

Určení pohybových rovnic mechanické soustavy se dvěma stupni volnosti

Motion Equations Determination for Two Freedom Degree
Mechanical System

Bc. Lukáš Kratochvíl

Diplomová práce
2014



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Lukáš Kratochvíl**
Osobní číslo: **A11725**
Studijní program: **N3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**
Forma studia: **kombinovaná**

Téma práce: **Určení pohybových rovnic mechanické soustavy se dvěma stupni volnosti**

Zásady pro vypracování:

1. Nakreslete v některém softwarovém systému trojrozměrné tzv. Cardanovo uspořádání azimut- elevace.
2. Zaveďte v souladu s Denavit-Hartenbergovou konvencí globální a další tři kartézské soustavy souřadnic určující polohu obou těles a koncovou polohu náměru – místo umístění efektoru.
3. Určete hodnoty DH parametru charakterizujících kinematiku zadaného uspořádání a_i , α_i , d_i , θ_i ; $i = 1, 2, 3$.
4. Odvodte transformační kinematické matice $OT_1(\alpha)$, $1T_2(\beta)$, $2T_3$.
5. Odvodte pohybové rovnice soustavy jako soustavy se dvěma vstupy a dvěma výstupy.
6. Vytvořte simulační model soustavy pomocí fyzikálního modelování v systému Dynast.
7. Proveďte pomocí simulačních experimentů analýzu dynamických vlastností při typových pohybech efektoru.
8. Pomocí simulačních experimentů posuďte možnosti autonomního řízení pohybových stavů soustavy a efektoru jako MIMO soustavy.

Rozsah diplomové práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **Úředníček, Z.: Robotika, Univerzita T. Bati ve Zlíně, Zlín 2012, ISBN 978-80-7454-223-7**
2. **Šolc, F., Václavek, P., Vavřín, P.: Řízení a regulace II, VUT Brno, Fakulta automatizace a měřicí techniky, Skripta, Leden 2011.**
3. **Mann, H: Modeling and Simulation, DynLab, Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled System, Computing and**
4. **Information Centre Czech Technical University in Prague.2006 VanAntwerp, J.,G. Braatz, R., D., Sahinidis, N., V.: Globally optimal robust control for systems with nonlinear time-varying perturbation. Comp&Chem. Eng.,1977.**
5. **Safonov , M. G.: Stability and Robustness of Multivarible Feedback systems. Cambridge, MA: MIT Press,1980.**

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Zdeněk Úředníček, CSc.
Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání diplomové práce:

7. března 2014

Termín odevzdání diplomové práce:

11. června 2014

Ve Zlíně dne 7. března 2014



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

ABSTRAKT

Kratochvíl L. Určení pohybových rovnic mechanické soustavy se dvěma stupni volnosti. Diplomová práce. Brno, 2014.

Tato diplomová práce je zaměřena na vysvětlení dynamiky pohybu robotického manipulátoru pomocí pohybových rovnic. Dále se zde uvádí krátká poznámka o vývoji robotiky, manipulátorů a podrobný postup pro formulaci řešení pohybových rovnic.

Teoretická část je zaměřena na obecné vysvětlení daného problému a popisu všech potřebných kroků k dosažení daných cílů práce. V praktické části je uveden konkrétní případ manipulátoru, v našem případě v takzvaném zapojení do Cardanova uspořádání azimut – elevace, který nakonec bude plnit zadané úkoly.

Klíčová slova: manipulátor, Denavit-Hartenbergova metoda, inverzní úloha, pohybové rovnice.

ABSTRACT

Kratochvíl L. Motion Equations Determination for Two Freedom Degree Mechanical System. Master's thesis. Brno, 2014.

This master's thesis is intent on robotic manipulator movement dynamics explication by means of motional equations. Next the work features shortly the robotics and manipulators evolution and detailed procedure of motional equations' formulation.

The paper theoretic part is aimed on given problem common explication and on description of all necessary steps to attainment the work formulated objectives. In practical section the concrete manipulator example is already stated. In our case the mechanical system in so-called ordering to the Cardan form azimuth – elevation, which shall fulfil the engaged exercises.

Keywords: manipulator, Denavit-Hartenberg method, inverse problem, motional equations.

Na tomto místě bych velmi rád poděkoval panu doc. RNDr. Ing. Zdeňku Úředníčkovi, CSc., za jeho odborné vedení, cenné názory, rady a ochotu při zpracování této diplomové práce. Také děkuji rodině a přítelkyni za podporu při studiu a tvorbě této práce.

Motto: „Nikdy se nevzdávej“

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně

.....
podpis diplomanta

OBSAH

ÚVOD	8
I TEORETICKÁ ČÁST	10
1 ROBOTIKA VÝVOJ	11
1.1 ZÁKONY ROBOTIKY	12
2 SOUŘADNICOVÝ SYSTÉM A SOUŘADNICE	13
3 DENAVIT-HARTENBERGOVA TEORIE.....	16
3.1 DENAVIT-HARTENBERGEROVA SYMBOLIKA (NOTACE)	16
4 KINEMATIKA MECHANISMŮ	21
4.1 PŘÍMÁ ÚLOHA KINEMATIKY	21
4.1.1 Transformace souřadnic	22
4.1.2 Transformace mezi dvěma přiléhajícími souřadnými soustavami	23
4.2 INVERZNÍ ÚLOHA KINEMATIKY	25
4.2.1 Metoda rozpojení	26
5 POHYBOVÉ ROVNICE	29
5.1 LAGRANGEOVA MECHANIKA.....	29
II PRAKTICKÁ ČÁST	32
6 MODELOVÉ SCHÉMA MANIPULÁTORU.....	33
7 POSTUP JEDNOTLIVÝCH VÝPOČTŮ.....	35
7.1 TRANSFORMAČNÍ MATICE.....	35
7.2 INVERZNÍ KINEMATICKÁ ÚLOHA	37
7.3 VÝPOČET KINETICKÉ ENERGIE NÁMĚRU	38
7.4 LAGRANGEOVA DYNAMIKA POHYBOVÉ ROVNICE MANIPULÁTORU.....	42
7.5 POHYBOVÉ ROVNICE	43
7.5.1 Pohybová rovnice pro m_α	43
7.5.2 Pohybová rovnice pro m_β	45
8 MODELOVÁNÍ V PROGRAMU DYNAST.....	47
8.1 JEDNOTLIVÉ PRŮBĚHY POHYBOVÝCH ROVNIC V PROGRAMU DYNAST.....	50
9 POHYB EFEKTORU PO ZADANÉ TRAJEKTORII	57
9.1 KRUŽNICE V PRACOVNÍM PROSTORU MANIPULÁTORU	57
9.2 MODELOVÉ ZAPOJENÍ V SIMULAČNÍM SYSTÉMU DYNAST PRO ZADANÝ POHYB	60
9.3 JEDNOTLIVÉ PRŮBĚHY POHYBOVÝCH ROVNIC PŘI POHYBU PO KRUŽNICI.....	64
ZÁVĚR	69
CONCLUSION.....	71
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	73
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	74
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	75
SEZNAM TABULEK	77
SEZNAM PŘÍLOH	78

ÚVOD

V této práci se čtenáři naskytne možnost nahlédnout do určité části jinak velmi rozsáhlé oblasti Robotiky, která se každý dnem rozvíjí prakticky mílovými kroky a její rozvoj lze jen stěží zachytit.

V dnešní moderní době se s robotikou jako takovou setkáváme prakticky na každém kroku, ať už je to cestou do práce, na nákupu, při sportu i výlety za kulturou. Moderní technologie a zejména robotické manipulátory a přístroje nám dokáží v mnoha případech ulehčit život a hlavně ušetřit spoustu drahocenného času, ať už se jedná u různé robotické pomůcky v domácnostech nebo průmyslových odvětví.

S klidnou hlavou si zde troufám říci, že žádná výrobní firma nebo domácnost se již neobejde bez různých strojů, manipulátorů, robotických rukou, které pracují v neskutečné rychlosti a přesnosti. Navíc se tyto manipulátory dokáží pohybovat v prostorech, kam se člověk kvůli extrémním podmínkám (např. teplota, tlak) vydat nemůže.

Nejčastěji se ovšem širší společnost setkává s roboty a manipulátory ve svých domácnostech. Tito „roboti“, se kterými se setkáváme prakticky denně, nám velice usnadňují náš život a šetří čas, kterého v dnešní hektické době není nikdy dost. Jak, ale tihle „roboti“ pracují, už nikdo neví a drtivá většina uživatelů ani neřeší. Proč taky? Když se „robot“ porouchá, vrátí se do krabice a odveze zpět do supermarketu k reklamaci. V této práci se Vám nenaskytne žádný manuál na jednoduchou opravu robotického přístroje, ale je zde snaha vystihnout základní informace o Robotice, a co vůbec stojí za tím, aby se takový robotický manipulátor dal vůbec do pohybu.

Na naší fakultě ve Zlíně jsem se s touto problematikou ohledně ovládání pohybů robotů a manipulátorů setkal ve třetím semestru navazujícího studia v předmětu „Robotika“. Prakticky jsem se s Robotikou seznamoval již v předmětu „Elektromechanické akční členy“, který jsme měli o semestr dříve, a s Robotikou velice úzce souvisí. Tyto předměty mě při mém studiu velice zaujaly a vlastně i díky našemu panu profesoru Zdeňku Úředníčkovi, který dokázal jakýkoliv problém z oblasti Robotiky barvitě vysvětlit a popsat, jsem se rozhodl tuto práci napsat. Mojí snahou je, aby čtenáři přiblížila tuto velice rozmanitou a zajímavou tematiku, i když jen z velmi malé části, v rámci celé oblasti Robotiky.

Náplní této práce je objasnění funkčnosti manipulátoru s dvěma stupni volnosti za pomoci odvození pohybových rovnic a jejich následnou aplikací do fyzikálně programového pro-

středí Dynast. V tomto programovém prostředí budeme pozorovat chování jednotlivých částí pohybových rovnic za pomoci PID regulátoru, který připojíme k našemu systému. Hlavním výsledkem této práce je realizace regulátorů typu P a typu PI pro nastavení pohybu koncového efektoru. Ve výsledné fázi bude efektor opisovat zadanou kružnici o určeném poloměru s určitou rychlostí.

Uvedeme si zde hlavní cíle práce, které lze vyjádřit v několika bodech:

- odvodit transformační kinematické matice pro 0T_1 , 1T_2 , 2T_3 ,
- odvodit pohybové rovnice soustavy jako soustavy se dvěma vstupy a dvěma výstupy,
- vytvořit simulační model soustavy pomocí fyzikálního modelování v programu Dynast,
- pomocí simulačních experimentů provést analýzu dynamických vlastností při typových pohybech efektoru,
- pomocí simulace v programu Dynast posoudit možnost autonomního řízení pohybových stavů soustavy a efektoru jako MIMO soustavy.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ROBOTIKA VÝVOJ

První zařízení s řízením polohy byly vynalezeny okolo roku 1938 pro stříkání barev. Ale první průmyslové moderní roboty byly Unimate-y vytvořené J. Engelbergerem na začátku 60-tých let. Unimation byly první roboty uvedené na trh. Engelberger byl nazván otcem robotiky. V 80-tých letech průmysl robotů rychle rostl hlavně kvůli velkým investicím do automobilového průmyslu. Ve výzkumné oblasti první automat byl pravděpodobně stroj Grege Waltera (1940) a zvíře Johna Hopkinse. První programovatelný robot byl navržen zakladatelem Unimation Johnem Hopkinsem v roce 1954. Teorie Denavita a Hartenberga byla vyvinuta v roce 1955 a sjednotila pokročilé kinematiky robotických manipulátorů. V roce 1959 se objevuje na trhu první obchodně vhodný robot. Robotické manipulátory byly v průmyslu použity po roce 1960 a zažily raketový růst v 80-tých letech. Roboty se objevily jako výsledek kombinace dvou technik: teleoperátorů (robotické zařízení řízené vzdáleně lidským činitelem, obvykle užívaný pro poskytnutí bezpečí pro operátora, jako při práci s radioaktivními materiály) a počítačového číslicového řízení obráběcích strojů (CNC). Teleoperátory byly vyvinuty během II. sv. války pro práci s radioaktivním materiálem a CNC vznikly pro zvýšení přesnosti výroby nových technologických částí. První roboty nebyly nic víc než číslicové řízení mechanických kinematických řetězců navržených pro přenos materiálu z bodu A do bodu B.[1]

Dnes komplikovanější aplikace jako je svařování, stříkání barvou a montáž vyžadují mnohem větší schopnost pohybu a citlivost. Tedy robot je multidisciplinární inženýrské zařízení. Mechanické inženýrství se zabývá návrhem mechanických komponentů, ramen, koncových efektorů a rovněž odpovídá za kinematiku, dynamiku a analýzu řízení robotů. Elektrotechnické inženýrství pracuje s akčními členy, snímači, napájecím a řídicím systémem. Programování nebo softwarové inženýrství odpovídá za logiku, inteligenci, komunikaci a vytváření sítí.[1]

Dnes máme více než 1000 organizací, asociací a klubů zabývajících se roboty, více než 500 časopisů, novin a informačních bulletinů, více než 100 roboticky orientovaných konferencí a přehlídek každý rok a více než 50 roboticky zaměřených kurzů na univerzitách. Robot našel v průmyslu široké uplatnění a je užíván při mnoha technologických operacích. Zvýšil produktivitu práce v průmyslu, aby poskytl úlevu od únavné monotónní a riskantní práce. Navíc roboty vykonávají mnoho operací lépe než lidé a poskytují vyšší přesnost a opakovatelnost. V mnoha oblastech jsou očekávány vysoké technologické standardy těžko

dosažitelné bez robotů. Pokud jde o průmysl, roboty jsou využívány v extrémních prostředích. Mohou pracovat při nízké a vysoké teplotě, nepotřebují světlo, potravu, čerstvý vzduch, plat nebo povzbuzování. Roboty jsou perspektivní stroje, jejichž aplikační oblast se rozšiřuje. Tvrdí se, že roboty se objeví při práci od 4A po 4D nebo v 3D3H prostředí. 4A prostředí práce je prostředí automatizace, zvětšování, součinnosti, a autonomnosti. 4D prostředí je nebezpečí, špína, nuda a těžká práce. 3D3H vyjadřuje nudu, špínu, nebezpečí horko, těžkost a hazard.[1]

1.1 Zákony robotiky

Zákony robotiky jsou pravidla chování robotů, definované Isaacem Asimovem (například zfilmované dílo Já Robot) v jeho povídkách a později románech. Principy, které tyto zákony představují, jsou považovány za obecné shrnutí základních požadavků na vývoj a používání robotů.[3]

V původní podobě existovaly následující tři zákony:

- *Robot nesmí ublížit člověku nebo svou nečinností dopustit, aby mu bylo ublíženo*
- *Robot musí poslechnout člověka, kromě případů, kdy je to v rozporu s prvním zákonem*
- *Robot se musí chránit před poškozením, kromě případů, kdy je to v rozporu s prvním nebo druhým zákonem*

V pozdějších románech se objevily doplňky těchto tří zákonů, z nichž nejdůležitějším je tzv. *nultý zákon robotiky*, který zní:

- *Robot nesmí ublížit lidstvu nebo svou nečinností dopustit, aby mu bylo ublíženo*

Ostatní zákony byly upraveny přidáním „kromě případů, kdy je to v rozporu s nultým zákonem“. Na rozdíl od původních tří zákonů měl být nultý zákon vytvořen robotem (R. Daneel v knize Roboti a Impérium). Tento zákon vyvolal u fanoušků rozporuplné reakce a obvykle není považován za jeden ze základních zákonů, ačkoliv robotům dovoluje ochraňovat celé lidstvo na úkor jednotlivců.[3]

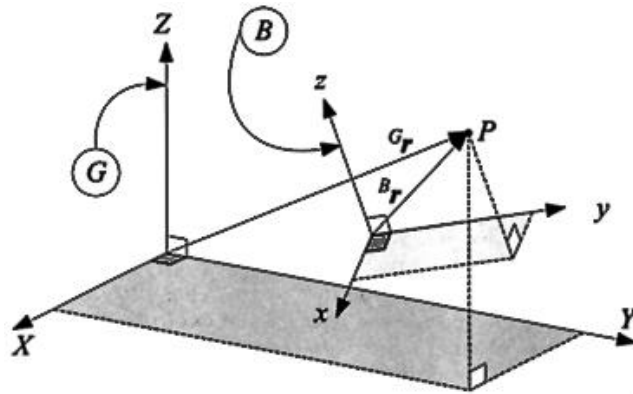
Isaac Asimov navrhl tyto čtyři rafinované zákony robotiky, aby nás ochránil před inteligentními generacemi robotů. Pojem robotika (pojem „robot“ pochází od K. Čapka) se odvolává na studium a použití robotů. Pojem byl nejdříve přijat Asimovem v roce 1941 v jeho krátké povídce Obtékání.[1],[3]

2 SOUŘADNICOVÝ SYSTÉM A SOUŘADNICE

Jednou ze základních úloh při formulaci popisu robotických pohybových systémů umožňujících jejich řízení pohybových stavů je vytvoření kinematických transformací jednotlivých těles do takzvané globální soustavy souřadnic. Jestliže každému ideálně tuhému článku robota a každému objektu okolí robota pro popis kinematického popisu pohybu přiřazujeme jednu nebo více souřadných soustav. Tedy algebraický vztah mezi souřadnými soustavami nazývaný transformace referenčních systémů je při modelování a programování robotů základní pojem. Například čistě rotační pohyb tuhého tělesa může být popsán jedním z více způsobů. Nejpopulárnější jsou:[1]

- množina rotací v globálně pevném pravotočivém kartézském souřadném systému,
- množina rotací v pohyblivém pravotočivém kartézském souřadném systému,
- úhlové otáčení okolo pevné osy v prostoru.

