeniova v ta: Soustava m lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice soustavy A je rovna hodnosti h´ matice rozšířené$(A|B) = (a_{ik}|b_i)$. Přitom soustava má řešení jediné, právě tehdy když h = h´ = n, tedy počtu neznámých , a má nekonečně mnoho řešení závislých na volbě n – h parametrů, právě tehdy když h = h´ $<$ n.

V ta:Řešení soustavy lineárních rovnic pomocí tzv. Gaussovy eliminační metody má následující postup:

1. Systém rovnic zapíšeme pouze pomocí jeho rozšířené matice $(A|B)$.
2. Pomocí řádkových elementárních transformací upravíme matici $(A|B)$ na trojúhelníkový tvar.
3. Porovnáním hodností h, h´ rozhodneme, zda má soustava řešení, a v kladném případě určíme jeho složky.

Definice: Systém lineárních rovnic, ve kterém jsou všechny pravé strany b_i = 0 nazýváme homogenní nebo také bez pravých stran. Homogenní soustavy zapisujeme pouze pomocí matice soustavy. Podle Frobeniovy věty má soustava homogenních rovnic vždy řešení, zřejmě je jím řešení ze samých nul a říkáme mu proto triviální řešení.

ešené p íklady:

1. Vypočtěte soustavu nehomogenních rovnic:

$3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -3$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 51 & 51 \end{array}\right)$$

=> $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = -1$,

$x_1 = -1$

Soustava má jedno řešení $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

2. Vypočtěte soustavu homogenních rovnic:

$2x_1 - x_2 = 0$

$3x_2 - 2x_3 = 0$

$4x_1 - x_4 = 0$

$-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ => $h = 3$, $n = 4$ a soustava má podle Frobeniovy věty nekonečně mnoho řešení. Zvolíme-li poslední neznámou za parametr $x_4 = t$ tak ostatní složky vyjádříme pomocí něj.

Výsledkem je $x_4 = t$, $x_3 = \frac{3}{4}t$, $x_2 = \frac{1}{2}t$, $x_1 = \frac{1}{4}t$.

3. Vypočtěte soustavu nehomogenních rovnic:

$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2$

$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3$

$7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 15 & 21 & -12 & -18 & 9 \\ 21 & -12 & 3 & 9 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{soustava nemá řešení}$$

Úkoly:

1. Vypočtěte:

a) $2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2$
$x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$
$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$

[soustava nemá řešení]

b) $6x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3$
$2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1$
$2x_1 - 3x_2 + 13x_3 + 18x_4 = 1$

$[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u - \frac{1}{16}v; u; -\frac{11}{8}v; v\right), \text{pro } u,v \in \mathbf{R}]$

c) $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4$
$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$
$2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1$

$\left[\left(u; \frac{3}{2}v - 2u - 3; v - 2; 6 - \frac{7}{2}v; v\right), \text{pro } u,v \in \mathbf{R}\right]$

d) $x_2 + x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$
$x_1 + 2x_2 = -1$

$\left[x_4 = 3, x_3 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}, x_1 = 2\right]$

e) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 18$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$

$[x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 8]$

f) $3x_1 + x_2 - x_3 = 7$
$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 15$
$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9$ $[x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2]$

5 DETERMINANT

Definice: Nechť M = $\{1,2,\ldots,n\}$ je konečná množina o n prvcích. Pak bijektivní zobrazení P množiny M na sebe se nazývá permutace množiny M nebo krátce permutace. Permutaci P definovanou: $P(i_t) = j_t$, pro t = 1,…..,n budeme zapisovat ve formě dvouřádkové tabulky tvaru P = $\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$.

V ta: Počet různých permutací n-prvkové množiny je roven n!

Definice: Permutace P se nazývá sudá permutace, resp. lichá permutace, jestliže součet počtu inverzí v horním a dolním řádku tabulky permutace P je sudé číslo, resp. liché číslo. Hovoříme pak též o paritě permutace.

Definice: Nechť A = (a_{ij}) je čtvercová matice řádu n nad tělesem T. Pak determinant matice A je číslo z tělesa T, označené detA (nebo též $|A|$) a definované vztahem:

detA = $\sum_{(j_1, \ldots j_n)} (-1)^{I(j_1,\ldots,j_n)} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$, kde $I(j_1,\ldots,j_n)$ značí celkový počet inverzí v permutaci $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ použitých řádkových a sloupcových indexů. Sčítání se provádí přes všechna různá pořadí $(j_1,\ldots,j_n)$ sloupcových indexů. Součin $(-1)^{I(j_1,\ldots,j_n)} \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ se nazývá člen determinantu.

V ta: Nechť v matici A

- Jeden řádek sestává ze samých nul, potom je detA = 0
- Dva různé řádky jsou shodné, potom je detA = 0
- Jeden řádek je t-násobkem jiného řádku ($t \in T$ lib.) , potom je detA = 0
- Jeden řádek je lineární kombinací ostatních řádků, potom je detA = 0

V ta: Hodnota determinantu matice A se nezmění, jestliže

- K jednomu řádku matice A přičteme libovolný násobek jiného řádku
- K jednomu řádku matice A přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků
- Jeden řádek matice A ponecháme beze změny a k ostatním řádkům přičteme jeho libovolné násobky

V ta: Cramerovo pravidlo pro 2 rovnice o 2 neznámých.

Je dána soustava lineárních rovnic: $a_{11} x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$|D|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Nahradíme-li koeficienty u x_1 koeficienty pravé strany , dostaneme $|D_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ a nahradíme-li koeficienty u x_2 koeficienty pravé strany , dostaneme $|D_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Je-li $|D| \neq 0$, pak má tato soustava řešení: $x_1 = \frac{|D_1|}{|D|}$ a $x_2 = \frac{|D_2|}{|D|}$. Pravidlo platí i obecně.

V ta: Sarrussovo pravidlo: pro výpočet determinantu třetího stupně platí tento vztah:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

V ta: O rozvoji determinantu:

Determinant se rovná součtu součinů prvků vybraných z jednoho řádku (sloupce) s jejich algebraickými doplňky. Podle řádku: $|A| = a_{i1}|A_{i1}| + \ldots.. + a_{in}|A_{in}|$

Podle sloupce: $|A| = a_{1j}|A_{1j}| + \ldots.. + a_{nj}|A_{nj}|$

V ta: Při výpočtu determinantu lze využít také Gaussovu eliminační metodu, neboť determinant matice v trojúhelníkovém tvaru je roven součinu členů hlavní diagonály,tzn.