Vhodné referenční systémy jsou obzvlášť pečlivě používány těmi, kdo popisují pohyb článků. Základní referenční systém je takzvaný globální referenční systém pevně spojený s nepohyblivou částí uvažovaného prostoru. S každým z pohybujících se těles je spojený vhodně zvolený referenční systém lokální. Poloha a orientace článku vzhledem k rámu je pak popsána jako poloha a orientace lokálního systému s ním v globálním referenčním systému. Při analýze robota umístíme globální referenční systém na rám a spojíme lokální referenční systém s každým jednotlivým článkem. Souřadnicový systém je něco jiného než referenční systém. Souřadnicový systém určuje způsob, jak popíšeme pohyb v každém vztažném systému. Nejpopulárnější je v robotice kartézský souřadnicový systém, ale používají se i cylindrický (válcový), sférický, a další.[1]



Obrázek 1: Polohový vektor bodu P lze popsat v souřadném systému tělesa B nebo v globálním souřadném systému G

Souřadnicový systém je definován množinou bázových vektorů, jako jsou jednotkové vektory v třech souřadnicových osách.

Poloha bodu **P** tuhého tělesa **B** je určena vektorem \vec{r} . Jak je uvedeno na *obrázku 1* polohový vektor \vec{r} bodu **P** může být vyjádřen v globální soustavě souřadnic:

$$\mathbf{G}_{\vec{r}} = X\hat{\mathbf{I}} + Y\hat{\mathbf{J}} + Z\hat{\mathbf{K}} \quad (1)$$

nebo v souřadném systému tělesa B

$$\mathbf{B}_{\vec{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (2)$$

kde $\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{K}}$, respektive $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ jsou ortonormální bázové vektory (jednotkové vektory) globální, resp. lokální souřadné soustavy.

Uspořádaná reálná čísla (X, Y, Z) a (x, y, z) nazýváme souřadnice bodu P v globálním, respektive lokálním souřadném systému. Z matematického hlediska je efektivní popsat vektor $\mathbf{G}_{\vec{r}}$ a $\mathbf{B}_{\vec{r}}$ vertikálním polem souřadnic:[1]

$$\mathbf{G}_{\vec{r}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{\vec{r}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Kinematika může být nazvána jako studium poloh, rychlostí a zrychlení bez ohledu na síly způsobující pohyby. Vektory a souřadné systémy jsou podstatnými nástroji pro analýzu pohybu komplexních systémů, zvláště když pohyb je trojrozměrný a zahrnuje více částí. Tedy matice rotace jako transformace souřadnic může být rovněž formulována jako popis

změn bázových vektorů z jedné souřadné soustavy do druhé. Matice rotace může být interpretována třemi různými způsoby:

- **Zobrazení** - představuje transformaci souřadnic, zobrazení vztahující se k souřadnicím bodu \mathbf{P} ve dvou různých souřadných soustavách,
- **Popis soustav souřadnic** - udává orientaci transformované soustavy souřadnic vzhledem na pevnou soustavu,
- **Operátor** - je to operátor měnící vektor do jiného vektoru.

Otáčení tuhého tělesa může být popsáno maticí rotace R , Eulerovými úhly, pravidlem úhlů os a kvaterniony. Každý popis má své výhody a nevýhody. Výhodou matice rotace R je přímá interpretace do změny bázových vektorů, zatímco její nevýhodou je, že si musíme pamatovat devět závislých parametrů. Fyzikální smysl jednotlivého čísla se ztratil, smysl má jen matice jako celek.[1]

Eulerovy úhly jsou zhruba definovány třemi postupnými rotacemi okolo tří os lokálního (někdy globálního) souřadného systému. Výhodou je, že rotace je popsána třemi nezávislými parametry s úplnou fyzikální interpretací. Nevýhodou je, že jejich interpretace není jednoznačná a vede k problémům se singularitami. Je zde komplikovaná cesta jak vypočítat násobnou rotaci bez použití matic.

Pravidlo úhlů os je nejintuitivnější reprezentace rotace. Ale vyžaduje zapamatovat čtyři parametry pro jednu rotaci, výpočet kombinovaných rotací není jednoduchý a je pro malé rotace špatně podmíněný.

Kvaterniony jsou výhodné díky zachování intuitivního charakteru pravidla úhlů os a překonání jejich nevýhod pro malé rotace a tím, že dovolují výpočet kombinovaných rotací. Nevýhodou je, že jsou potřeba čtyři parametry pro vyjádření rotace. Parametrizace je komplikovanější a někdy se ztrácí fyzikální smysl. Násobení kvaternionů není zcela jako násobení matic.[1]

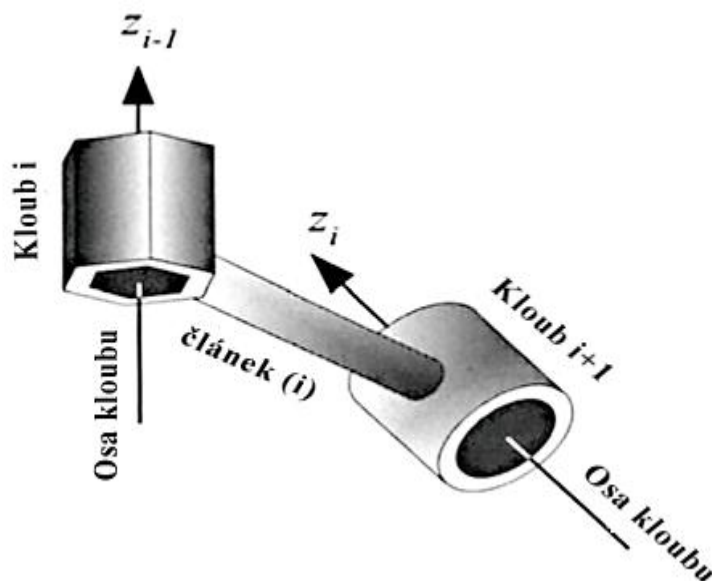
3 DENAVIT-HARTENBERGOVA TEORIE

Teorie Denavita a Hartenberga byla vyvinuta v roce 1955 a sjednotila pokročilé kinematiky robotických manipulátorů. V roce 1959 se objevuje na trhu první obchodně vhodný robot. Robotické manipulátory byly v průmyslu použity po roce 1960 a zažily raketový růst v 80-tých letech.

Existují tři základní a systematické metody jak prezentovat relativní polohu a orientaci článku manipulátoru. První a nejpoužívanější metoda používaná v kinematice robotiky je založena na Denavit-Hartenbergově notaci pro definování prostorového mechanismu a homogenní transformace bodů. Pro reprezentaci prostorových transformací polohového vektoru bodu je použita matice 4×4 nebo homogenní transformace. Metoda transformační matice je nejpoužívanější technika pro popis pohybu robota.[1]

3.1 Denavit-Hartenbergerova symbolika (notace)

Sériový robot s n klouby má $n+1$ článků. Očíslujme články počínajíc (0) pro nepohyblivý základní, se zemí spojený článek a postupně až po (n) pro článek koncového efektoru. Očíslujme klouby počínajíc 1 pro kloub spojující první pohyblivý článek s nepohyblivým základním, se zemí spojeným článkem a postupně až po n . Tedy článek (i) je spojen s předchozím článkem blíže základnímu ($i-1$) prostřednictvím kloubu i a s následujícím blíže k efektoru kloubem $i+1$ viz *obrázek 2*. [1]



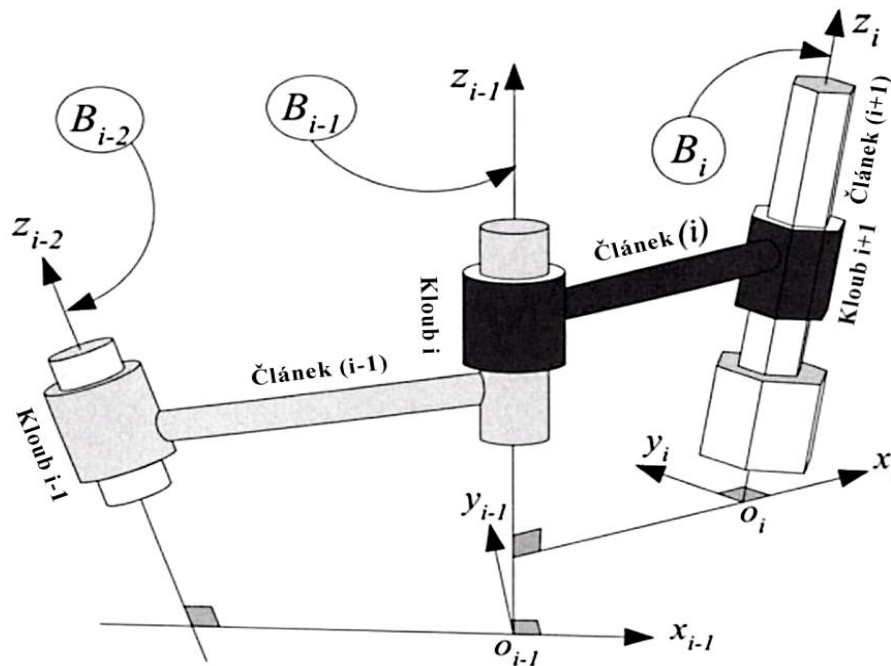
Obrázek 2: Článek (i) a jeho kloub směrem k základně i a směrem k efektoru $i+1$

Obrázek 3 ukazuje články $(i-1)$, (i) a $(i+1)$ sériového robota spolu s klouby $i-1$, i a $i+1$. Každý kloub je označen svoji osou, která může být translační nebo rotační. Pro získání kinematických informací o částech robota připojíme ke každému článku pevně lokální soustavu souřadnic B_i v kloubu $i+1$ použitím následující standardní metody známé jako Denavit-Hartenbergova metoda.[1]

1. Osa z_i je spojena s osou $i+1$ kloubu

Všechny klouby bez rozdílu jsou reprezentovány osou z . Vždy začínáme identifikací os z_i . Kladný směr osy z_i je libovolný. Identifikace osy kloubu pro rotační klouby je jasná, pro translační kloub lze vybrat jakoukoliv osu paralelní se směrem posunutí. Přiřazením os z_i jsou rovněž určeny dvojice článků po obou stranách každého kloubu a rovněž dva klouby po obou stranách každého článku.

2. Osa x_i je definována podél společné normály os z_{i-1} a z_i směřující od z_{i-1} k z_i



Obrázek 3: Článek $(i-1)$, (i) , a $(i+1)$ se soustavou souřadnic B_i a B_{i-1}

Osy z mohou být všeobecně mimoběžné osy šroubovic, ale vždy existuje přímka vzájemně kolmá nazývaná společnou normálou. Na této přímce je nejkratší vzdálenost mezi nimi. Jestliže dvě osy z jsou paralelní (rovnoběžné) existuje nekonečný počet společných normál. V tomto případě vybereme tu společnou normálu, která je kolineární se společnou normálou předchozích kloubů. Jestliže se dvě osy z protínají, pak mezi nimi neexistuje

společná normála. V tomto případě osu \mathbf{x}_i označíme kolmou na rovinu tvořenou dvěma osami \mathbf{z} . [1]

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \frac{\vec{\mathbf{z}}_{i-1} \times \vec{\mathbf{z}}_i}{|\vec{\mathbf{z}}_{i-1} \times \vec{\mathbf{z}}_i|} \quad (4)$$

Jsou-li dvě osy \mathbf{z} kolineární, pak uspořádání kloubů je buď $\mathbf{P}||\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{R}||\mathbf{P}$. Proto v tom případě přiřadíme osu \mathbf{x}_i tak, že je kloubová proměnná rovná $\theta_i = \mathbf{0}$ v klidové poloze robota.

3. Osa \mathbf{y}_i je definována pomocí vektorového součinu

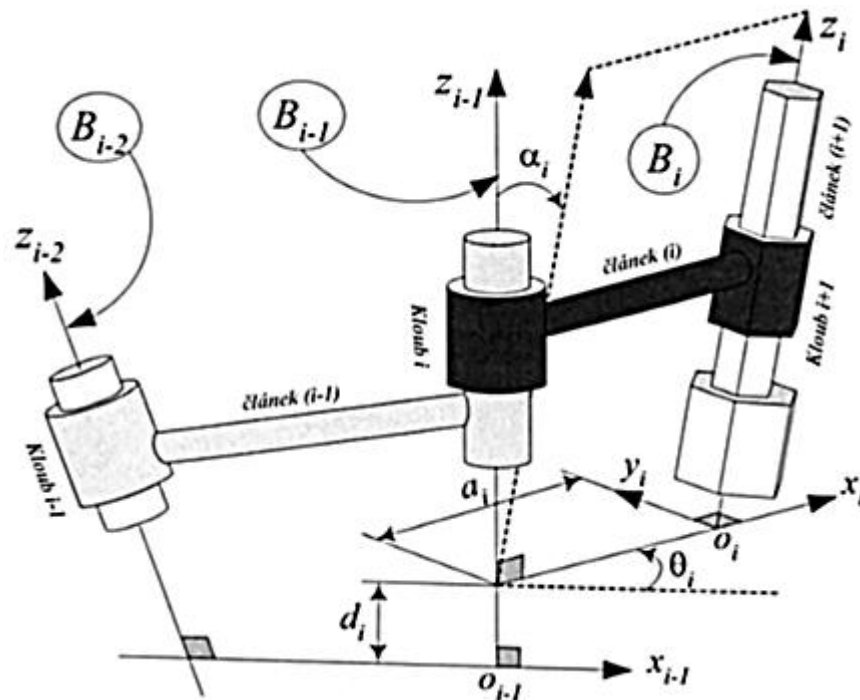
$$\hat{\mathbf{y}}_i = \frac{\vec{\mathbf{z}}_i \times \vec{\mathbf{x}}_i}{|\vec{\mathbf{z}}_i \times \vec{\mathbf{x}}_i|} \quad (5)$$

Všeobecně řečeno: Přiřadíme souřadnou soustavu každému článku tak, že jedna ze tří souřadnicových os \mathbf{x}_i , \mathbf{y}_i , \mathbf{z}_i (obyčejně \mathbf{x}_i) je zrektifikována s osou dalšího kloubu. Aplikací Denavit-Hartenbergova metody je počátek \mathbf{o}_i soustavy souřadnic $\mathbf{B}_i(\mathbf{o}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ spojený s článkem (i), umístěným do průsečíku osy $i+1$ -ho kloubu a společné normály mezi osami \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i . DH¹ soustava souřadnic je určena čtyřmi parametry: \mathbf{a}_i , α_i , θ_i a \mathbf{d}_i . [1]

1. **Délka článku \mathbf{a}_i** je vzdálenost mezi osami \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i podél osy \mathbf{x}_i . \mathbf{a}_i je kinetická délka článku (i),
2. **Zkroucení článku α_i** je rotace osy \mathbf{z}_{i-1} okolo osy \mathbf{x}_i , aby se stala paralelní s osou \mathbf{z}_i ,
3. **Vzdálenost kloubu \mathbf{d}_i** je vzdálenost mezi osami \mathbf{x}_{i-1} a \mathbf{x}_i podél osy \mathbf{z}_{i-1} . Vzdálenost kloubu je někdy nazývána jako offset článku,
4. **Úhel článku θ_i** je požadované otočení osy \mathbf{x}_{i-1} a \mathbf{x}_i podél osy \mathbf{z}_{i-1} , aby se stala paralelní s osou \mathbf{x}_i . [1]

Parametry DH soustavy souřadnic článků na *obrázku 3* jsou zobrazeny na *obrázku 4*.