$|A| = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

ešené p íklady:

1. Jsou dány tři prvky a, b, c. Kolik možností, kde záleží na pořadí a každý prvek je pouze jednou, z nich lze vytvořit?

   $P(3) = 3!$

   $P(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

   Lze vytvořit 6 permutací.

2. Spočítejte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ všemi způsoby.

   a) Z definice:

$|A|=3 \cdot 3 \cdot 6 + (-2) \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 \cdot (-4) - (-4) \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 6$

$|A| = 54 + 8 + 16 - 24 + 24 + 12 = 90$

b) Pomocí rozvoje podle 2.řádku:

$$|A| = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + = (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$|A| = -(-12 - 16) + 3(18 - 8) - 2(-12 - 4) = 28 + 30 + 32 = 90$

c) Pomocí GEM:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 8 \\ 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 11 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 90$$

d) Podle Sarrusova pravidla:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 90$$

$$\begin{matrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Úkoly:

1. Kolik různých pěticiferných čísel bez opakování cifer lze napsat z čísel 1, 2, 3, 4, 5?
[120]

2. Pokud se zvětší počet prvků o 2, zvětší se počet permutací 42-krát. Kolik prvků na to potřebujeme?
[potřebujeme 5 prvků]

3. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ [−46]

b) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ [−100]

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ $[-4]$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $[-195]$

e) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ $[18]$

f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ $[30]$

6 INVERZNÍ MATICE

Definice:Čtvercová matice A se nazývá regulární matice (resp. singulární matice), je-li $|A| \neq 0$ (resp. $|A| = 0$).

Definice: Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice X s vlastností $A \cdot X = E_n \wedge X \cdot A = E_n$ (pokud taková existuje) se nazývá inverzní matice k matici A a označuje se symbolem A^{-1}.

V ta: Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Potom k matici A existuje matice inverzní $\Leftrightarrow$ A je regulární matice.

V ta: Nechť A je regulární matice. Pak platí: $A^{-1} = \left(\frac{1}{|A|}\right) \cdot A^*$. Kde A^* je matice adjungovaná, tzn. $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$. Adjungovaná matice je matice, v níž na i,j-tém místě je A_{ji} tzn. algebraický doplněk prvku, stojícího na j,i-tém místě v původní matici A. (Pozor na pořadí indexů.)

V ta: Nechť A,B jsou regulární matice řádu n. Pak platí:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

ešené p íklady:

1. Je dána matice A. zjistěte, zda je singulární nebo regulární a v případě je-li regulární, spočítejte matici inverzní oběma způsoby.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Nejprve zjistíme, zda je matice singulární, resp. regulární.

$|A| = 1 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 0 + 2 + 1 - 3 - 0 - 2 = -2$

Matice A je regulární, protože $|A| \neq 0$.

b) Spočítáme matici inverzí podle definice:

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, kde $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (3 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = -2$ analogicky ostatní prvky A^*

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Spočítáme inverzní matici podle GEM:

Pomocí GEM z matice A uděláme jednotkovou matici E a z jednotkové matice E nám vznikne A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že jsme použili stejnou matici, zkontrolovali jsme si takto výsledek.

Úkoly:

1. K dané matici A nalezněte inverzní matici A^{-1}a to jednak pomocí adjungované matice a jednak pomocí elementárních řádkových úprav.
2.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\left[A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}\right]$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ [inverzní matice neexistuje]

3. K dané matici A nalezněte inverzní matici A^{-1}, je-li:

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & -16 & -11 & 12 \\ -6 & -6 & -4 & 5 \\ -11 & -10 & -7 & 8 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

b) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 13 & 0 & -6 \\ 3 & 10 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -484 & -726 & 252 & 229 \\ 148 & 222 & -77 & -70 \\ -25 & -38 & 13 & 12 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

c) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

7 MATICOVÉ ROVNICE A MATICE P ECHODU

V ta: Rovnice, ve kterých je neznámou matice, nazýváme maticové rovnice. Můžeme rozlišit několik základních tvarů maticových rovnic.

- A + X = B, kde X je neznámá matice a A; B ;X jsou matice stejného typu.
- AX = B, resp. XA = B kde X je neznámá matice a A; X resp. X; A jsou násobitelné matice.
- AXB = C, kde X je neznámá matice a A ;X; B jsou násobitelné matice.

Řešit maticovou rovnici znamená najít takovou matici, po jejímž dosazení do rovnice na místo neznámé dostaneme pravdivý výrok. Při řešení rovnic, které nejsou v základním tvaru postupujeme tak, že je pomocí pravidel pro počítání s maticemi upravíme do základního tvaru a ty pak řešíme níže popsaným způsobem.

Rovnice typu A + X = B řešíme odečtením matice A od obou stran rovnice.

U řešení rovnic typu AX = B záleží na tom, je-li matice A regulární. V tom případě pak existuje inverzní matice A^{-1}. Pokud vynásobíme zleva obě strany rovnice touto inverzní maticí, převedeme tím rovnici do tvaru $A^{-1}AX = A^{-1}B$, tedy: $X = A^{-1} B$.

V případě, kdy matice A není regulární, tj. je singulární nebo není čtvercová, inverzní matici A^{-1} nenalezneme a musíme použít jiný postup, spočívající v rozepsání součinu AX podle definice součinu matic. Porovnáním matic na levé a pravé straně rovnice dostaneme soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením jsou prvky neznámé matice. Stejně tak záleží na regulárnosti matic A; B i u rovnic typu AXB = C. Jestliže jsou obě matice regulární, najdeme k nim inverzní matice A^{-1}; B^{-1}. Vynásobíme-li pak obě strany rovnice zleva A^{-1} a zprava B^{-1} převedeme tím rovnici do tvaru $A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1} CB^{-1}$, tedy:

$X = A^{-1}CB^{-1}$.

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad T a nechť $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ a $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ jsou dvě jeho báze. Nechť dále je : $v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n$

$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n$$

$$\vdots$$

$$v_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n$$

Pak matice A tvaru:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se nazývá matice přechodu od báze $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ k bázi $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$.

V ta: Nechť $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ a $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ jsou dvě báze vektorového prostoru V nad T. Nechť A je matice přechodu od báze $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$ k bázi $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$. Potom A^{-1} je maticí přechodu od báze $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ k bázi $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n$.

ešené p íklady:

1. Vyřešte maticovou rovnici X·A = C, kde matice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Použijeme větu o násobení matic a získáme 9 rovnic a 9 neznámých, které vyřešíme.

$1 = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13}$ $\qquad$ $1 = 2x_{21} + x_{22} + 3x_{23}$ $\qquad$ $1 = 2x_{31} + x_{32} + 3x_{33}$

$1 = 4x_{11} + 3x_{12} + x_{13}$ $\qquad$ $1 = 4x_{21} + 3x_{22} + x_{23}$ $\qquad$ $1 = 4x_{31} + 3x_{32} + x_{33}$

$\underline{1 = x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13}}$ $\qquad$ $\underline{1 = x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23}}$ $\qquad$ $\underline{1 = x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33}}$

$x_{11} = 1 - 2x_{12} - 4x_{13}$ doplníme do 1. a 2. rovnice

$2 - 4x_{12} - 8x_{13} + x_{12} + 3x_{13} = 1$

$\underline{-8x_{12} - 16x_{13} + 3x_{12} + x_{13} = 1}$

$-5x_{13} - 3x_{12} = -1 \quad /\cdot(-3)$

$\underline{-15x_{13} - 5x_{12} = -3}$ $\quad$ po vynásobení sečteme tyto rovnice

$4x_{12} = 0$

$x_{12} = 0, \ x_{13} = \frac{1}{5}, \ x_{11} = \frac{1}{5}$

Protože mají trojice rovnic stejné koeficienty u neznámých, bude mít výsledná matice tři totožné řádky.

Výsledná matice je $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

2. Vyřešte maticovou rovnici A·X = C, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Použijeme inverzní matici A^{-1} vynásobíme jí celou rovnici zleva. Dostaneme rovnici:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice X = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Vyřešte maticovou rovnici A·X·B = C, kde A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,

   C = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Maticí A^{-1} vynásobíme celou rovnici zleva a maticí B^{-1} celou rovnici zprava a dostaneme:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice X = $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Vyřešte maticovou rovnici 3A – 2X + B = A + B.

$$3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} & 2x_{13} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 11 & 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} & 2x_{13} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 11 & 4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} & 2x_{13} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} & 2x_{13} \\ 2x_{21} & 2x_{22} & 2x_{23} \\ 2x_{31} & 2x_{32} & 2x_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Výsledná matice X = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ je dána báze **u** a matice přechodu A od báze **u** k bázi **v**. Určete bázi **v**.

$\mathbf{u}_1(1; 1; 1)$, $\mathbf{u}_2(1; 1; 0)$, $\mathbf{u}_3(1; 0; 0)$

A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

$\mathbf{v}_1 = 2\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ $\quad \mathbf{v}_1(2; 3; 2)$

$\mathbf{v}_2 = 2\,\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$ $\quad \mathbf{v}_2(3; 1; 2)$

$\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ $\quad \mathbf{v}_3(4; 3; 3)$

6. Nalezněte matici přechodu X od báze $\mathbf{u}_1(2; -3)$, $\mathbf{u}_2(-1; 1)$ k bázi $\mathbf{v}_1(1; 0)$, $\mathbf{v}_2(0; -2)$ vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$.

$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ do této rovnice doplním vektory bází

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ vyřešíme tuto maticovou rovnici

Matice přechodu X = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Úkoly:

1. Řešte maticovou rovnici:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}\right]$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} 1-2t & t \\ -4-2s & s \end{pmatrix}, \text{kde } t,s \in \mathbf{R}\right]$

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [matice X neexistuje]

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right]$

2. Nalezněte matici přechodu od báze (1) k bázi (2) vektorového prostoru V, je-li:

a) $V = \mathbf{R}^3$

(1) : $\mathbf{u}_1(1; 2; 1)$, $\mathbf{u}_2(2; -1; 3)$, $\mathbf{u}_3(-2; 3; 2)$

(2) : $\mathbf{v}_1(-5; 9; 2)$, $\mathbf{v}_2(6; -10; 5)$, $\mathbf{v}_3(-1; 2; 9)$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

b) $V = \mathbf{R}^4$

(1) : $\mathbf{u}_1(1; 2; 0; 0)$, $\mathbf{u}_2(0; 1; 1; 0)$, $\mathbf{u}_3(1; 0; 0; -1)$, $\mathbf{u}_4(1; 1; -1; 1)$

(2) : $\mathbf{v}_1(2; 2; 0; 0)$, $\mathbf{v}_2(3; 3; -1; 0)$, $\mathbf{v}_3(2; 4; 0; 1)$, $\mathbf{v}_4(2; 3; 1; -1)$

$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

8 LINEÁRNÍ VEKTOROVÝ PROSTOR SE SKALÁRNÍM SOU INEM; EUKLEIDOVSKÝ VEKTOROVÝ PROSTOR

Definice: Skalárním součinem **u** • **v** vektorů **u** , **v** nazýváme číslo , pro které platí **u** • **v** = 0, je-li jeden z vektorů nulový a dále **u** • **v** = |**u**| • |**v**| • cos φ pro nenulové vektory, kde φ je dutý úhel vektorů **u** , **v**. Platí , že $|\mathbf{u}| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \mathbf{u}_i}$ a $|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \mathbf{v}_i}$.

V ta: Pro všechny vektory **u**, **v**, **w** a každý skalár p platí:

- **u** • **v** = **v** • **u** - komutativní zákon
- **u** • (**v** + **w**) = **u** • **v** + **u** • **w** - distributivní zákon
- p • (**u** • **v**) = (p • **u**) • **v** - asociativní zákon
- $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 \geq 0$; $|\mathbf{u}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$

V ta: Ze vzorce pro skalární součin lze vyjádřit délku vektoru **u** a úhel mezi dvěma vektory **u**, **v**:

- $|\mathbf{u}| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \mathbf{u}_i}$ je délka vektoru **u**
- $\cos\varphi = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \bullet |\mathbf{v}|}$ odtud lze vypočítat úhel φ mezi vektory **u**, **v**

Dva nenulové vektory budou kolmé, právě tehdy když jejich skalární součin je roven nule ($\cos 90° = 0$).

V ta: Je-li délka vektoru |**u**| = 1, pak říkáme , že vektor **u** je normovaný. Je-li **u** ≠ **o**, pak $\frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}$ je normovaný vektor.