¹ Denavit-Hartenbergovy metody



Obrázek 4: Parametry a_i , α_i , θ_i a d_i definované pro kloub (i) a článek (i)

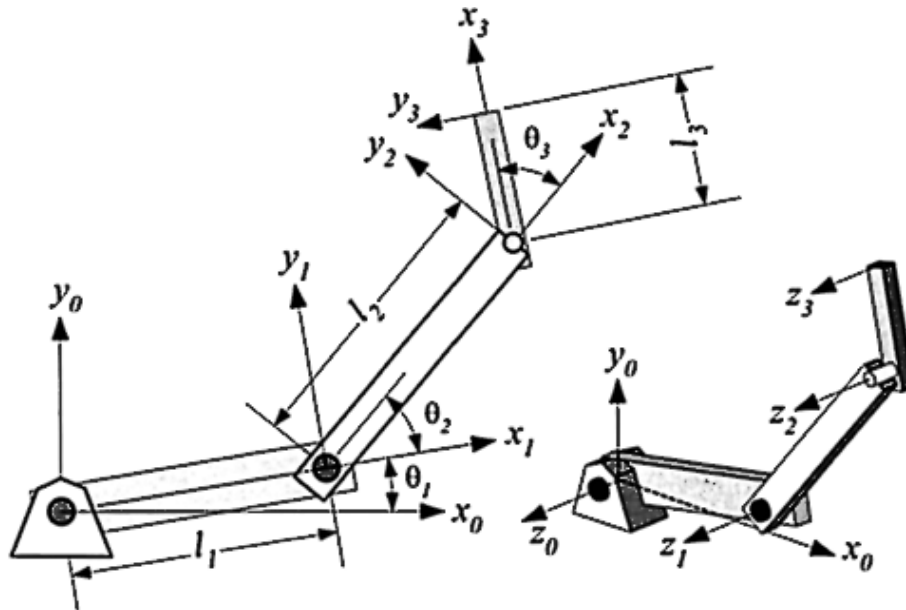
Parametry θ_i a d_i se nazývají **kloubové parametry**, protože definují relativní polohu dvou spojených článků spojených v kloubu i . V uvažovaných robotech každý kloub je rotační nebo translační. Tedy pro každý kloub bude buď θ_i nebo d_i pevné a druhé proměnné.

Parametry a_i , α_i se nazývají **článekovými parametry**, protože definují relativní polohu kloubu i a $i+1$ a obou konců článku (i). Zkroucení článku α_i je úhel rotace osy z_{i-1} okolo osy x_i , aby se stala paralelní s osou z_i . Délka článku a_i je posunutí podél osy x_i aby z_{i-1} aby byla osou z_i . Článekové parametry a_i , α_i definují šroubový pohyb, protože α_i je rotace okolo osy x_i a a_i je translace podél osy x_i . [1]

Tabulka 1: Tabulka DH parametrů pro zavedení článkových soustav souřadnic

Souřadná soustava č.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	α_1	d_1	θ_1
2	a_2	α_2	d_2	θ_2
...
j	a_j	α_j	d_j	θ_j
n	a_n	α_n	d_n	θ_n

Na ukázkou zavedení soustavy souřadnic si zde ukážeme příklad zobrazený na *obrázku 5*, který nám ukazuje zavedení soustavy souřadnic v praxi na rovinném manipulátoru v zobrazení 3R.



Obrázek 5: Zobrazení 3R rovinného manipulátoru a DR s. soustavy každého článku

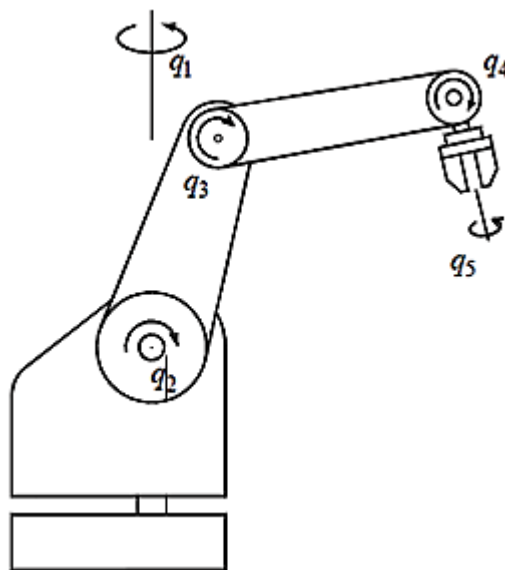
Z takto zvolených souřadnic nám vzniká tabulka s DH parametry, která je zobrazena v *tabulce 2*. [1]

Tabulka 2: DH parametry pro 3R rovinný manipulátor z obrázku 5

Souřadná soustava č.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

4 KINEMATIKA MECHANISMŮ

Důležitou součástí analýzy robotů je úplný kinematický model mechanického systému, který poskytuje vztahy mezi všemi potřebnými kinematickými veličinami jak pro dynamický model mechanického systému (silové působení, zatěžování článků, dimenzování), tak pro potřeby řízení (syntéza regulátorů polohy a rychlosti). Jedná se zejména o průběh polohy a orientace koncového pracovního bodu v čase a tomu odpovídající průběh polohy jednotlivých článků mechanismu. Poloha článků je obecně popsána tzv. zobecněnými souřadnicemi (v robotice je často používán pojem kloubové proměnné – *joint variables*), které udávají natočení, či posunutí jednotlivých pohybových os. Na *obrázku 6* je znázorněn průmyslový robot s pěti stupni volnosti, jehož zobecněné souřadnice q_1 až q_5 udávají natočení jednotlivých článků, koncový pracovní bod je v tomto případě specifikován ve středu čelistí.[4]



Obrázek 6: Průmyslový robot s pěti stupni volnosti

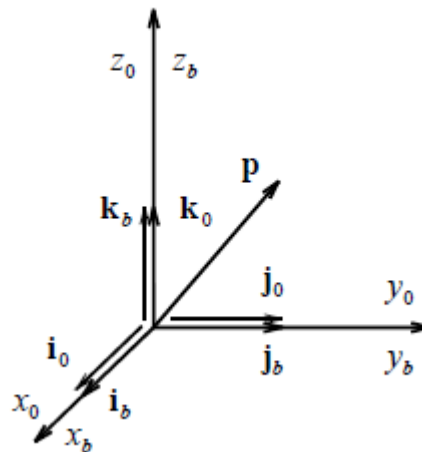
4.1 Přímá úloha kinematiky

V kinematice prostorových mechanismů existují dvě základní úlohy. Úloha, kdy jsou známy jednotlivé zobecněné souřadnice a hledáme polohu a orientaci koncového bodu, je tzv. **přímá úloha kinematiky**. Tato úloha je snadno řešitelná pomocí goniometrických vztahů mezi jednotlivými články nebo pomocí lokálních souřadných systémů článků a transformačními maticemi pro přepočítání souřadnic mezi nimi. Úloha opačná, kdy známe polohu a

orientaci koncového bodu a hledáme jednotlivé zobecněné souřadnice, se nazývá **inverzní úloha kinematiky** a řešení této úlohy je obtížnější zejména pro kinematické struktury s více stupni volnosti.[1],[4]

4.1.1 Transformace souřadnic

Pro přepočítání (transformaci) souřadnic libovolného bodu každého ideálně tuhého článku mezi lokálními souřadnými systémy, které jsou spojeny s daným článkem a globálním souřadným systémem, který je spojen s pracovním prostorem, je s výhodou využíváno maticového počtu. Odvození maticových vztahů pro přepočítání souřadnic z jednoho souřadného systému do jiného je poměrně snadné a je ukázáno na příkladu dvou identických souřadných systémů.[4]



Obrázek 7: Ukázka dvou souřadných systémů

x_b, y_b, z_b (GCS²) a x_0, y_0, z_0 (LCS³) na obrázku 7. Vektor \vec{p} v součtovém tvaru je možno vyjádřit v souřadném systému $x_b, y_b, z_b \Rightarrow \mathbf{O}_{x_b, y_b, z_b}$ ve tvaru:

$$\vec{p} = p_{x_b} \hat{i}_b + p_{y_b} \hat{j}_b + p_{z_b} \hat{k}_b \quad (6)$$

a v souřadném systému $x_0, y_0, z_0 \mathbf{O}_{x_0, y_0, z_0}$ ve tvaru:

$$\vec{p} = p_{x_0} \hat{i}_0 + p_{y_0} \hat{j}_0 + p_{z_0} \hat{k}_0 \quad (7)$$

² základní (globální) souřadný systém (GCS – Global Coordinate System)

³ lokální souřadný systém (LCS – Local Coordinate System)

Souřadnice vektoru \bar{p} je možno také vyjádřit jako průměty vektoru \bar{p} do směru jednotlivých jednotkových vektorů a tedy jako skalární součin:

$$\begin{aligned} p_{x_b} &= \hat{i}_b \cdot \bar{p} \\ p_{y_b} &= \hat{j}_b \cdot \bar{p} \\ p_{z_b} &= \hat{k}_b \cdot \bar{p} \end{aligned} \quad (8)$$

Pro nalezení transformačního vztahu do souřadnic vektoru \bar{p} vyjádřeného v souřadném systému x_b, y_b, z_b O_{x_b, y_b, z_b} dosadíme vyjádření téhož vektoru \bar{p} v souřadném systému x_0, y_0, z_0 O_{x_0, y_0, z_0} . Dostaneme soustavu rovnic:[4]

$$\begin{aligned} p_{x_b} &= \hat{i}_b \cdot \bar{p} = \hat{i}_b \cdot (p_{x_0} \hat{i}_0 + p_{y_0} \hat{j}_0 + p_{z_0} \hat{k}_0) = p_{x_0} \hat{i}_b \cdot \hat{i}_0 + p_{y_0} \hat{i}_b \cdot \hat{j}_0 + p_{z_0} \hat{i}_b \cdot \hat{k}_0 \\ p_{y_b} &= \hat{j}_b \cdot \bar{p} = \hat{j}_b \cdot (p_{x_0} \hat{i}_0 + p_{y_0} \hat{j}_0 + p_{z_0} \hat{k}_0) = p_{x_0} \hat{j}_b \cdot \hat{i}_0 + p_{y_0} \hat{j}_b \cdot \hat{j}_0 + p_{z_0} \hat{j}_b \cdot \hat{k}_0 \\ p_{z_b} &= \hat{k}_b \cdot \bar{p} = \hat{k}_b \cdot (p_{x_0} \hat{i}_0 + p_{y_0} \hat{j}_0 + p_{z_0} \hat{k}_0) = p_{x_0} \hat{k}_b \cdot \hat{i}_0 + p_{y_0} \hat{k}_b \cdot \hat{j}_0 + p_{z_0} \hat{k}_b \cdot \hat{k}_0 \end{aligned} \quad (9)$$

kteřou maticově vyjádříme ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} p_{x_b} \\ p_{y_b} \\ p_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_b \cdot \hat{i}_0 & \hat{i}_b \cdot \hat{j}_0 & \hat{i}_b \cdot \hat{k}_0 \\ \hat{j}_b \cdot \hat{i}_0 & \hat{j}_b \cdot \hat{j}_0 & \hat{j}_b \cdot \hat{k}_0 \\ \hat{k}_b \cdot \hat{i}_0 & \hat{k}_b \cdot \hat{j}_0 & \hat{k}_b \cdot \hat{k}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{x_0} \\ p_{y_0} \\ p_{z_0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

nebo symbolicky:

$$\bar{p}_b = R_b^0 \cdot \bar{p}_0 \quad (11)$$

Maticový vztah říká, že souřadnice vektoru \bar{p} přepočteme ze souřadného systému x_0, y_0, z_0 O_{x_0, y_0, z_0} do souřadného systému x_b, y_b, z_b O_{x_b, y_b, z_b} tak, že je zleva vynásobíme transformační maticí R_b^0 . R_b^0 indexy transformační matice udávají, mezi kterými souřadnými systémy je přepočet prováděn. Pro výše uvedený případ identických systémů musí být tato matice jednotková, čemuž odpovídají skalární součiny jednotkových vektorů.[4]

4.1.2 Transformace mezi dvěma přiléhajícími souřadnými soustavami

Souřadná soustava \mathbf{B}_i je spojena s článkem (\mathbf{i}) a souřadná soustava \mathbf{B}_{i-1} je spojena s článkem ($\mathbf{i-1}$). Na základě DH konvence je transformační matice ${}^{i-1}T_i$ pro transformaci soustavy souřadnic \mathbf{B}_i do \mathbf{B}_{i-1} reprezentována jako součin čtyřech základních transformací při použití parametrů článku (\mathbf{i}) a kloubu \mathbf{i} : [1],[4]

$$\begin{aligned}
{}^{i-1}T_i &= D_{z_{i-1},d_i} \cdot R_{z_{i-1},\theta_i} \cdot D_{x_{i-1},a_i} \cdot R_{x_{i-1},\alpha_i} = \tag{12} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

z tohoto vztahu vyplývá:

$$R_{x_{i-1},\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_{x_{i-1},a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$R_{z_{i-1},\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D_{z_{i-1},d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Tedy transformační rovnice pro přepočítání souřadnic z $\mathbf{B}_i(\mathbf{o}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ do předcházející $\mathbf{B}_{i-1}(\mathbf{o}_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$ je:

$$\begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \\ z_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{i-1}T_i \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

kde

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Tato rovnice 4x4 může být rozdělena na dvě submatice reprezentující jedinou rotaci a jedinou translaci a dosáhneme stejný pohyb tuhého tělesa z $\mathbf{B}_i(\mathbf{o}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ do předcházející $\mathbf{B}_{i-1}(\mathbf{o}_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$.

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}\mathbf{R}_i & {}^{i-1}\mathbf{d}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

kde

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}; \quad {}^{i-1}\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \sin\theta_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

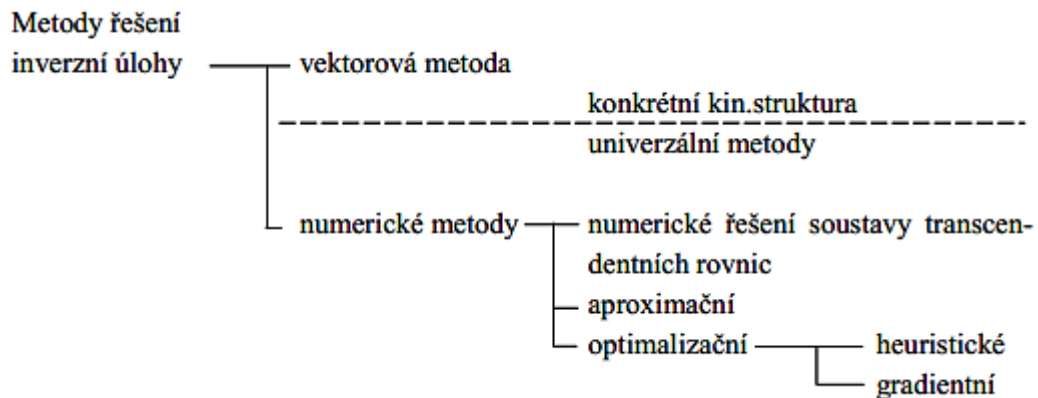
4.2 Inverzní úloha kinematiky

Inverzní transformace úplného vektoru polohy $\bar{\mathbf{w}}$ na vektor obecné souřadnice $\bar{\mathbf{q}}$, jehož složky jsou zobecněné souřadnice natočení nebo posuvu jednotlivých kinematických dvojic, je základním výpočtem kinematiky mechanismů a je nezbytná pro účely polohování jednotlivých článků mechanismu.