V ta: Vektorový prostor , v němž je definován skalární součin , se nazývá eukleidovský vektorový prostor nebo krátce eukleidovský prostor. Nechť V je eukleidovský prostor, pak platí:

- **u** • (**v** + **w**) = (**u** • **v**) + (**u** • **w**)
- p • (**u** • **v**) = (p • **u**) • **v**
- $\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \mathbf{u}_i\right) \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i r_j (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j)$ pro $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j \in V$ a $r_j, p, p_i \in$ **R** lib.
- **o**•**u** = **u**•**o** = 0
- **u**•**u** = 0 ⇔ **u** = 0

Definice: Nechť V je eukleidovský prostor a nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je konečná posloupnost vektorů z V. Řekneme, že :

1. posloupnost $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ je ortogonální (nebo stručně, že vektory $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ jsou ortogonální) jestliže je : $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ pro každé i,j = 1,…. , n ∧ i ≠ j
2. posloupnost $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ je ortonormální (nebo stručně, že vektory $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ jsou ortonormální), je-li ortogonální a každý vektor je normovaný.
3. Posloupnost $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$ je ortogonální (resp. ortonormální) báze eukleidovského prostoru V, jestliže je ortogonální (resp. ortonormální) a navíc je bází prostoru V.

V ta: Nenulové ortogonální vektory eukleidovského prostoru V jsou lineárně nezávislé.

V ta: Nechť V je eukleidovský prostor; $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n \in$ V libovolné. Pak existují ve V ortogonální vektory $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, které generují tentýž podprostor jako vektory $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n$, tzn. platí: $L(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) = L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$.

D kaz: Důkaz předchozí věty matematickou indukcí se nazývá Gram-Schmidtův ortogonalizační proces a vypadá následovně:

1) Pro n = 1 tvrzení platí (stačí položit $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1$)
2) Předpokládejme, že tvrzení věty platí pro 1,2,…, n-1 (n≥2). Tedy existují ortogonální vektory $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1}$ tak, že platí: (2) $L(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{n-1}) = L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n-1})$.

Položme : (3) $\mathbf{e}_n = p_1\mathbf{e}_1 + \ldots + p_{n-1}\mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{u}_n$, kde $p_i \in \mathbf{R}$ a určíme koeficienty p_i tak, aby $\mathbf{e}_n \bullet \mathbf{e}_i = 0$, pro i = 1,…,n-1. Ale po provedení skalárního součinu vektoru $\mathbf{e}_i$ s oběma stranami (3) dostaneme:

$$\mathbf{e}_n \bullet \mathbf{e}_i = 0 = p_i(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_i) + (\mathbf{u}_n \bullet \mathbf{e}_i), \text{ odkud } p_i = \begin{cases} -(\mathbf{u}_n \bullet \mathbf{e}_i)/(\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_i), & \text{je} - \text{li } \mathbf{e}_i \neq \mathbf{o} \\ \text{libovolné}, & \text{je} - \text{li } \mathbf{e}_i \neq \mathbf{o} \end{cases}.$$

Potom tedy vektory $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ jsou ortogonální.

Zbývá ještě dokázat rovnost $L(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) = L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$.

Ale z (2) a (3) plyne jednak, že $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n \in L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$, tzn. $L(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n) \subseteq L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ a také, že $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n \in L(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$, tzn. $L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n) \subseteq L(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$. Dohromady pak dostáváme žádanou rovnost.

ešené p íklady:

1. V eukleidovském prostoru $\mathbf{R}^4$ se skalárním součinem nalezněte ortogonální bázi podprostoru W, generovaného vektory $\mathbf{u}_1(0; 1; 2; 1)$, $\mathbf{u}_2(-1; 1; 1; 1)$, $\mathbf{u}_3(1; 0; 1; 0)$.

Platí $W = L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, tzn. použijeme Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu.

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = (0; 1; 2; 1)$

$\mathbf{e}_2 = p \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}_2$, kde $p = -\frac{u_2 \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1} = -\frac{2}{3}$. Tedy $\mathbf{e}_2(-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$\mathbf{e}_3 = p_1 \cdot \mathbf{e}_1 + p_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3$, kde $p_1 = -\frac{u_3 \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1} = -\frac{1}{3}$, $p_2 = -\frac{u_3 \cdot e_2}{e_2 \cdot e_2} = 1$.

Tedy: $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{u}_3 = (0; 0; 0; 0) = \mathbf{o}$

Výsledek je, že ortogonální bázi podprostoru W tvoří např. vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

2. Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$, pro která je zadaný vektor $\mathbf{u}(a + 1; 0; a + 2; 0; a + 1)$ z eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^5$ normovaný.

$|\mathbf{u}| = 1 \quad \wedge \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{(a+1)^2 + 0^2 + (a+2)^2 + 0^2 + (a+1)^2}$

$1 = \sqrt{(a+1)^2 + 0^2 + (a+2)^2 + 0^2 + (a+1)^2}$

$1^2 = a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 + a^2 + 2a + 1$

$1 = 3a^2 + 8a + 6$

$3a^2 + 8a + 5 = 0 \iff a_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{6} \Rightarrow a_1 = -1 \vee a_2 = -\frac{5}{3}$

Zadaný vektor je normovaný pro $a = -1$ nebo $a = -\frac{5}{3}$.

3. Rozhodněte, zda dané vektory eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou ortogonální, resp. ortonormální.

$\mathbf{u}_1(1; -2; 2; 1)$, $\mathbf{u}_2(1; 3; 2; 1)$, $\mathbf{u}_3(-1; 0; 1; -1)$

Aby byly ortogonální, musí být jejich skalární součin roven 0.

$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 1 - 6 + 4 + 1 = 0$

$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = -1 + 2 - 1 = 0$

$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = -1 + 2 - 1 = 0$

Vektory jsou ortogonální, zjistíme jejich velikost a tím i jestli jsou ortonormální.

$|\mathbf{u}_1| = \sqrt{1+4+4+1} = \sqrt{10} \neq 1$

$|\mathbf{u}_2| = \sqrt{1+9+4+1} = \sqrt{15} \neq 1$

$|\mathbf{u}_3| = \sqrt{1+0+1+1} = \sqrt{3} \neq 1$

Vektory nejsou ortonormální.

Úkoly:

1. Určete všechny hodnoty parametru a $\in$ **R**, pro která je zadaný vektor **u**(a + 1; 1; 0; a + 2; 1; 0; 2a - 3) z eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^7$ normovaný.

   [žádné a nevyhovuje]

2. Rozhodněte, zda dané vektory eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou ortogonální, resp. ortonormální:

   a) $\mathbf{u}_1$(2; 3; -3; -4), $\mathbf{u}_2$(-1; 3; -3; 4), $\mathbf{u}_3$(3; 1; 3; 0)

   [nejsou ortogonální]

   b) $\mathbf{u}_1$(1; 3; 1; 2), $\mathbf{u}_2$(0; 0; 0; 0), $\mathbf{u}_3$(1; -3; 2; 3)

   [jsou ortogonální, nejsou ortonormální]

3. Určete hodnoty parametrů a, b $\in$ **R**, tak, aby dané vektory eukleidovského prostoru $\mathbf{R}^5$ byly ortogonální:

   a) $\mathbf{u}_1$(1; 1; 2; 0; 0), $\mathbf{u}_2$(1; -1; 0; 1; a), $\mathbf{u}_3$(1; b; 2; 3; -2)

   $\left[a = \frac{9}{2}, b = -5\right]$

   b) $\mathbf{u}_1$(2; -1; 0; a; b), $\mathbf{u}_2$(a; b; 0; -2; 1), $\mathbf{u}_3$(a; 2b; 5; b; -a)

   $[a = b = 0 \vee a = b = 1]$

   c) $\mathbf{u}_1$(1; 2; 0; 2; 1), $\mathbf{u}_2$(0; 0; 0; 0; 0), $\mathbf{u}_3$(-5; 2; 5; -2; 5), $\mathbf{u}_4$(a; b; 0; b; a)

   $[a = -2b]$

II. ANALYTICKÁ GEOMETRIE V E_2 A E_3

9 BODY A VEKTORY

Definice: Soustava souřadnic (též souřadnicová soustava, souřadná soustava nebo systém souřadnic) je soustava základních údajů (referenčních bodů, přímek nebo křivek), umožňující určovat souřadnice polohy tělesa ve zvolené vztažné soustavě. Soustavu souřadnic můžeme zavést volbou souřadnicových os a počátku soustavy souřadnic. Polohu libovolného bodu pak určíme odečtením jeho souřadnic na jednotlivých osách. Pro určení polohy bodu jsou základními údaji:

- druh soustavy souřadnic (kartézská, polární, sférická, válcová, aj.)
- volba počátku soustavy souřadnic („výchozí" bod)
- směr, počet a charakter souřadných os (význačných směrů)
- jednotky, pomocí jejichž násobků a dílů se vyjadřují hodnoty souřadnic

Definice: Kartézská soustava souřadnic je taková soustava souřadnic, u které jsou souřadné osy vzájemně kolmé a protínají se v jednom bodě - počátku soustavy souřadnic. Jednotka se obvykle volí na všech osách stejně velká. Jednotlivé souřadnice polohy tělesa je možno dostat jako kolmé průměty polohy k jednotlivým osám. V prostoru má kartézská soustava souřadnic 3 vzájemně kolmé osy (běžně označované x, y, z), v rovině 2 kolmé osy (x, y).

Definice: Polární soustava souřadnic je taková soustava souřadnic v rovině, u které jedna souřadnice (označovaná r) udává vzdálenost bodu od počátku souřadnic, druhá souřadnice (označovaná φ) udává úhel spojnice tělesa a počátku od osy x ležící v rovině. Transformace polárních souřadnic na kartézské: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Definice: Válcová soustava souřadnic (cylindrická soustava souřadnic) je soustava souřadnic v prostoru, u které jedna souřadnice (označovaná r) udává vzdálenost bodu od osy z, druhá souřadnice (označovaná φ) udává úhel průmětu průvodiče bodu do roviny xy od zvolené osy ležící v rovině (nejčastěji x) a třetí souřadnice (označovaná z) polohu bodu na ose z. Transformace válcových souřadnic na kartézské: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$.

Definice: Sférická soustava souřadnic (kulová soustava souřadnic) je soustava souřadnic v prostoru, u které jedna souřadnice (označovaná r) udává vzdálenost bodu od počátku souřadnic, druhá souřadnice (označovaná φ) udává úhel odklonu průvodiče bodu od osy x a třetí souřadnice (označovaná θ) úhel mezi průvodičem a osou z. Transformace sférických souřadnic na kartézské: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

Definice: Geometrickým vektorem nazýváme množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti. Říkáme, že vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ jsou umístěním téhož vektoru právě

tehdy, když úsečky AD, CB mají týž střed. Pro A = B se vektor $\overrightarrow{AB}$ nazývá nulový vektor

$\vec{o}$. Jsou-li A$[a_1, a_2, a_3]$, B $[b_1, b_2, b_3]$ body, potom souřadnice vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ jsou:

$u_1 = b_1 - a_1, u_2 = b_2 - a_2, u_3 = b_3 - a_3$, píšeme: $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$.

Definice: Velikost vektoru $\vec{u}$ je $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$; velikost vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ vyjadřuje

vzdálenost počátku A a koncového bodu B umístění $\overrightarrow{AB}$ vektoru $\vec{u}$.

Definice: Skalární součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ (zapisujeme $\vec{u} \cdot \vec{v}$) je reálné číslo $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 +$

u_3v_3; velikost úhlu (odchylky) nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ je úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, pro který platí:

$\cos\varphi = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$.

Definice: Jsou-li $\vec{u}$, $\vec{v}$ nenulové vektory, pro něž platí, že jsou lineárně nezávislé, potom

vektorový součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ (zapisujeme $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$) je vektor $\vec{w}$, pro který platí:

- $\vec{w} \perp \vec{u}$ a současně $\vec{w} \perp \vec{v}$,
- Orientaci určíme podle pravidla pravé ruky
- Velikost $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin\varphi$, kde φ je velikost úhlu vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Geometrický význam vektorového součinu. První vlastností je určena délka výsledného vektoru, tato délka je číselně rovna obsahu rovnoběžníku utvořeného z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$. Druhá

vlastnost určuje směr výsledného vektoru, tento směr bude kolmý na rovinu, ve které leží vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Definice: Smíšený součin tří vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazveme číslo $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, které označujeme

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Absolutní hodnota tohoto čísla udává objem rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany

jsou umístěním těchto vektorů do společného bodu – vrcholu rovnoběžnostěnu. Je-li součin kladný, je soustava vektorů pravotočivá, je-li záporný, je tato soustava levotočivá. Je-li tento součin roven nule, jsou tyto vektory komplanární, tzn. leží v jedné rovině.

ešené p íklady:

1. Jsou dány body A[3; 3], B[8; 9], C[–3; 8], které tvoří trojúhelník. Spočítejte velikosti vnitřních úhlů a délky stran tohoto trojúhelníka.