Zatímco výpočet přímé transformace vektoru polohy $\bar{\mathbf{p}}$ a vektoru orientace $\bar{\mathbf{o}}$ je při známé transformační matici T_b^n jednoduchý, výpočet inverzní úlohy kinematiky[4]

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{o}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inverzní transformace}} \bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

je relativně komplikovaná úloha, která je stále v popředí zájmu řady pracovníků ve světě a algoritmy výpočtu inverzní transformace jsou stále rychlejší a univerzálnější. Základním kritériem, kterým je možno hodnotit metody inverzní transformace, je jejich univerzálnost, tj. použití stejného algoritmu pro libovolnou kinematickou strukturu a počet stupňů volnosti mechanismu. Univerzální metody jsou aplikovány zejména u velkých CAD systémů, kdy programový systém musí zvládnout kinematickou úlohu libovolné kinematické struktury. Pro aplikace v oblasti řízení je rychlost výpočtu rozhodující, protože řešení inverzní úlohy probíhá v ideálním případě v reálném čase. Obecný přehled metod inverzní transformace z hlediska jejich principu je ukázán na obrázku 8.[1],[4]



Obrázek 8: Metody inverzní transformace

Použití uvedených numerických metod je bezproblémové u mechanismů s otevřenou kinematickou strukturou, u kinematických struktur s jednoduchými smyčkami se dají tyto metody v řadě případů použít přímo, popřípadě po úpravách. Složitější kinematické struktury se smyčkami je nutno řešit dle metodiky.[4]

4.2.1 Metoda rozpojení

Určení kloubových proměnných na základě polohy koncového efektoru a jeho orientace se nazývá **inverzní kinematika**. Matematicky je inverzní kinematika hledání prvků ru $\bar{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n]^T$ na základě transformace, která je daná jako funkce kloubových proměnných $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$:

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-2}T_{n-1}(q_{n-1}) {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (20)$$

Roboty řízené počítačem jsou obvykle řízeny v prostoru kloubových souřadnic, ale manipulovaný objekt je popsán obvykle v globální souřadné soustavě. Tedy, protože transformace nese informace o vzájemné kinematické interakci mezi kloubovým prostorem a kartézským prostorem, je nezbytné v robotických aplikacích ji využít. Abychom mohli řídit konfiguraci koncového efektoru (potřebnou pro práci v prostoru), musíme vyřešit úlohu inverzní kinematiky.[1]

Jinak řečeno: Musíme zjistit, jaké žádané hodnoty kloubových souřadnic potřebujeme k tomu, abychom dosáhli požadovaného bodu efektoru v prostoru a jeho orientaci. Výsledek přímé kinematiky robota se 6 DOF je transformační matice 4x4.

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

kde jejich **12 prvků** jsou trigonometrické funkce šesti neznámých kloubových proměnných. Ale levá horní submatice 3x3 je transformační matice rotace, kde pouze **tři** její prvky jsou nezávislé. To vyplývá z podmínek ortogonalit (výkonové invariance) transformace. Tedy jen 6 z 12 rovnic bude nezávislých. Rovnice s trigonometrickými funkcemi inherentně vedou na vícenásobné řešení. Tedy řešením uvedených 6 rovnic zjistíme, že existuje více konfigurací polohy robota. Je možné problém inverzní kinematiky rozdělit do dvou podproblémů: [1]

- *inverzní kinematika polohy*
- *inverzní kinematika orientace*

Praktickým důsledkem tohoto rozdělení je možnost rozdělit problém do dvou samostatných nezávislých problémů, každý s pouze třemi neznámými proměnnými. V důsledku tohoto rozdělení souhrnná transformační matice robota může být rozdělena na translaci a rotaci

$${}^0T_6 = {}^0D_6 {}^0R_6 = \begin{bmatrix} I & {}^0\bar{d}_6 \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0R_6 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0\bar{d}_6 \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Matice translace 0D_6 může být řešena pro polohové proměnné zápěstí a matice rotace 0R_6 může být řešena pro proměnnou udávající orientaci zápěstí.

Většina robotů má zápěstí provedeno jako tři rotační klouby s bodem zápěstí jako průsečíkem jejich ortogonálně uspořádaných os. Můžeme rozdělit kinematiku zápěstí a manipulatoru rozdělením obecné transformační matice přímé kinematiky 0T_6 na orientaci zápěstí a polohu zápěstí.[1]

$${}^0T_6 = {}^0T_3 {}^3T_6 = \begin{bmatrix} {}^0R_3 & {}^0\bar{d}_3 \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^3R_6 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

z toho vyplývá:

$$\begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0\bar{d}_6 \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_3 & {}^0\bar{d}_3 \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^3R_6 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (24)$$

$$\Rightarrow {}^0R_6 = {}^0R_3 \cdot {}^3R_6 \Rightarrow {}^3R_6 = ({}^0R_3)^T \cdot {}^0R_6 = ({}^0R_3)^T \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow {}^0\bar{\mathbf{d}}_6 = {}^0\bar{\mathbf{d}}_3 \Rightarrow {}^0\bar{\mathbf{d}}_3 = \begin{bmatrix} r_{14} \\ r_{24} \\ r_{34} \end{bmatrix}$$

Vektor polohy zápěstí obsahuje pouze proměnné manipulátoru. Tedy inverzní kinematiku robota musíme řešit soustavou s 0T_3 pro polohu bodu zápěstí a pak musíme řešit soustavu s 3T_6 pro orientaci zápěstí. [1]

Složka polohy vektoru zápěstí:

$${}^0\bar{\mathbf{d}}_6 = {}^0\bar{\mathbf{d}}_3 \Rightarrow {}^0\bar{\mathbf{d}}_3 = \begin{bmatrix} r_{14} \\ r_{24} \\ r_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1\check{z}} \\ r_{2\check{z}} \\ r_{3\check{z}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

vedou na tři rovnice pro tři neznámé proměnné manipulátoru. Na jejich základě můžeme vypočítat:

$${}^3R_6 = ({}^0R_3)^T \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (26)$$

z tohoto zápisu můžeme vypočítat orientaci zápěstí. Zavedeme-li do přímé kinematiky souřadnou soustavu nástroje, dekompozice je daná následujícími rovnicemi vylučujícími z kinematiky robota vliv nástrojové vzdálenosti \mathbf{d}_6 . [1]

$${}^0T_7 = {}^0T_3 {}^3T_7 = {}^0T_3 {}^3T_6 {}^6T_7 = \begin{bmatrix} {}^0R_3 & {}^0\bar{\mathbf{d}}_3 \\ \bar{\mathbf{0}}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^3R_6 & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{0}}^T & \mathbf{d}_6 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Pak inverzní kinematická úloha začne určením 0T_6 , kterou můžeme nalézt jako [1]

$$\begin{aligned} {}^0T_7 &= {}^0T_6 {}^6T_7 \Rightarrow {}^0T_6 = {}^0T_7 ({}^6T_7)^{-1} = \\ &= {}^0T_7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{d}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = {}^0T_7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{d}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

5 POHYBOVÉ ROVNICE

Hlavním krokem pro dynamickou analýzu systému je odvození pohybových rovnic systému, protože pohybové rovnice jsou podstatné pro návrh, analýzu a řízení systému. Dynamické pohybové rovnice popisují dynamické chování. Mohou být použity pro počítačovou simulaci pohybu robota, návrh vyhovujících zákonů řízení a vyhodnocení dynamické výkonnosti návrhu. Podobně jako v kinematice, problém dynamiky robota lze rozdělit jako přímý a inverzní dynamický problém.[1]

- v **přímém dynamickém problému** bychom měli určit pohyb robota při daných počátečních podmínkách a silách (zobecněných silách) v aktivních kloubech.
- v **inverzním dynamickém problému** bychom měli vypočítat síly a momenty potřebné pro generování požadované trajektorie pro zadanou množinu poloh, rychlostí a zrychlení.

Problém řízení pohybu robota lze charakterizovat jako požadovaný pohyb koncového efektoru. Požadovaný pohyb je specifikován jako trajektorie v kartézské soustavě souřadnic, zatímco řízení akčních členů (servopohonů) vyžaduje požadované hodnoty v kloubových souřadnicích. Senzory pohybových stavů generují data určující aktuální stav robota v prostoru kloubů. To vyvolává požadavek vyjádření kinematických proměnných z kartézské soustavy souřadnic do odpovídajících kloubových souřadnic. Tyto transformace jsou závislé na geometrii kinematiky manipulátoru. Tedy řízení pohybu robota obsahuje tři výpočtové problémy:

1. určení požadované trajektorie v kartézském souřadnicovém systému,
2. transformace kartézské trajektorie do odpovídajících kloubových souřadnic,
3. generování zobecněných sil pro uskutečnění pohybu po žádané trajektorii.[1]

5.1 Lagrangeova mechanika

Lagrangeovy pohybové rovnice poskytují systematický přístup k získání dynamických rovnic pohybu robotů. Lagrangeova funkce nebo Lagrangeian je definován jako rozdíl kinetické a potenciální energie pohybového systému robota.[1]

Předpokládejme, že některá síla působící na \mathbf{m}_i $\vec{F}_{mi} = F_{ix} \cdot \hat{i} + F_{iy} \cdot \hat{j} + F_{iz} \cdot \hat{k}$ je důsledkem potenciálu a tedy potenciální energie je:

$$\vec{F}_{mi} = -\nabla_i V = -\left(\hat{i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} + \hat{j} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_i} + \hat{k} \cdot \frac{\partial V}{\partial z_i}\right) \quad (29)$$

Pak tato síla je nazývána potenciálovou nebo konzervativní silou a Lagrangeovy rovnice lze přepsat do tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = Q_r; \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (30)$$

kde

$$L = W_k - W_p \quad (31)$$

je takzvaná **Lagrangeova funkce** nebo **Lagrangeian** a Q_r je nepotenciálová (nekonzervativní) zobecněná síla.[1],[4]

Důkaz:

Předpokládejme, že vnější síla působící na \mathbf{m}_i je konzervativní. Tedy necht':

$$\vec{F}_{mi} = -\nabla_i V = -\left(\hat{i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} + \hat{j} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_i} + \hat{k} \cdot \frac{\partial V}{\partial z_i}\right) \quad (32)$$

Práce vykonaná touto silou při posunutí zobecněných souřadnic o $d\mathbf{q}_1, d\mathbf{q}_2, \dots, d\mathbf{q}_n$ je:

$$dW_p = dV = -dq_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial q_1} - dq_2 \cdot \frac{\partial V}{\partial q_2} - \dots - dq_n \cdot \frac{\partial V}{\partial q_n} \quad (33)$$

Protože platí:

$$L = W_k - W_p \Rightarrow W_k = L + W_p \quad (34)$$

Lagrangeovy rovnice mají tvar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial W_k}{\partial q_r} = -\frac{\partial W_p}{\partial q_r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\overset{0}{\partial W_p}}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{\partial W_p}{\partial q_r} = -\frac{\partial W_p}{\partial q_r} \quad (35)$$

↓

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0; \quad r = 1, 2, \dots, n$$

Existuje-li nekonzervativní síla, pak práce vykonaná touto silou Q_r ve směru \mathbf{q}_r je:

$$dW = \sum_{i=1}^n \left(F_{ix} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + F_{iy} \frac{\partial g_i}{\partial q_r} + F_{iz} \frac{\partial h_i}{\partial q_r} \right) \cdot dq_r = Q_r \cdot dq_r \quad (36)$$

a Lagrangeovy rovnice tedy jsou:[1]

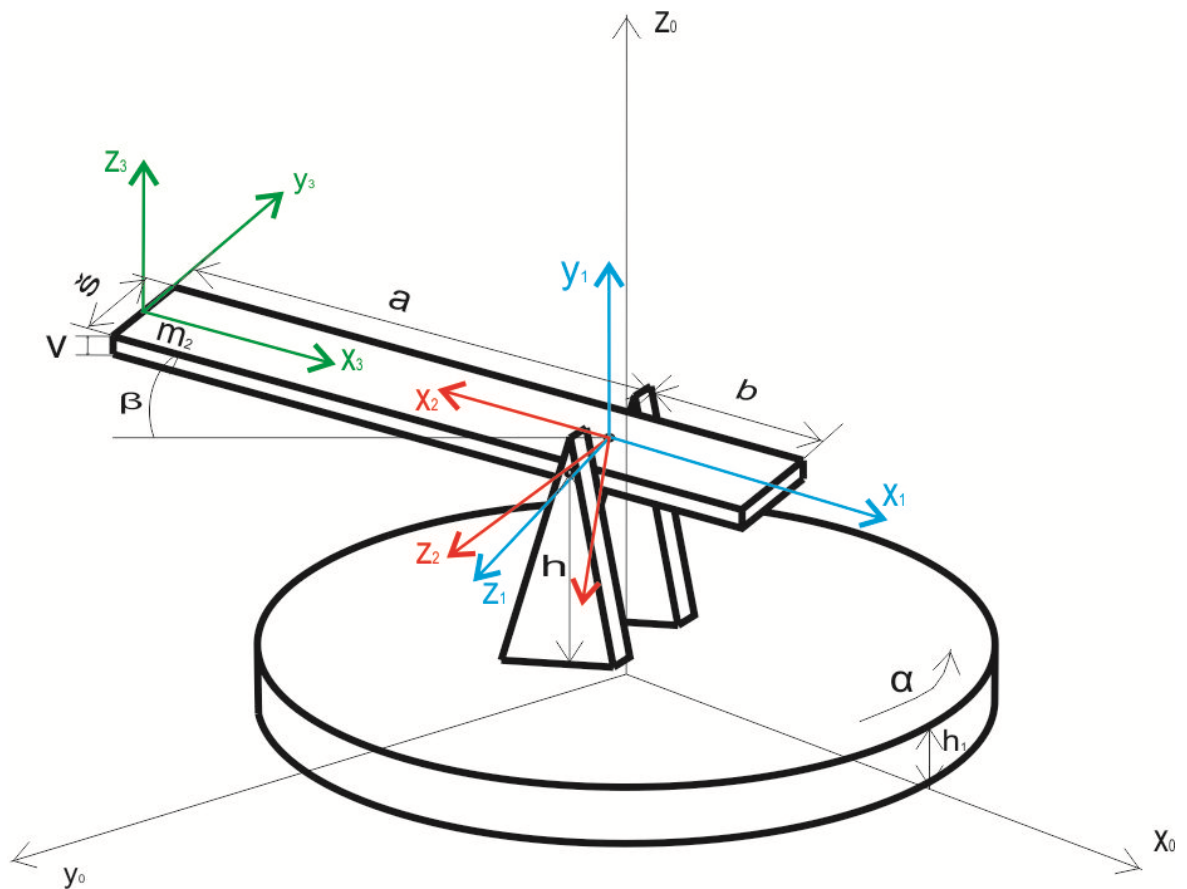
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = Q_r; \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (37)$$

Tímto vysvětlením Lagrangeovy funkce a pohybových rovnic bychom ukončili teoretickou část diplomové práce, která byla v první řadě věnována snaze osvětlit veškeré prostředky, vedoucí k objasnění úloh, které budeme využívat v praktické části této diplomové práce. Obzvláště k dosažení potřebných pohybových rovnic, které budou následně využívány k pokusům v počítačovém programovém prostředí Dynast. V celé teoretické části této práce byla předvedena ukázka všech potřebných úloh a používaných metod v obecné formě.

Následující kapitola se již bude věnovat našemu zkoumanému manipulátoru v takzvaném modelu podle Cardanova uspořádání. Všechny využitě metody pro získání pohybových rovnic uvedené v teoretické části práce jsou v následujících kapitolách aplikovány přímo do konkrétního tvaru, jaký vyžaduje náš manipulátor. Výsledkem praktické části budou pohybové rovnice, které dosadíme do blokového schématu vytvořeného pro náš manipulátor v programu Dynast (tento program je více popsán v praktické části práce). Následně v tomto programovém prostředí budeme pozorovat chování náměrové a odměrové části manipulátoru, při konkrétních požadavcích na jeho celkové chování a pohyby.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

6 MODELOVÉ SCHÉMA MANIPULÁTORU



Obrázek 9: Model manipulátoru se soustavou souřadných systémů

Na výše uvedeném *obrázku 9* je znázorněn model takzvaného Cardanova uspořádání azimut – elevace. Indexy x_0, y_0, z_0 zobrazují globální soustavu souřadnic, indexy x_1, y_1, z_1 je soustava souřadnic spojená s azimutem a umístěna do výšky h . Indexy označené jako x_2, y_2, z_2 jsou v soustavě souřadnic, která je spojena s elevací modelu a jsou také umístěny ve výšce h . Poslední soustava souřadnic, která je na modelu zobrazena, je spojena s efektem modelu a je označena indexy x_3, y_3, z_3 , pomocí této soustavy lze zadávat požadovaný pohyb koncového efektoru.

Pro zjištění požadovaných souřadnic, určujících polohu obou těles pro koncovou polohu náměru, na kterém je umístěn efektor, jsme pro daný model nejprve odvodili Denavit-Hartenbergovu soustavu souřadnic, která je vyjádřena čtyřmi parametry:

- a_i - délka článku
- α_i - zkroucení článku

- θ_i - úhel článku
- d_i - vzdálenost kloubu

Všechny tyto parametry jsou podrobněji popsány v teoretické části práce.

Tabulka 3: DH parametry pro zavedený manipulátor

parametr čísla čl.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	90°	$h+h_1$	α
2	0	0°	0	$180^\circ-\beta$
3	-a	-90°	0	-180°

Tabulka 3 nám ukazuje parametry, pomocí kterých lze zavést systematické soustavy souřadnic článků. V tabulce 3 jsou uvedeny čtyři sloupce pro indexy a tři pro parametry. Řádky jsou vyplněny konstantními parametry a kloubovými proměnnými pro každou soustavu souřadnic našeho modelu. Kloubové proměnné nalezneme pomocí soustavy souřadnic a článků, které se budou navzájem pohybovat, resp. „rotovat“ při jednotlivých aktivních kloubech.