Nejprve spočítáme vektory, které tvoří jednotlivé strany.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (5; 6)$

$\vec{b} = \overrightarrow{BC} = (-11; -1)$

$\vec{c} = \overrightarrow{CA} = (6; -5)$

délku stran zjistíme spočítáním velikostí těchto vektorů

$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-11)^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}$

$|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}$

Velikost vnitřních úhlů zjistíme pomocí skalárního součinu

$\cos\alpha = \frac{|a \bullet c|}{|a| \cdot |c|} = \frac{|0|}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{61}} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = 90°$

$\cos\beta = \frac{|a \bullet b|}{|a| \cdot |b|} = \frac{|-55-6|}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{122}} = \frac{|-61|}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{122}} = 0{,}707 \;\; \Rightarrow \;\; \beta = 45°$

$\cos\gamma = \frac{|c \bullet b|}{|c| \cdot |b|} = \frac{|-66+5|}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{122}} = \frac{|-61|}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{122}} = 0{,}707 \;\; \Rightarrow \;\; \gamma = 45°$

kontrola : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$90° + 45° + 45° = 180°$

2. Jsou dány vektory $\vec{a}$ (3; 2; 5) a $\vec{b}$ (4; -3; 5), spočítejte jejich skalární součin.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 = 12 - 6 + 25 = 31$

3. Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC, jestliže A[–1; –2; 8], B[0; 0; 0], C[6; 2; 0].

Velikost vektorového součinu udává obsah plochy , kterou tvoří dané vektory.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (1; 2; -8)$

$\vec{c} = \overrightarrow{AC} = (7; 4; -8)$

$\vec{a} \times \vec{c} = (2 \cdot (-8) - 4 \cdot (-8); -8 \cdot 7 - (-8) \cdot 1; 1 \cdot 4 - 7 \cdot 2) = (-16 + 32; -56 + 8; 4 - 14) =$

$= (16; -48; 10)$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + (-48)^2 + 10^2} = \frac{1}{2}\sqrt{256 + 2304 + 100} = \frac{1}{2}\sqrt{2660} =$
$= \sqrt{665}$

Obsah trojúhelníku je $\sqrt{665}$.

4. Určete objem rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany jsou umístěním těchto vektorů $\vec{a}$(3; 2; 5), $\vec{b}$ (-2; 3; 4), $\vec{c}$ (4; -3; 5) do společného bodu.

$V = |\vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{a} \bullet (3 \cdot 5 + 3 \cdot 4; 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5;\ -2 \cdot 5 - 4 \cdot 3)| =$
$|\vec{a} \bullet (15 + 12; 16 + 10;\ -10 - 12)| = |\vec{a} \bullet (27; 26;\ -22)| =$
$|(3 \cdot 27 + 2 \cdot 26 + 5 \cdot (-22)| = |81 + 52 - 110| = 133 - 110 = 23$

Výsledný objem je 23.

Úkoly:

1. Jsou dány body A(2; 1), B(3; 4), C(1; 6), dokažte, že jsou vrcholy trojúhelníka a určete jeho obsah. Vypočtěte velikost vnitřního úhlu BAC.

$\left[S = 4, \cos\alpha = \frac{7\sqrt{65}}{65}\right]$

2. V trojúhelníku ABC jsou dány vrcholy A(0; 0), B(2; 0) a těžiště T($\frac{2}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$). Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý a vypočtěte velikost vnitřních úhlů.

$\left[C(0; 2\sqrt{3}); AC \perp AB; \text{velikost úhlů}: 90°, 60°, 30°\right]$

3. Dokažte, že body A(0; 0), B(3; -4), C(6; 0), D(3; 4) jsou vrcholy kosočtverce.

$[|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = 5;\ |AC = 6;\ |BD| = 8|]$

4. Jsou dány 2 vrcholy A(4; 5), B(-1; 3) čtverce ABCD. Určete souřadnice vrcholů B, D.

$[2 \text{ řešení}: C(-3; 8), D(2; 10) \text{ nebo } C(1;\ -2), D(6; 0)]$

5. Jsou dány vektory $\vec{a}$(2; 3; -1), $\vec{b}$(1; -2; 3), $\vec{c}$(2; -1; 1). Určete souřadnice vektoru $\vec{x}$, který je kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{x} \bullet \vec{c}$ = -6.

$[\vec{x}(-3; 3; 3)]$

6. V trojúhelníku ABC je $\overrightarrow{AB}$ (2; 6; -4), $\overrightarrow{AC}$ (4; 2; -2). Vypočtěte souřadnice vektorů, které splývají s těžnicemi trojúhelníka ABC.

$$\left[\vec{t}_a(3;4;\ -3),\vec{t}_b\ (0;\ -5;3),\vec{t}_c(-3;1;0)\right]$$

7. Jsou dány vektory $\vec{a}$ (2; -1; 3), $\vec{b}$ (1; -2; 3), $\vec{c}$ (3; 2; -4). Určete souřadnice vektoru $\vec{x}$ tak, aby platilo: $\vec{a}\bullet\vec{x} = -2 \wedge \vec{b}\bullet\vec{x} = 3 \wedge \vec{c}\bullet\vec{x} = 8$.

$$\left[\vec{x}\ (\tfrac{26}{15};\ -\tfrac{101}{15};-\ \tfrac{61}{15})\right]$$

8. Pro vektory $\vec{a}$ (3; 2; 5), $\vec{b}$ (4; -3; 5), $\vec{c}$ (-2; 2; 2) se přesvědčte, že platí vlastnosti vektorového součinu.

9. Na ose y určete bod A tak, aby měl od bodu B(-6; -5) vzdálenost d = 10.

$$[A(0;3)\,\text{nebo}\,A(0;\ -13)]$$

10. Jsou dány body A(2; -1; 3), B(1; 1; 1), C(0; 0; 5). Dokažte, body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníka ABC a vypočtěte velikost jeho vnitřních úhlů.

[velikosti úhlů: 45°, 45°, 90°; přenoda BC]

10 LINEÁRNÍ OBJEKTY

Definice: Vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2, a_3]$ a $B[b_1, b_2, b_3]$ se určí:

$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Definice: Přímka p je určena dvěma různými body A, B. Body A, B je určen směrový vektor $\vec{u} = B - A$ přímky p. Bodem X ležícím na přímce p je určen např. vektor

$\vec{v} = X - A$. Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou lineárně závislé. To znamená, že $X - A = t \bullet \vec{u}$. Body přímky p zapisujeme vektorovou rovnicí takto: $X = A + t \bullet \vec{u}$, kde $t \in \mathbf{R}$. Toto je tzv. vektorová rovnice přímky p = AB. Rozepíšeme-li tuto rovnici, dostáváme tzv. parametrickou rovnici přímky p:

$x = a_1 + t \bullet u_1$

$y = a_2 + t \bullet u_2$

$z = a_3 + t \bullet u_3$, kde $t \in \mathbf{R}$.

Definice: Obecná rovnice přímky p: $ax + by + c = 0$ (se používá k vyjádření přímky pouze v E_2), kde $\vec{n}\,(a,b) \neq \vec{o}$ je kolmý vektor k přímce p, který se nazývá normálový vektor přímky a $\vec{u}\,(-b, a)$ je směrový vektor přímky p.