Tyto DH parametry lze odvodit z pohledu na *obrázek 9*, který je uveden na začátku této kapitoly. V následující kapitole se již věnujeme složitějším matematickým výpočtům, které jsou zde podrobně vysvětleny a vyjádřeny.

7 POSTUP JEDNOTLIVÝCH VÝPOČTŮ

V následujících kapitolách si ukážeme podrobné výpočty, které jsou nezbytné pro získání pohybových rovnic našeho manipulátoru. Získané rovnice následně použijeme v programovém prostředí Dynast, kde si budeme simulovat různé otáčení manipulátoru a snažit se získat co nejmenší odchylky od ideálního průběhu. V našem případě se bude jednat o pohyb po kružnici, který bude manipulátor za pomoci koncového efektoru vykreslovat.

Základním prvkem pro získání pohybových rovnic je určení transformačních matic, které jsou odvozeny v následující kapitole.

7.1 Transformační matice

Zde si odvodíme transformační kinematické matice jednotlivých bodů, které vznikají mezi jednotlivými souřadnými systémy. Ty jsou důležité, abychom byli schopni provádět převod mezi kloubovými souřadnicemi (úhly, natočení ramen) a souřadnicemi efektoru. Lze říci, že problém v nalezení polohy koncového efektoru a jeho orientace je přímý kinematický problém. Tento problém vyřešíme určením transformačních matic 0T_i od článku i k článku $i-1$ s použitím DH notací.

Na principu DH konvence nám transformační matice určí odvozená matice ${}^{i-1}T_i$, která je reprezentována jako součin čtyř základních transformačních matic pro translaci a rotaci při použití článku (i) a kloubu i . Tato matice je podrobně popsána v teoretické části práce a vypadá následovně:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Do takto zavedené transformační matice dosazujeme parametry vyjádřené v *tabulce 3*, která nám zaznamenává parametry našeho manipulátoru.

Pro matice 0T_1 použijeme hodnoty parametrů prvního řádku tabulky, v matici 1T_2 použijeme hodnoty parametrů druhého řádku a pro matici 2T_3 hodnoty uvedené ve třetím řádku *tabulky 3*.

Zde si všechny matice ukážeme a vyřešíme:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\cos 90^\circ \sin\alpha & \sin 90^\circ \sin\alpha & 90^\circ \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos 90^\circ \cos\alpha & -\sin 90^\circ \cos\alpha & 90^\circ \sin\alpha \\ 0 & \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & h + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (39)$$

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$${}^1T_2 \quad (40)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 180^\circ - \beta & -\cos 0 \sin 180^\circ - \beta & \sin 0 \sin 180^\circ - \beta & 0 \cdot \cos 180^\circ - \beta \\ \sin 180^\circ - \beta & \cos 0 \cos 180^\circ - \beta & -\sin 0 \cos 180^\circ - \beta & 0 \cdot \sin 180^\circ - \beta \\ 0 & \sin 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} -\cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & -\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$2T_3$

$$= \begin{bmatrix} \cos \cdot (-180^\circ) & -\cos \cdot (-90^\circ) \sin \cdot (-180^\circ) & \sin \cdot (-90^\circ) \sin \cdot (-180^\circ) & -a \cdot \sin \cdot (-180^\circ) \\ \sin \cdot (-180^\circ) & \cos \cdot (-90^\circ) \cos \cdot (-180^\circ) & -\sin \cdot (-90^\circ) \cos \cdot (-180^\circ) & -a \cdot \sin \cdot (-180^\circ) \\ 0 & \sin \cdot (-90^\circ) & \cos \cdot (-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Pro odvození transformační matice 0T_3 , která nám převádí souřadnice v soustavě souřadnic efektoru do soustavy souřadnic v báze soustavě souřadnic, použijeme matice 0T_1 , 1T_2 , 2T_3 mezi jednotlivými body a to v součinném tvaru takto:

$${}^0T_3 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 \quad (42)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h + h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & -\cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & -\sin\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\beta & -a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos\beta \cdot \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \cdot \sin\beta & -a \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z výsledné transformační matice 0T_3 zjistíme polohu efektoru (což je v našem případě koncový bod manipulátoru v absolutní soustavě souřadnic) tak, že výslednou transformač-

ní matici 0T_3 vynásobíme maticí $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, a to takto:

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & -\sin\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\beta & -a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos\beta \cdot \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \cdot \sin\beta & -a \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ -a \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.2 Inverzní kinematická úloha

Tato úloha je pro náš manipulátor důležitá z hlediska řízení konfigurace koncového efektoru. Pro potřebnou práci v prostoru musíme vyřešit úlohu inverzní kinematiky. Vyřešením této úlohy zjistíme žádané hodnoty souřadnic, které jsou potřebné pro dosažení požadovaného bodu efektoru v prostoru a pro jeho orientaci.

Pro vyřešení úlohy inverzní kinematiky začínáme určením kloubových souřadnic polohového vektoru efektoru, a to takto:

$$\begin{bmatrix} -a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ -a \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (44)$$

$$z_e = h + h_1 + a \cdot \sin\beta \Rightarrow$$

$$\sin\beta = \frac{z_e - h - h_1}{a} \quad (45)$$

$$x_e^2 + y_e^2 = a^2 \cdot (\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta) = a^2 \cdot \cos\beta \Rightarrow$$

$$\cos^2\beta = \frac{x_e^2 + y_e^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\cos\beta = \pm \sqrt{\frac{x_e^2 + y_e^2}{a^2}} \quad (46)$$

Z těchto dvou rovnic určíme velikost úhlu β a pro učení velikosti úhlu α použijeme tyto dvě následující rovnice:

$$-a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = x_e \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = -\frac{x_e}{a \cdot \cos\beta} \quad (47)$$

$$-a \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta = y_e \Rightarrow$$

$$\sin\alpha = -\frac{y_e}{a \cdot \cos\beta} \quad (48)$$

Jelikož transformace jsou nosiči jen informací o vzájemné kinematické interakci mezi kartézským prostorem a kloubovým prostorem, je nutné v robotických aplikacích tuto úlohu využívat. Inverzní úloha je nezbytná pro řízení koncového efektoru (pro práci v prostoru).

7.3 Výpočet kinetické energie náměru

Polohu elementu, který si označíme \mathbf{d}_m , zjistíme pomocí výsledné transformační

ce ${}^0\mathbf{T}_3$ (kterou máme vyjádřenou výše) a pomocí matice $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, která reprezentuje lokální

polohu souřadnic elementu, a to takovýmto způsobem:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & -\sin\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\beta & -a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos\beta \cdot \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \cdot \sin\beta & -a \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} x \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta - a \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ -x \cdot \sin\beta + h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{x}$$

Pro určení kinetické energie elementu je potřeba určit jeho kvadrát absolutní rychlosti, který si označíme jako $|\vec{v}_x|^2$. Pro takto označený kvadrát rychlosti platí, že:

$$|\vec{v}_x|^2 = \text{trace}\{\vec{v} \cdot \vec{v}^T\} \quad (50)$$

Tedy tento kvadrát velikosti rychlosti je roven stopě (*trace*) a součinu $\vec{v} \cdot \vec{v}^T$. Pro náš manipulator má homogenní vektor \vec{v} takovýto tvar:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dt} \quad (51)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d\beta}{dt} [(a-x) \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta] + \frac{d\alpha}{dt} \cdot [(a-x) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta] \\ \frac{d\beta}{dt} [(a-x) \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta] + \frac{d\alpha}{dt} \cdot [(a-x) \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta] \\ \frac{d\beta}{dt} \cdot (a-x) \cdot \cos\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tuto matici vynásobíme podle následujícího vztahu, kde násobíme matici maticí transponovanou (transponovaná matice vzniká vzájemnou výměnou řádků a sloupců) nou \vec{v}^T .

$$|\vec{v}_x|^2 = \text{trace}\{\vec{v} \cdot \vec{v}^T\} \quad (52)$$

↓

$$|\vec{v}_x|^2 = \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos\beta \right] \cdot (x-a)^2$$

$$= \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos\beta \right] \cdot (x^2 - 2ax + a^2)$$

Poloha hmotného elementu v lokální soustavě souřadnic O_{x_3, y_3, z_3} je

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a v absolutní soustavě souřadnic je hmotný element vyjádřen takto:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta & -\sin\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\beta & -a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos\beta \cdot \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \cdot \sin\alpha & -a \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} x \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta - a \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ -x \cdot \sin\beta + h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Potom pro hmotu hmotného elementu náměru platí:

$$d_m = \rho \cdot \check{s} \cdot v \cdot dx \Rightarrow d_m = m \cdot \frac{dx}{a+b} \quad (54)$$

kde:

- hustota desky, kterou označujeme jako homogenní náměr je vyjádřena řeckým písmenem ρ ,
- \check{s} je šířka náměru,
- v je označení výšky náměru (tloušťka).

Tento hmotný element má kinetickou energii:

$$dW_{k_x} = \frac{1}{2} dm \cdot |\vec{v}_x|^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{a+b} \cdot |\vec{v}_x|^2 \cdot dx \quad (55)$$

z kinetické energie elementu zjistíme kinetickou energii náměru tímto způsobem:

$$\begin{aligned} W_{k_{\text{náměr}}} &= \int_0^{a+b} dW_{k_x} = \frac{1}{2} \int_0^{a+b} d_m \cdot |\vec{v}_x|^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{a+b} \cdot |\vec{v}_x|^2 \cdot dx = & (56) \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{a+b} \cdot \int_0^{a+b} \left\{ \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2\beta \right] \cdot (x^2 - 2ax + a^2) \right\} \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{a+b} \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2\beta \right] \cdot \left(\int_0^{a+b} x^2 \cdot dx - 2a \cdot \int_0^{a+b} x \cdot dx + a^2 \cdot \int_0^{a+b} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{a+b} \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2\beta \right] \cdot \left\{ \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{a+b} - 2a \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{a+b} + a^2 \cdot [x]_0^{a+b} \right\} \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \frac{1}{a+b} \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2\beta \right] \cdot \left[\frac{(a+b)^3}{3} - a \cdot (a+b)^2 + a^2 \cdot (a+b) \right] \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \frac{a+b}{a+b} \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2\beta \right] \cdot \left[\frac{(a+b)^2}{3} - a \cdot (a+b) + a^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2\beta \right] \cdot \left[\frac{(a+b)^2}{3} - a \cdot (a+b) + a^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} m \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2 \beta \right] \cdot \left(\frac{a^2 + 2ab + b^2}{3} - a^2 - ab - a^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} m \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2 \beta \right] \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 3ab}{3} \\
&= \frac{1}{6} m \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2 \beta \right] \cdot (a^2 - ab + b^2)
\end{aligned}$$

$$W_{k_{\text{náměr}}} = \frac{1}{6} m \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2 \beta \right] \cdot [(a - b)^2 + ab]$$

Výsledná kinetická energie náměru našeho zkoumaného manipulátoru po integračních úpravách a zjednodušení výrazů má takovýto tvar, který je uveden výše.

Nyní si vypočítáme potenciální energii elementu náměru:

$$\begin{aligned}
dW_{p_x} &= g \cdot (-x \cdot \sin\beta + h + h_1 + a \cdot \sin\beta) \cdot d_m & (56) \\
&= m \cdot \frac{1}{a+b} g \cdot (-x \cdot \sin\beta + h + h_1 + a \cdot \sin\beta) \cdot dx \\
&= m \cdot \frac{1}{a+b} g \cdot \sin\beta \cdot (a - x) + m \cdot \frac{1}{a+b} g \cdot (h + h_1)
\end{aligned}$$

Z této odvozené rovnice zjistíme potenciální energii pro náměr následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
W_{p_{\text{náměru}}} &= \int_0^{a+b} dW_{p_x} = & (57) \\
&= m \cdot \frac{1}{a+b} g \cdot (a \cdot \sin\beta + h + h_1) \int_0^{a+b} dx - m \cdot \frac{1}{a+b} g \cdot \sin\beta \int_0^{a+b} x \cdot dx \\
&= m \cdot \frac{1}{a+b} g \cdot (a \cdot \sin\beta + h + h_1) \cdot (a+b) - m \cdot \frac{1}{a+b} g \cdot \sin\beta \cdot \frac{(a+b)^2}{2} \\
&= m \cdot g \cdot (a \cdot \sin\beta + h + h_1) - m \cdot g \cdot \sin\beta \cdot \frac{(a+b)}{2} \\
&= m \cdot g \cdot \sin\beta \left[a - \frac{(a+b)}{2} \right] + m \cdot g \cdot (h + h_1) \\
W_{p_{\text{náměru}}} &= m \cdot g \cdot \sin\beta \left(\frac{a-b}{2} \right) + m \cdot g \cdot (h + h_1)
\end{aligned}$$

Výsledná potenciální energie náměru pro náš daný manipulátor má po integračních úpravách takovýto tvar. Výsledné kinematické a potenciální energie použijeme pro výpočet pohybových rovnic manipulátoru za pomoci Lagrangeovy pohybové rovnice.

7.4 Lagrangeova dynamika pohybové rovnice manipulátoru

Lagrangeovy pohybové rovnice nám slouží k vyjádření průběhu zobecněných sil pohybových jednotek našeho manipulátoru. Pro získání pohybových rovnic našeho manipulátoru použijeme řešení Lagrangeovy funkce, která bude vázána na danou kinematickou strukturu manipulátoru. Toto řešení je kratší a jednodušší na použití zvláště v případech, kde struktury obsahují nízký počet stupňů volnosti, což se pro náš případ manipulátoru nabízí.

Lagrangeovy pohybové rovnice nám také umožní získat uspořádaný přístup k získání dynamických rovnic pohybu manipulátoru. Lagrangeovu funkci lze přesně určit za pomoci rozdílu kinematické a potenciální energie daného systému. V našem případě se bude jednat o energii náměru a otočné podstavy, na které je náměr umístěn. Lagrangeova funkce pro náš případ bude obecně vypadat následovně:

$$L = W_{k_{podstavy}} + W_{k_{náměru}} - W_{p_{náměru}} \quad (58)$$

Náš manipulátor obsahuje pouze kinetickou energii podstavy, protože podstava se pohybuje pouze v jednom směru, a to rotačním.

Nyní si uvedeme Lagrangeovu funkci pro náš daný manipulátor:

$$W_{k_{podstavy}} = \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \quad (59)$$

Tuto kinetickou energii podstavy jsme nepočítali, protože moment setrvačnosti odměřových částí již známe a v našem případě je roven **nule**.

$$W_{k_{náměru}} = \frac{1}{6} m \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cdot \cos^2 \beta \right] \cdot [(a-b)^2 + ab] \quad (60)$$

$$W_{p_{náměru}} = \left[m \cdot g \cdot \sin \beta \left(\frac{a-b}{2} \right) + m \cdot g \cdot (h + h_1) \right] \quad (61)$$

↓

$$L = \frac{1}{2}J_0 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{1}{6}m \cdot \left[\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \cdot \cos^2\beta\right] \cdot [(a-b)^2 + ab] \quad (62)$$

$$- \left[m \cdot g \cdot \sin\beta \left(\frac{a-b}{2}\right) + m \cdot g \cdot (h + h_1)\right]$$

7.5 Pohybové rovnice

Nejpodstatnějším krokem pro dynamickou analýzu našeho manipulátoru je odvození pohybových rovnic systému. Tyto rovnice jsou podstatné pro návrh, analýzu a řešení různých systémů. Dynamické rovnice nám popíší dynamické chování manipulátoru. Můžeme je využívat při simulačních zkouškách pohybu manipulátoru, které jsou prováděny na počítačích v příslušném programovém prostředí (v našem případě se jedná o programové prostředí Dynast).

Z vyjádřené Lagrangeovy funkce, kterou máme uvedenou výše, odvodíme pohybové rovnice našeho manipulátoru, který obsahuje dva stupně volnosti \mathbf{m}_α a \mathbf{m}_β z následujících vztahů:

7.5.1 Pohybová rovnice pro \mathbf{m}_α

$$\mathbf{m}_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) = \quad (63)$$

$$= \frac{dt}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left\{ \frac{1}{2}J_0\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}m \cdot [\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos^2\beta] \cdot [(a-b)^2 + ab] - m \cdot g \cdot \sin\beta \left(\frac{a-b}{2}\right) - m \cdot g \cdot (h + h_1) \right\} \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\left\{ \frac{1}{2}J_0\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}m \cdot [\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos^2\beta] \cdot [(a-b)^2 + ab] - m \cdot g \cdot \sin\beta \left(\frac{a-b}{2}\right) - m \cdot g \cdot (h + h_1) \right\} \right]$$

Tuto nepřehlednou pohybovou rovnicí pro \mathbf{m}_α zjednodušíme do přehlednějšího tvaru za pomoci derivací a příslušných matematických úprav, který nám půjde lépe využít v počítačových simulacích.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ J_0 \dot{\alpha} + \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos^2 \beta \right\} \\
&= J_0 \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \\
&\cdot \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cdot \cos^2 \beta - 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \right) \\
&= J_0 \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \cdot \cos^2 \beta - \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \cdot \sin 2\beta \right)
\end{aligned}$$

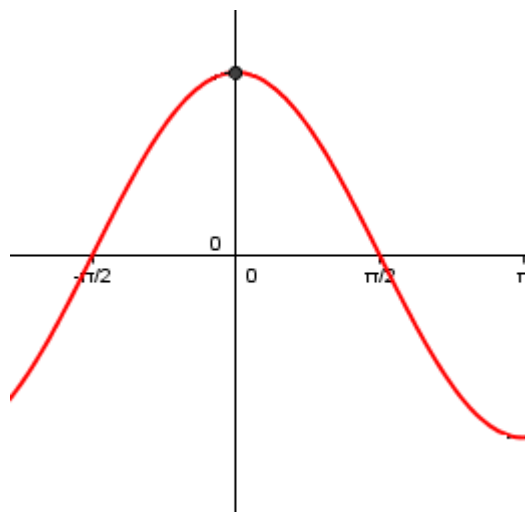
↓

$$\begin{aligned}
m_\alpha &= \left\{ J_0 + \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \cos^2 \beta \right\} \cdot \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \\
&\quad - \left\{ \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \sin 2\beta \right\} \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\beta}
\end{aligned} \tag{64}$$

Tuto rovnici můžeme rozdělit na tři základní části, kde nám každá část reprezentuje jinou podstatu pohybu, a to následujícím způsobem:

$$J_0 + \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \cos^2 \beta \tag{65}$$

Tato část je koeficient v části rovnice představující proměnný moment setrvačnosti v odměru. Je závislý na kvadrátu kosinusu úhlu β . Je-li tento úhel β roven nule, je tento moment setrvačnosti největší. Pro $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ bude tento moment setrvačnosti nejmenší a zároveň je roven J_0 .



Obrázek 10: Graf pro cosinus

$$\left\{ \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \sin 2\beta \right\} \quad (66)$$

Toto je koeficient v části rovnice představující zobecněnou sílu (moment) Coriolisova typu a vyjadřuje vzájemnou interakci mezi pohybujícími se tělesy, vzniklou součinem jejich rychlostí:

$$\dot{\alpha} \cdot \dot{\beta} \quad (67)$$

Touto částí vyjádříme úhlovou rychlost úhlů α a β . Tato část rovnice je tedy koeficient u

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} \right) \cdot \left(\frac{d\beta}{dt} \right) \quad (68)$$

7.5.2 Pohybová rovnice pro m_β

$$m_\beta = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \beta} \right) \quad (69)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{dt}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\beta}} \left\{ \frac{1}{2} J_0 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} m \cdot [\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos^2 \beta] \cdot [(a-b)^2 + ab] - m \cdot g \cdot \sin \beta \left(\frac{a-b}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - m \cdot g \cdot (h + h_1) \right\} \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\left\{ \frac{1}{2} J_0 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} m \cdot [\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cdot \cos^2 \beta] \cdot [(a-b)^2 + ab] - m \cdot g \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \sin \beta \left(\frac{a-b}{2} \right) - m \cdot g \cdot (h + h_1) \right\} \right] \end{aligned}$$

Stejně jako u pohybové rovnice m_α i tuto rovnici zjednodušíme do přehlednějšího tvaru, pro naši simulaci takto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \left\{ \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \dot{\beta} \right\} + \frac{1}{6} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \\ &\quad \cdot [2\dot{\alpha}^2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta] + m \cdot g \cdot \left(\frac{a-b}{2} \right) \cdot \cos \beta \end{aligned} \quad (70)$$

↓

$$\begin{aligned} m_\beta &= \frac{1}{3} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \frac{1}{6} m \cdot [(a-b)^2 + ab] \cdot \sin 2\beta \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + m \cdot g \\ &\quad \cdot \left(\frac{a-b}{2} \right) \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

Jako i předešlou pohybovou rovnici pro m_α si i tuto rovnici m_β rozdělíme na tři základní části, které reprezentují jednotlivé vlivy pohybu:

$$\frac{1}{3}m \cdot [(a - b)^2 + ab] \quad (71)$$

Toto je koeficient v části rovnice představující konstantní moment setrvačnosti náměrových částí.

$$\frac{1}{6}m \cdot [(a - b)^2 + ab] \quad (72)$$

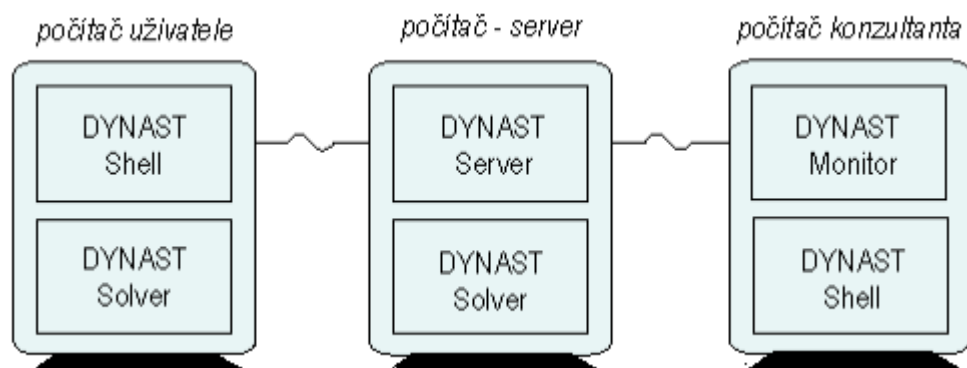
Druhá část nám ukazuje koeficient u $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ a představuje koeficient u odstředivé síly, která působí na hmotný bod směrem od středu křivosti trajektorie.

$$m \cdot g \cdot \left(\frac{a - b}{2}\right) \cdot \cos\beta \quad (73)$$

Poslední část rovnice určuje vliv gravitace a projevuje se v ní vliv nevyváženosti náměrových částí manipulátoru.

8 MODELOVÁNÍ V PROGRAMU DYNAST

Programové prostředí Dynast slouží pro snadné a efektivní modelování různých simulací a animací vyjadřující chování fyzikálních soustav. Simulační modely lze zadávat pomocí fyzikálních schematických bloků znázorňujících reálnou konfiguraci určitých soustav. Potřebné rovnice pro simulační pochod si Dynast generuje sám nebo je lze také zadávat ručně.[9]



Obrázek 11: Konfigurace systému Dynast[9]

Na *obrázku 11* je vyznačen systém Dynast, který se skládá z programů nainstalovaných na vzdálených počítačích, které jsou propojeny prostřednictvím internetu nebo lokální sítě. Uživatelské prostředí DYNAST Shell je přizpůsobeno k přípravě řešení zadané úlohy a odeslání tohoto zadání ke zpracování a následnému vyřešení v DYNAST Solver. Vyřešená úloha se nám vrátí zpátky na DYNAST Shell, kde se nám zobrazí jednotlivé průběhy výsledků.[9]

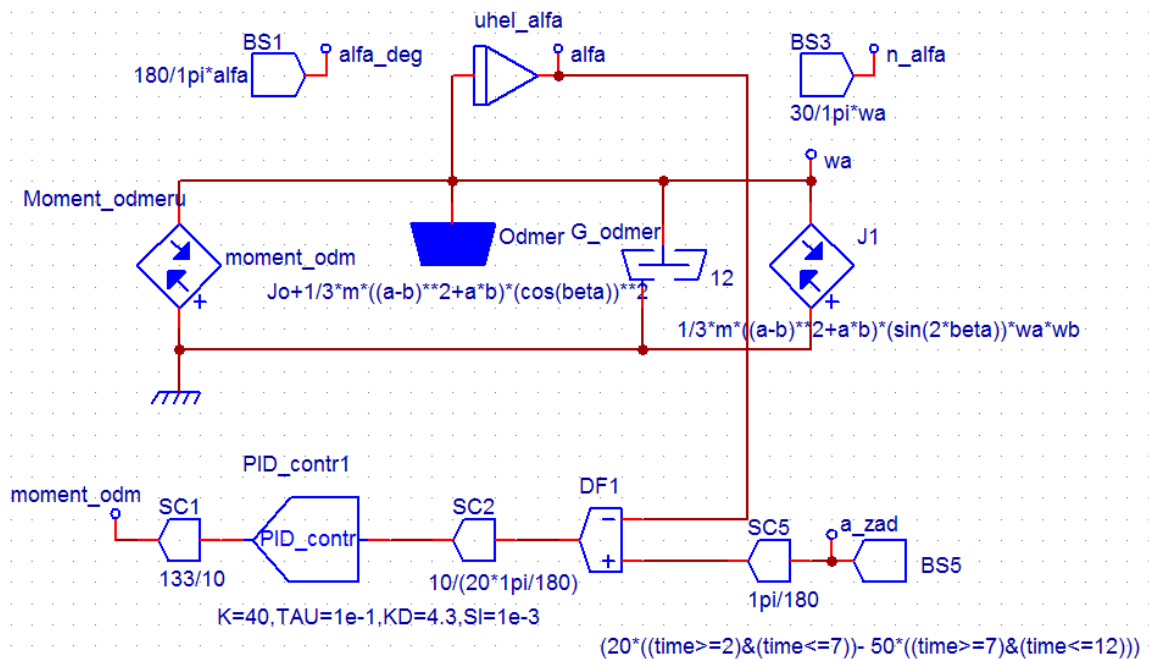
Co nám umí programové prostředí DYNAST Solver vyřešit pro nelineární a nestacionární úlohy:

- řešení rovnic v grafické podobě (blokové schéma),
- výpočet závislostí ustáleného řešení,
- linearizaci schémat v okolí pracovních bodů,
- výpočet odezvy v okolí klidového pracovního bodu.[9]

Základní zapojení našeho modelu pomocí programu DYNAST, které je zobrazeno v příloze P I této práce, obsahuje regulační větev s regulátorem PID, který jsme zatím nevytvářeli. Tento regulační prvek byl již v programovém prostředí přednastaven, ale pro

naše prozatímní zkoumání a objasnění chování jednotlivých částí pohybových rovnic, tento regulátor poslouží dostatečně.

Blokové schéma zapojení si můžeme rozdělit do dvou částí, které si označíme jako soustavu pro moment náměru a soustavu pro moment odměru. Nyní si jednotlivé bloky v obou schématech ukážeme a přesněji popíšeme:

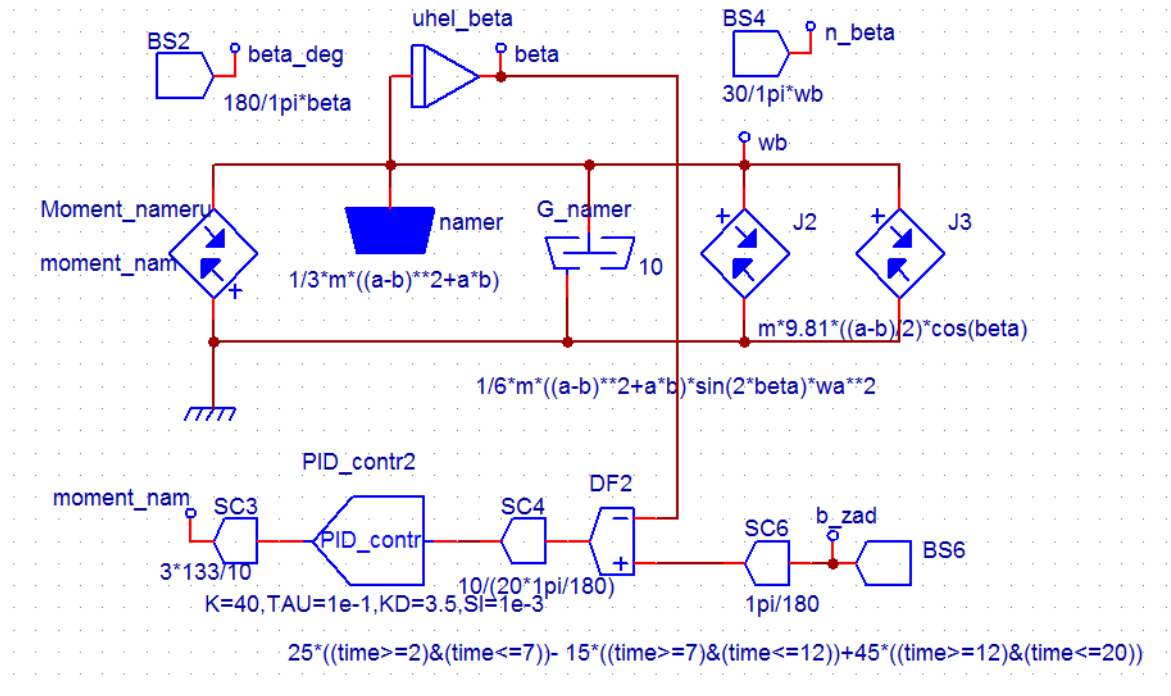


Obrázek 12: Blokové schéma momentu odměru manipulátoru

Tato část nám představuje pohybovou rovnici pro odměr buzenou momentem \mathbf{m}_a , která je zde vyjádřena do dvou bloků navzájem propojených. Jedna část rovnice, označená jako proměnný moment setrvačnosti v odměru, je zde v tomto *obrázku 12* představena jako blok označený *Odmer* a moment Coriolisova typu, který je zde vyjádřen rovnicí v bloku označeném jako *J1*.

K tomuto uspořádání zapojení pohybových rovnic je připojena informační část řízení regulační složka s regulátorem PID, do které je přiveden blok žádané hodnoty *BS5*, který ji nastavuje tak, aby ve výsledném grafu byly zobrazeny skokové funkce. Tyto skoky jsou vyjádřeny úhlem α , převedeným na stupně pomocí bloku *SC5* a porovnány v bloku označeném *DF1*. Tyto vyhodnocené hodnoty jsou přivedeny do regulátoru PID a přes tento regulační člen je vyhodnocen moment setrvačnosti odměru.

Další částí blokového schématu, které si zde popíšeme, je část nazvaná jako moment náměru:



Obrázek 13: Blokové schéma momentu náměru manipulátoru

Na *obrázku 13* je blokově vyjádřena pohybová rovnice pro náměr, buzená momentem m_β , označeným v blokovém schématu jako *moment_nameru*.

První prvek, označený v blokovém schématu jako *namer*, představuje část pohybové rovnice, kterou jsme si již dříve označili jako moment setrvačnosti náměrových částí. Prvek označený *J2* představuje velikost odstředivého momentu a prvek označený jako *J3* je moment vlivu gravitační složky na nevyváženou náměrovou část manipulátoru.

K této části je stejně jako u *obrázku 12* (kde je znázorněno schéma momentu odměru) připojena regulační část s regulátorem PID, kterým řídíme chování celého tohoto zapojení manipulátoru. Blok *BS6* představuje zadání žádaných úhlů náměru.

Na následujícím *obrázku 14* si můžeme prohlédnout jak regulační člen, v našem případě regulátor PID, zajistí téměř žádaný průběh změn úhlů α a β skutečných a změn velikostí úhlů pro α a β požadované.



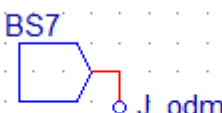
Obrázek 14: Žádané a skutečné průběhy pro změnu úhlů α a β

Tyto rychlosti budeme využívat i při reprezentaci dalších faktorů, které ovlivňují náš manipulátor, jako jsou jednotlivé průběhy pohybových rovnic, které si ukážeme v následující kapitole. Průběhy znázorněných rychlostí a jejich barevné označení budeme využít po zbytek celé práce a ve všech obrázcích.

8.1 Jednotlivé průběhy pohybových rovnic v programu Dynast

V této kapitole si ukážeme jednotlivé průběhy všech částí pohybových rovnic našeho manipulátoru. Zobrazíme si zde jednotlivé bloky, které jsme si vytvořili v programu Dynast a tento program nám vykreslí i jejich jednotlivé průběhy, které si zde také ukážeme a popíšeme.