Definice: Úsekový tvar přímky a: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, (se používá pouze v E_2) kde p, q jsou úseky, které přímka a vytíná na osách x, y; nezahrnuje přímky , které procházejí počátkem soustavy souřadnic a přímky rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Definice: Vycházíme-li z parametrické rovnice přímky v E_3 a jsou-li všechny tři souřadnice směrového vektoru $\vec{u}$ současně různé od nuly, lze psát p: $\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$.

Těmto rovnicím říkáme kanonické rovnice přímky. Pokud nejsou souřadnice směrového vektoru různé od nuly, pak se jedná o formální zápis.

Definice: Rovinu můžeme určit libovolným bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a dvojicí nenulových lineárně nezávislých vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$. Potom parametrické rovnice roviny ρ jsou:

$x = a_1 + t \bullet u_1 + s \bullet v_1$

$y = a_2 + t \bullet u_2 + s \bullet v_2$

$z = a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3$, kde t, s $\in \mathbf{R}$.

Vyloučením parametrů t, s dostaneme obecnou rovnici roviny ρ: $ax + by + cz + d = 0$, kde $\vec{n}$ (a,b,c) je normálový vektor roviny; platí $\vec{n} \perp \rho$, $\vec{n} \neq \vec{o}$. Označíme-li $p = \frac{-d}{a}$, $q = \frac{-d}{b}$, $r = \frac{-d}{c}$ a upravíme zápis rovnice roviny na tvar: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$, kterému říkáme úsekový, pak p, q, r jsou úseky, které vytíná rovina ρ na osách souřadnic. Je-li některý z koeficientů a, b, c obecné rovnice roviny $ax + by + cz + d = 0$ roven nule, je rovina s příslušnou osou rovnoběžná.

Definice: Vzájemná poloha dvou přímek. Nechť přímka a má směrový vektor $\vec{u}$, přímka b má směrový vektor $\vec{v}$ a bod A náleží přímce a, bod B náleží přímce b. Označme vektor $B - A = \vec{w}$. O poloze přímek a, b lze rozhodnout pomocí těchto vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Z Frobeniovy věty o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic vyplývá, že o poloze přímek a, b rozhodneme pomocí hodnosti matic. Jestliže utvoříme ze složek vektorů matici $C = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ a její h(C) = 1, jsou vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ kolineární a přímky a, b jsou rovnoběžné nebo totožné. Jestliže dále matice $D = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ má h(D) = 1, jsou přímky a, b totožné, pro h(D) = 2 jsou přímky a, b rovnoběžné. Jestliže h(C) = 2 jsou přímky a, b různoběžné nebo mimoběžné. Je-li matice $E = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ a její h(E) = 2 jsou přímky a, b různoběžné, je-li h(E) = 3 jsou přímky a, b mimoběžné.

Definice: Vzájemná poloha dvou rovin. Dvě roviny v E_3 mohou mít tyto vzájemné polohy:

- Roviny jsou rovnoběžné – různé, tzn., že nemají žádný vlastní společný bod.
- Roviny jsou různoběžné, tzn., že roviny mají jako průnik společnou vlastní přímku, kterou nazýváme průsečnicí.
- Roviny jsou rovnoběžné – totožné, tzn., že roviny mají všechny body totožné.

Jsou dány roviny α: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ a β: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. O vzájemné poloze rovin α, β rozhoduje řešení soustavy rovnic o třech neznámých x, y, z.

$a_1x + b_1y + c_1z = -d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = -d_2$

Zapíšeme rozšířenou matici soustavy $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{array}\right)$.

Je-li h(A) = h(A|B) = 2, jsou α, β různoběžné.

Pro h(A) = 1, h(A|B) = 2 jsou roviny α, β vzájemně rovnoběžné – různé.

Je-li h(A) = h$(A|B)$ = 1, jsou roviny α, β totožné.

Definice: Vzájemná poloha přímky a roviny. Nechť a: X = A + t$\vec{u}$, α: Y = B + r$\vec{v}$ + s$\vec{w}$. O vzájemné poloze rozhoduje počet společných bodů přímky a roviny. Píšeme A + t$\vec{u}$ = B + r$\vec{v}$ + s$\vec{w}$. Rozepíšeme tuto rovnost do složek a dostáváme : $tu_1 - rv_1 - sw_1 = b_1 - a_1$

$$tu_2 - rv_2 - sw_2 = b_2 - a_2$$

$$tu_3 - rv_3 - sw_3 = b_3 - a_3.$$

Jde o soustavu lineárních rovnic pro neznámé t, r, s. Když platí, že:

- h(A) = h$(A|B)$ = 3, soustava má jediné řešení – existuje jediný průsečík.
- h(A) = h$(A|B)$ = 2, soustava má nekonečně mnoho řešení, tzn., že přímka a ∈ α
- h(A) = 2, h$(A|B)$ = 3, soustava nemá řešení. Přímka a je s rovinou α rovnoběžná.

Definice: Předpokládejme, že přímky a, b jsou určeny takto: X = A + t$\vec{u}$, Y = B + t$\vec{v}$. Odchylkou přímek a, b rozumíme velikost ostrého úhlu jejich směrových vektorů.

Platí: cosφ = $\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

Definice: Odchylku dvou rovin definujeme jako velikost ostrého úhlu jejich normálových vektorů.

Definice: Odchylku přímky p a roviny α definujeme jako velikost ostrého úhlu, který svírá daná přímka p se svým kolmým průmětem do roviny α. Odchylku přímky p a roviny α určíme pomocí směrového vektoru přímky p a normálového vektoru $\vec{n}$ roviny α. Víme, že cos (90° - φ) = sinφ, a proto sinφ = $\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{u}|}$.