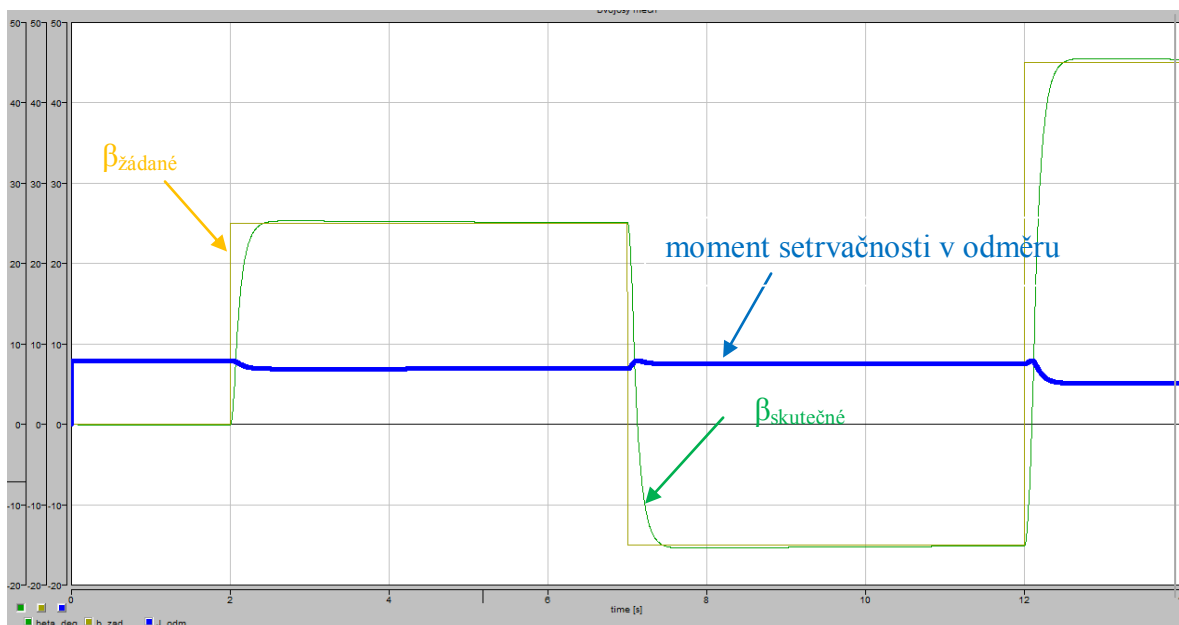
Nejdříve si zde ukážeme průběh pro proměnný moment setrvačnosti v odměru v porovnání s žádanými a skutečnými hodnotami:



$$J_o + \frac{1}{3} m \cdot ((a-b)^2 + a \cdot b) \cdot (\cos(\beta))^2$$

Obrázek 15: Vyjádření momentu setrvačnosti
odměru

Takto jsme si v programovém prostředí Dynast vyjádřili část pohybové rovnice, pro kterou jsme si nechali vykreslit následující průběh:

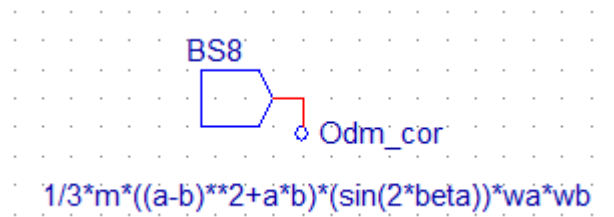


Obrázek 16: Průběh momentu setrvačnosti v odměru

Náš sledovaný průběh je na *obrázku 16* znázorněn **modrou** křivkou. Z toho průběhu lze vyčíst, že reaguje jen při změnách pohybu manipulátoru (to je při změnách úhlu β), a to jen nepatrně řádově v jednotkách kgm^2 .

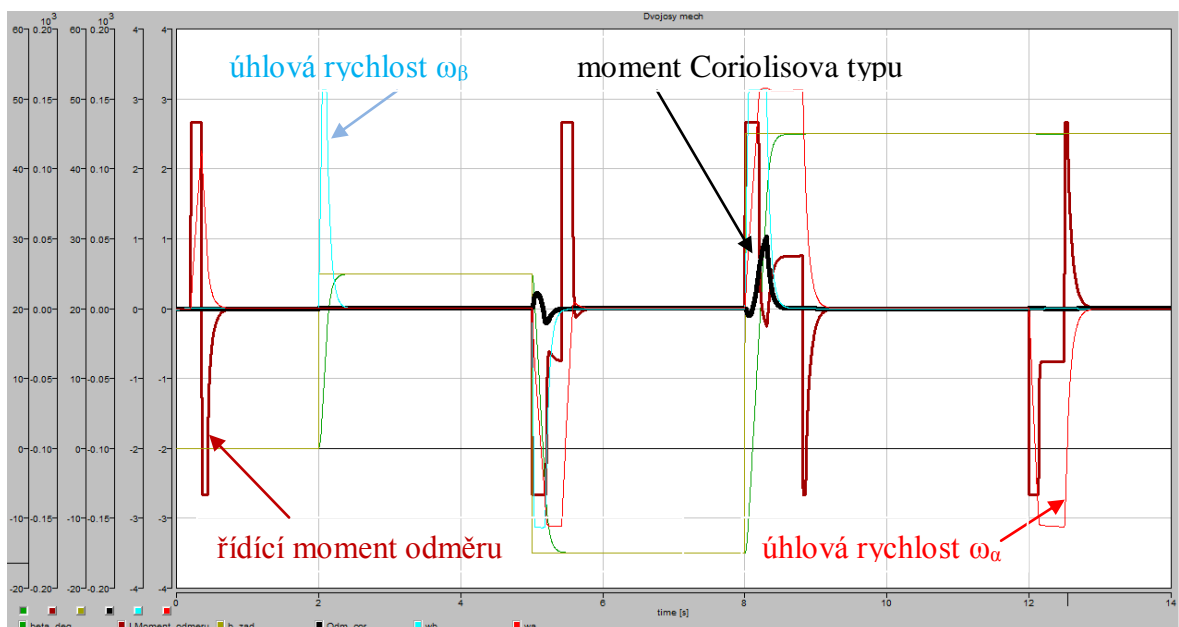
V následujících grafických zobrazeních již nebudeme popisovat křivky pro velikosti úhlu β skutečného a žádaného. Tyto křivky budou mít stále stejné barevné rozlišení.

Dalším prvkem v pohybové rovnici pro \mathbf{m}_a je moment Coriolisova typu, který byl popsán již výše v této práci. V našem blokovém schématu pro náš zkoumaný manipulátor je tento moment znázorněn takto:



Obrázek 17: Moment Coriolisova typu v blokovém zapojení

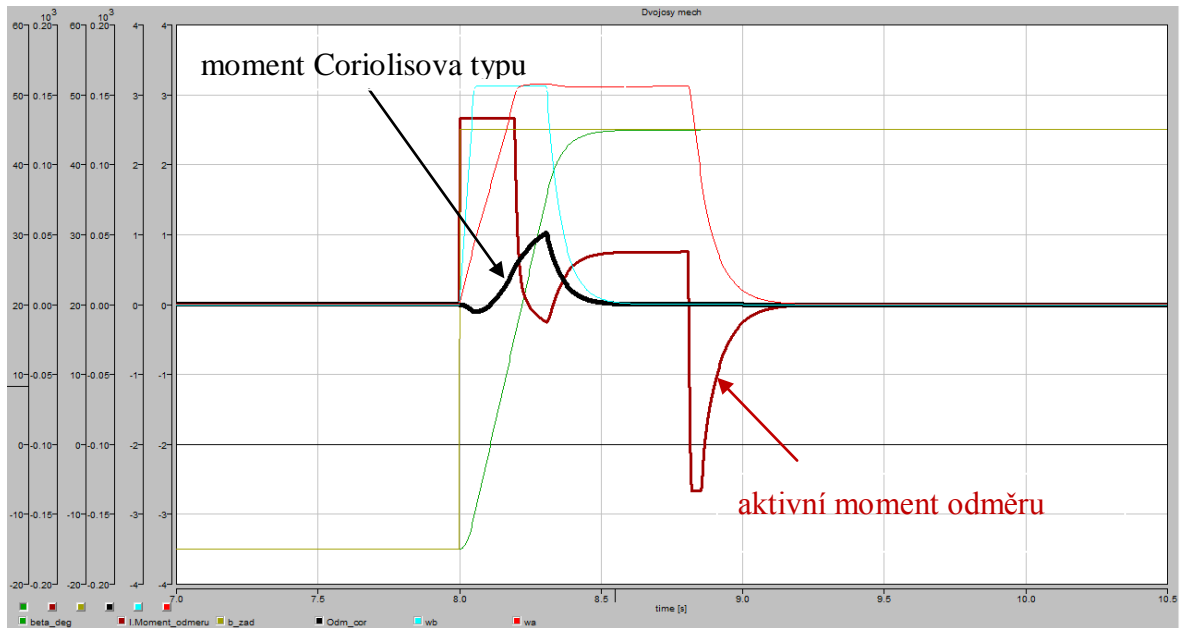
Nyní si zobrazíme jeho průběh pro náš manipulátor v porovnání s hodnotami aktivního řídicího momentu.



Obrázek 18: Moment Coriolisova typu pro náš manipulátor graficky

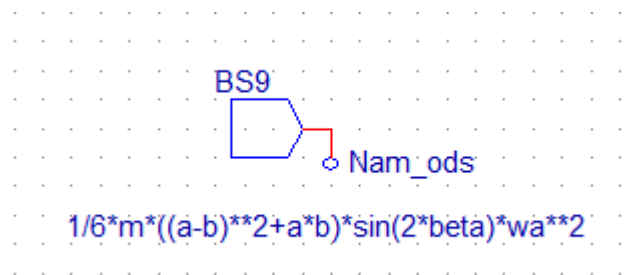
Tento moment je závislý na změně úhlové rychlosti ω_α i ω_β , které nám na obrázku reprezentují **červená** a **azurová** křivka. Moment Coriolisova typu je totiž závislý na úhlových rychlostech našeho manipulátoru a na *obrázku 18* je znázorněn pomocí **černé** křivky. Z grafu, kde je vykreslen aktivní urychlující moment a moment coriolisova typu do stejného měřítka vyplývá, že tento moment reaguje na změny pohybu manipulátoru, které jsou vyvolány velikostí úhlových rychlostí ω_α i ω_β současně. Když bude nenulová jen jedna úhlová rychlost ω_α nebo ω_β , coriolisův moment zůstává nulový. Moment je vyvolán pouze při změně obou úhlových rychlostí ω_α i ω_β ve stejném časovém okamžiku. V následujícím *obrázku 19* je znázorněný moment zobrazen v detailnějším zobrazení spolu s aktivním urychlujícím momentem v odměru.

Z obrázku, kde je opět vykreslen aktivní urychlující moment a moment coriolisova typu do stejného měřítka, je patrné i kvantitativní porovnání obou momentů.



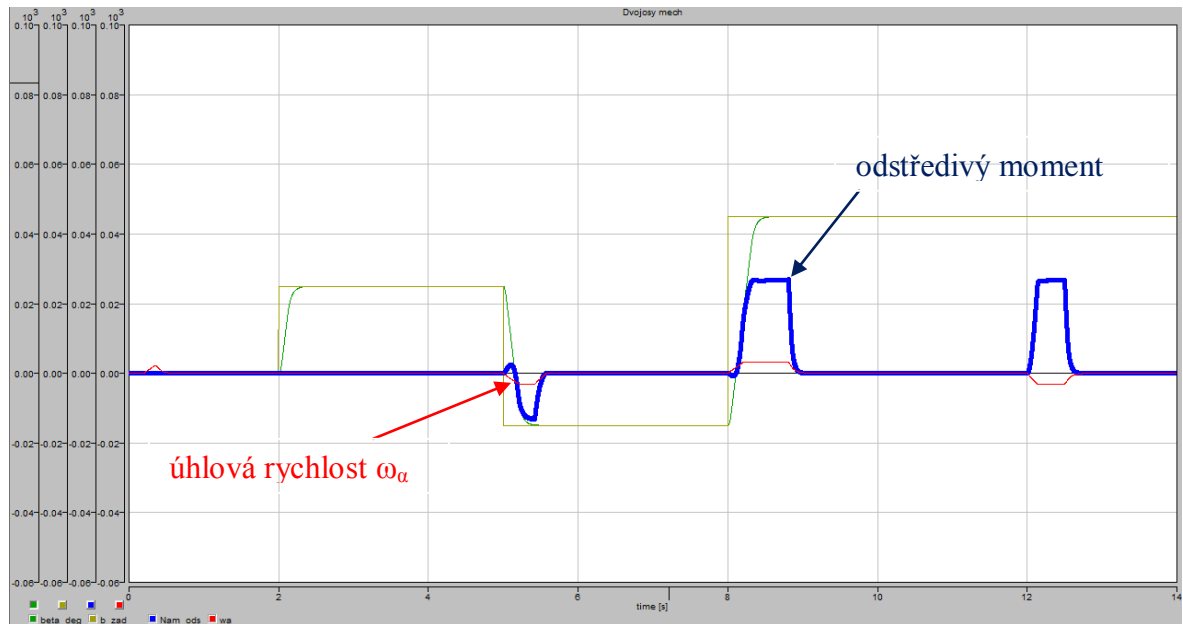
Obrázek 19: Moment Coriolisova typu v detailnějším zobrazení

Dalším prvkem, který si zde popíšeme a ukážeme jeho grafický průběh, je odstředivý moment v pohybové rovnici pro m_β :



Obrázek 20: Velikost odstředivého momentu

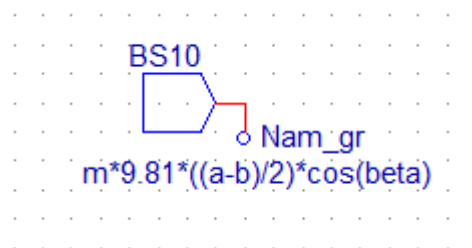
Následující *obrázek 21* zobrazuje průběh odstředivého momentu v zapojení pro náš manipulator. Tento moment je závislý také na úhlové rychlosti ω_a , kde při velké změně úhlové rychlosti se projeví velká změna odstředivého momentu v náměru. Odstředivý moment náměru závisí na druhé mocnině rychlosti ω_a .



Obrázek 21: Průběh odstředivého momentu

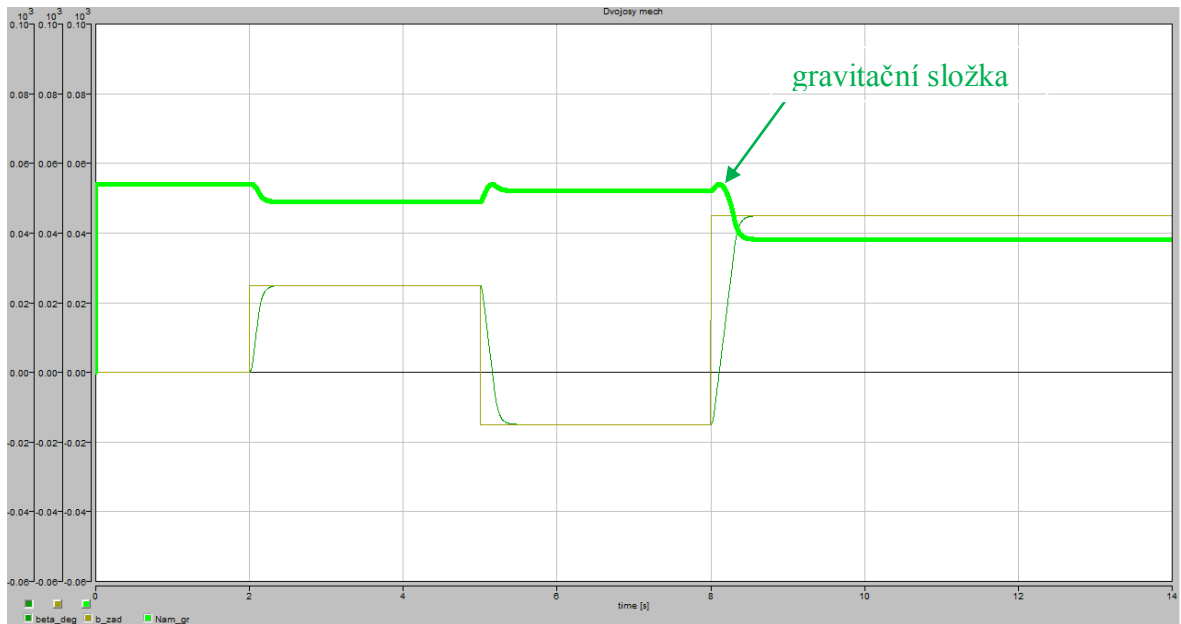
Na *obrázku 21* je sledovaný průběh, který představuje odstředivý moment, znázorněn **modrou** křivkou a úhlová rychlost ω_α , znázorněna **červenou** křivkou. Grafické zobrazení nám ukazuje průběh, který v našem případě představuje odstředivou sílu. Tato síla působí na hmotný bod směrem od středu křivosti trajektorie pohybu náměru a reaguje na změnu kvadrátu úhlové rychlosti ω_α .