Definice: Vzdálenost bodu M od roviny α určíme tak, že z bodu M vedeme na rovinu α kolmici k a určíme její průsečík P s rovinou α. Vzdálenost d = $|MP|$ je vzdálenost bodu M od roviny α. Nechť rovina α: ax + by + cz + d = 0, bod M = $[x_0, y_0, z_0]$. Uvedeným postupem odvodíme pro vzdálenost bodu M od roviny α vzorec: d = $\frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Definice: Vzdálenost bodu A$[a_1, a_2]$ od přímky p: ax + by + c = 0: v = $\frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

ešené p íklady:

1. Napište rovnici přímky a, která prochází středem úsečky AB a je kolmá k přímce p, je-li: A[1; 1], B[3; -1], p: 3x + 2y + 1 = 0
   - Nejdřív určíme střed úsečky $S[x_{0;}\ y_0]$

$x_0 = (x_A + x_B)/2 = (1 + 3)/2 = 2$

$y_0 = (y_A + y_B)/2 = 0$

Střed má souřadnice S(2; 0)

- má-li být přímka a kolmá na p, znamená to, že normálový vektor přímky p je roven směrovému vektoru přímky a

$\vec{n}_p = \vec{s}_a(3,2)$ souřadnice jsme určili z obecné rovnice přímky

můžeme napsat parametrickou rovnici přímky a: $x = x_0 + s_1t$

$y = y_0 + s_2t$, kde $t \in \mathbf{R}$

doplníme souřadnice středu a směrového vektoru: $x = 2 + 3t$

$y = 0 + 2t$

vyloučením parametru t a dosazením do druhé rovnice dostaneme: $2x = 4 + 3y$

odtud obecná rovnice přímky a: $2x – 3y – 4 = 0$

2. Určete obecnou rovnici roviny ρ, která prochází body A[0; 1; 2] , B[–1; 0; 3] a C[3; 1; 0].

Nejprve určíme vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1)$ a $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (4; 1; -3)$

Spočítáme vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ a získáme vektor $\vec{n}$, který je normálovým vektorem roviny ρ. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (2; 1; 3)$

Obecná rovnice roviny má vzorec $ax + by + cz + d = 0$, kde a, b, c jsou souřadnice normálového vektoru roviny.

Získáme rovnici: $2x + y + 3z + d = 0$ dosadíme například souřadnice bodu A

$1 + 6 + d = 0$ a dopočítáme d

Obecná rovnice roviny ρ: $2x + y + 3z – 7 = 0$

3. Určete vzájemnou polohu přímky p: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$ a roviny ρ: $x + y + z – 2 = 0$.

Ze zadané kanonické rovnice přímky můžeme napsat směrový vektor přímky p je

$\mathbf{s}_p(2; 3; 4)$ a bod patřící této přímce A

A[1; -2; 0] a z nich sestavíme parametrickou rovnici přímky, kterou dosadíme do obecné rovnice roviny ρ.

p: x = 1 + 2t

y = -2 + 3t

z = 4t

p ∩ ρ: 1 + 2t – 2 + 3t + 4t – 2 = 0

-3 + 9t = 0

$t = \frac{1}{3}$ dosazením parametru t do parametrické rovnice přímky dostaneme společný bod $P[\frac{5}{3}; -1; \frac{4}{3}]$

výsledkem je, že rovina s přímkou jsou různoběžné a mají společný bod P.

Úkoly:

1. Vypočtěte vzdálenost d přímek a: $x\sqrt{3}$ - y – 4 = 0 a b: -2$x\sqrt{3}$ + 2y – 4 = 0.

   [přímky a, b jsou rovnoběžné a jejich vzdálenost d = 3.]

2. Je dán bod A[1; 2] a přímka p: 2x – y + 5 = 0. Napište rovnici přímky a, která prochází bodem A a je kolmá k přímce p a rovnici přímky b,která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou p.

   $[a: x + 2y - 5 = 0, b: 2x - y = 0.]$

3. Průsečíkem A přímek a: 2x + 7y – 8 = 0 a b: x + 2y – 1 = 0 a bodem B[2; –3] veďte přímku m, napište její rovnici a určete směrnici přímky m a úhel φ, který svírá přímka m s kladným směrem osy x.

   $[M: x + y + 1 = 0, k_m = -1, \varphi = 135°.]$

4. Určete rovnici roviny ρ, která prochází body A[2; 2; 3], B[1; 0; 2] a je kolmá k rovině α: x – 8y + z – 10 = 0.

   $[\rho: x - z + 1 = 0.]$

5. Určete vzájemnou polohu rovin ρ: 3x – y – 7z + 11 = 0 a α: 2x – 8y – z + 12 = 0.

$$\left[\text{roviny jsou různoběžné a průsečnice } p\!: x - \frac{38}{11} + 5t,\; y = \frac{7}{11} + t,\; z = 2t,\; t \in \mathbf{R}\right]$$

6. Určete vzdálenost bodu A[3; 6; 1] od roviny ρ: x + 10y + 7z – 78 = 0.

$$\left[\text{vzdálenost } d = \frac{4\sqrt{6}}{15}\right]$$

ZÁV R

Práce shrnuje problematiku lineární algebry a analytické geometrie v rozsahu učiva jednoho semestru. Kapitoly obsahují jak teoretickou průpravu, tak i praktickou ukázku příkladů a neřešených úloh s výsledky. U všech řešených příkladů je popsán postup řešení tak, aby student mohl tuto sbírku používat samostatně.

Cílem bylo vytvořit pomůcku ke studiu ve předmětech Matematika E1 (FAME UTB Zlín) a Algebra a geometrie (FT UTB Zlín), ve které by studenti nalezli nejen teoretickou průpravu, ale i praktickou ukázku příkladů. Dalo by se říci, že tento cíl byl splněn.

ZÁV R V ANGLI TIN

Work summarizes the problems of linear algebra and analytic geometry in the range of the curriculum of one semester. The chapters include both theoretical background and practical demonstration of examples and unresolved problems with the results. In all solved examples describes the solution so that students can use this collection separately.

The aim was to develop tool to study the subjects Mathematics E1 (FAME UTB Zlín) and Algebra and Geometry (FT UTB Zlín), in which students would find not only a theoretical training, but also a practical demonstration examples. One might say that this objective was met.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[[1] HORÁK, Pavel. Algebra a teoretická aritmetika I. Brno : Rektorát Masarykovy univerzity Brno, 1991. 196 s. ISBN 80-210-0320-0.

[2] HORÁK, Pavel. Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I. Brno : Masarykova univerzita, 1991. 221 s. ISBN 80-210-0288-3.

[3] NOVÁK, Ludvík, MIKEŠ, Josef, RACHŮNEK, Lukáš, ZEDNÍK, Josef. Algebra a geometrie. Zlín : UTB, 2005. 126 s. ISBN 80-7318-366-8.

[4] KUBÁT, Josef. Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha : VICTORIA PUBLISHING, 1993. 409 s. ISBN 80-85605-27-9.

[5] Matematika online – MATEMATIKA I. URL: < http://mathonline.fme.vutbr.cz/ Matematika-I/sc-5-sr-1-a-4/default.aspx> [cit. 2010-02-02].

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOL A ZKRATEK

LVP	Lineární vektorový prostor
resp	respektive
tzv	tak zvaná
tzn	to znamená
$\vee$	nebo
$\wedge$	a současně
=>	jestliže pak