Posledním schematickým blokem, který si zde uvedeme, je vliv gravitace na nevyváženou náměrovou část našeho manipulátoru. Gravitace je silové působení mezi všemi formami hmoty, ale v našem případě se projeví jen v náměru takto:



Obrázek 22: Gravitační složka

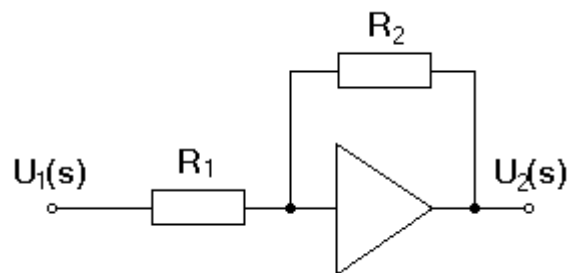
Její průběh si znázorníme v grafické podobě na následujícím obrázku, kde je vidět, že gravitační složka reaguje na změnu úhlu β v náměru.



Obrázek 23: Grafické znázornění působení gravitační síly v náměru

Všechny uvedené grafické průběhy nám reprezentují průběhy určitých částí pohybových rovnic, které jsme si již vyjádřili matematicky dříve v této práci. V tomto grafickém zobrazení si můžeme prohlédnout jednotlivé průběhy a pozorovat jejich chování.

Nyní si ukážeme základní zapojení regulátoru, které následně využijeme v této práci. Regulátor typu P^4 (který pracuje s trvalou regulační odchylkou) a PI^5 (který v uzavřeném regulačním odvodu odstraňuje trvalou regulační odchylku, která vzniká při použití regulátoru P). Pro názornost si zde uvedeme oba regulátory v schematickém zapojení. První obrázek ukazuje regulátor typu P:

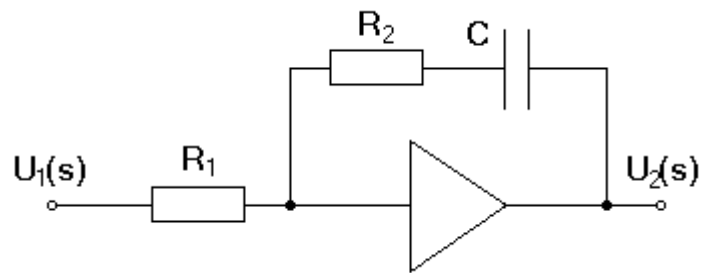


Obrázek 24: Regulátor typu P

Na dalším obrázku je zobrazen regulátor typu PI:

⁴ Proporcionální regulátor

⁵ Proporcionálně integrační regulátor



Obrázek 25: Regulátor typu PI

Do regulátoru budeme přivádět požadované hodnoty úhlů α i β a odečítat od nich skutečné hodnoty α i β . Požadované hodnoty těchto kloubových souřadnic musíme nejprve vypočítat z inverzní kinematické úlohy, kterou jsme si prezentovali v teoretické části práce.

Naší snahou je, aby žádané změny úhlů α i β byly takové, že když na náš manipulátor připevníme na konec náměru do počátku souřadnic x_3, y_3, z_3 efektor, například v našem případě nějaký laser, opíše nám náš manipulátor pomocí této inverzní úlohy kružnice o zadaném průměru určenou rychlostí.

9 POHYB EFEKTORU PO ZADANÉ TRAJEKTORII

V této části práce se budeme pohybovat manipulátorem a především jeho koncovým bodem, kde máme umístěn efektor, po zvolené **kružnici v globální kartézské soustavě souřadnic**, kterou mu zadáme. Je nezbytné, abychom tuto kružnici zvolili v pracovním prostoru manipulátoru.

9.1 Kružnice v pracovním prostoru manipulátoru

Pracovní prostor manipulátoru je celkový objem prostoru, kterého může koncový efektor dosáhnout. Pracovní prostor je omezen geometrií manipulátoru a mechanickým omezením kloubů. Pracovní prostor je rozdělen na dosažitelný prostor a pohotovostní prostor.[1]

- **Dosažitelný** prostor je objem pracovního prostoru, v kterém je každý bod dosažitelný koncovým efektem alespoň při jedné jeho orientaci.
- **Pohotovostní** prostor je objem pracovního prostoru, v kterém je každý bod dosažitelný koncovým efektem při všech orientacích efektoru. Pohotovostní prostor je podmnožinou dosažitelného prostoru.[1]

Pomocí inverzní kinematické úlohy vypočítáme potřebné velikosti úhlů α i β , které zatím známe jen jako funkce času pro x_e , y_e , z_e a to v této podobě:

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ -a \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (74)$$

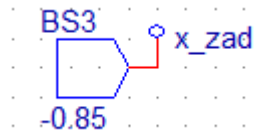
Tyto funkce času nám pomůže pro každý časový okamžik vyřešit programové prostředí Dynast, ve kterém zadáme požadované časové závislosti souřadnic efektoru v globální soustavě a opakovaným řešením rovnic (získaných z uvedené matice) získáme hodnoty velikosti žádaných úhlů v kloubech pro pohyb náměru a odměru tak, aby uvažovaný bod efektoru opisoval zadanou kružnici při zadané rychlosti. Nejdříve musíme uvažovat již zmiňovaný pracovní prostor našeho manipulátoru. Kružnice, kterou bude náš manipulátor opisovat, musí být v jeho pracovním prostoru.

Uložení ramena náměru je nevyvážené v gravitačním poli (osa rotace neprochází těžištěm):

- velikost části ramene označené **a = 1m**
- velikost části ramene označené **b = 0.5m**

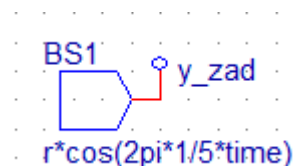
Části ramena označené písmeny **a** a **b** si můžeme prohlédnout na *obrázku 9* v této práci.

Žádaný pohyb středu efektoru volíme v pracovním prostoru pro kružnici na ose **x** ve vzdálenosti **-0.85m**. Tuto vzdálenost si zavedeme do programu Dynast jako žádanou hodnotu **x** takto:



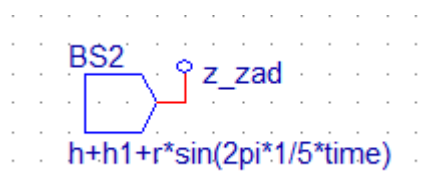
Obrázek 26: Žádaná hodnota **x**

Pro žádanou hodnotu na ose **y** si zavedeme další člen, který bude obsahovat neznámý poloměr žádané kružnice, úhel cosinus a zadanou rychlost pohybu otáčení po kružnici.



Obrázek 27: Žádaná hodnota **y**

Žádanou hodnotu na ose **z** si pomocí Dynastu zadáme poloměr opisované kružnice jako **u** žádané hodnoty pro **x** pouze s úhlem sinus, zadanou rychlost pohybu otáčení po kružnici, a to vše posunuté o výšky **h** a **h₁**.

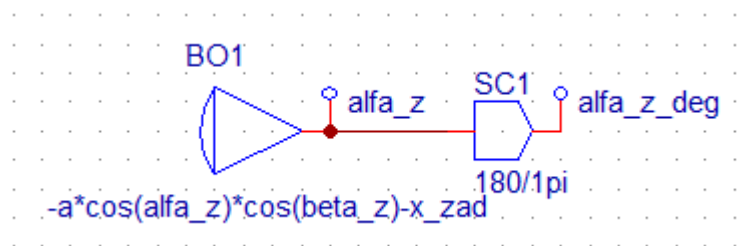


Obrázek 28: Žádaná hodnota **z**

Tyto žádané hodnoty budou použity v modulech pro výpočet jednotlivých bodů z funkcí času, které jsme dostali pro náš manipulátor na základě výpočtu inverzní kinematické úlohy v podobě následující matice:

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ -a \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \\ h + h_1 + a \cdot \sin\beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (75)$$

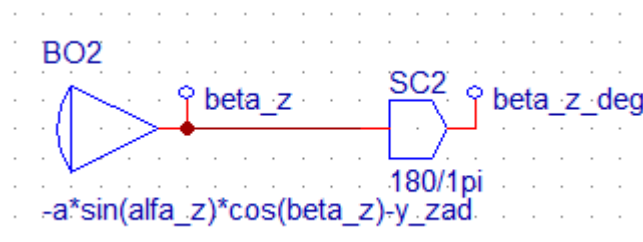
Každý řádek této maticové rovnice představuje nelineární algebraickou rovnici, kterou můžeme zadat do prostředí Dynast pomocí takzvaného operačního bloku, jenž vyžaduje při řešení v každém okamžiku „vynulování“ výraz, který je u něj uvedený.



Obrázek 29: Blok představující 1. řádek maticové rovnice

Toto zadání prvního řádku maticové rovnice zajistí (spolu s dalšími dvěma zadáními) v každém okamžiku takovou hodnotu úhlu α , která odpovídá zadaným průběhům kartézských souřadnic na požadované kružnici. Výsledek je následně převeden z radiánů na stupně.

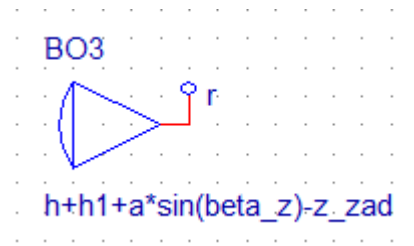
V dalším obrázku si převedeme druhý řádek maticové rovnice do blokového zapojení takto:



Obrázek 30: Blok představující 2. řádek maticové rovnice

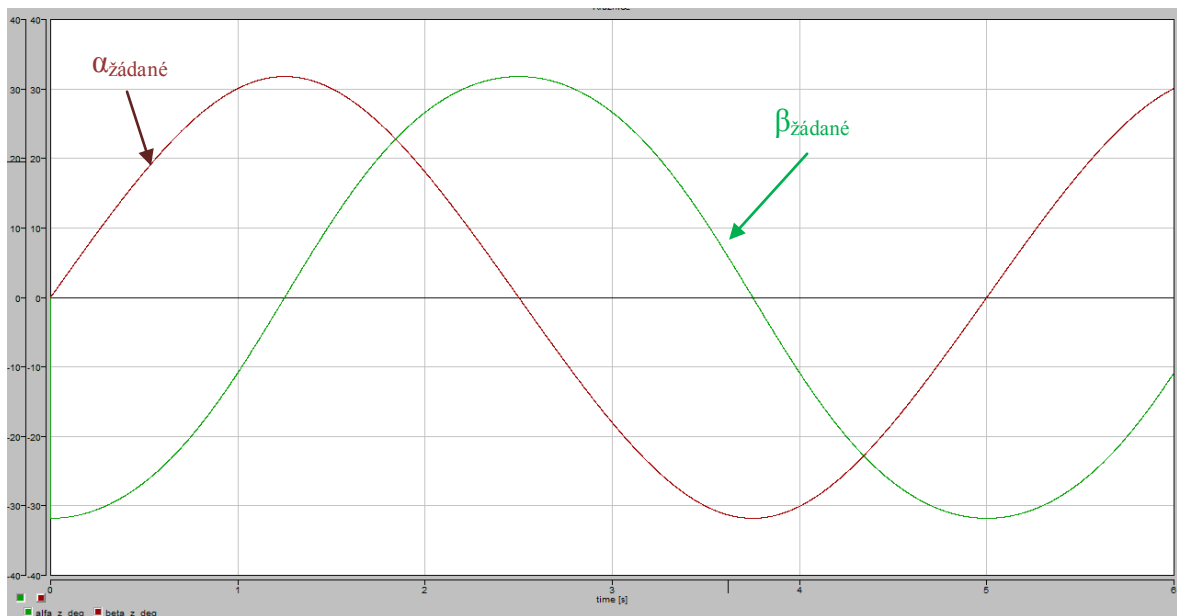
Tento model pro druhý řádek maticové rovnice nám ukáže velikost žádaného úhlu β , který taktéž jako v prvním případě převedeme na stupně.

V posledním obrázku je uvedeno zadání třetího řádku maticové rovnice v takovéto podobě:



Obrázek 31: Blok představující
3. řádek maticové rovnice

Z těchto bloků, které jsme zapojili a nechali přepočítat program, jsme získali takovéto výstupní grafické zobrazení pro žádané úhly α a β a konstantní hodnotu poloměru r kružnice na hranici pracovního bodu (koule).



Obrázek 32: Výstupní graf časových závislostí žádaných úhlů α a β

V zobrazení na *obrázku 32* jsou vykreslené žádané hodnoty pro úhly α a β . Každý bod těchto křivek bude sloužit jako hodnota, která bude v každém časovém okamžiku zadávána jako žádaná hodnota pro servosystém v kloubu.

9.2 Modelové zapojení v simulačním systému Dynast pro zadaný pohyb

Tak jako jsme prezentovali pohyb našeho manipulátoru na skokové odezvy, které jsme nastavili v programu Dynast pomocí jednotlivých bloků, v této kapitole se budeme věnovat pohybu manipulátoru při pohybu efektoru po žádané kružnici v kartézském globálním prostoru.

Pomocí těchto žádaných hodnot bude efektor, který je umístěn na jednom konci ramene „*náměru*“, opisovat pohyb po kružnici, kterou jsme zadali a její hodnoty vypočetli v předchozí kapitole této práce.

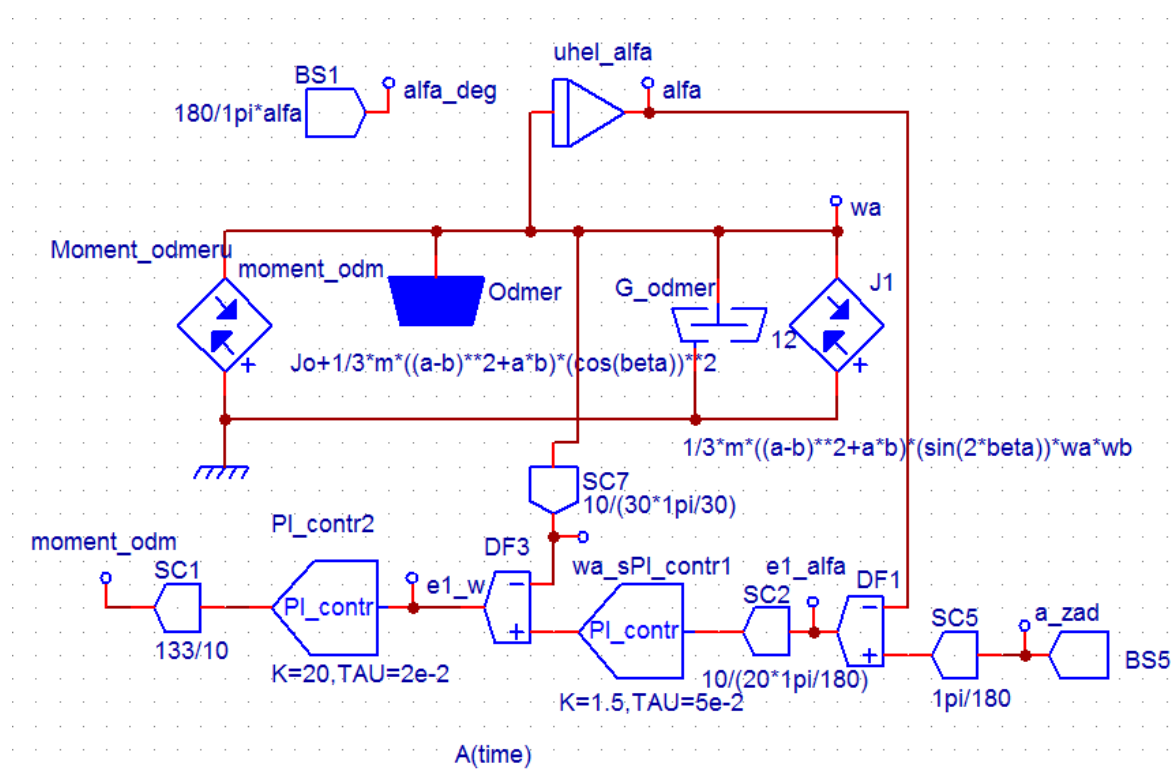
Tak jako jsme si ukázali zobrazené zapojení reagující na skokové odezvy, které je zobrazeno v příloze P I, si nyní popíšeme zapojení, které je zobrazeno v příloze P II, ve kterém manipulátor reaguje na žádané hodnoty pro pohyb po kružnici.

V tomto schematickém zadání problému do systému Dynast je, na rozdíl od zapojení, které jsme si uvedli pro zkoumání chování manipulátoru na skokové odezvy zobrazené v příloze P I, použito kaskádní řazení dvou regulátorů typu PI.

Skokové odezvy, které jsme nastavili v zapojení zobrazeném v příloze P I, jsme dokázali u manipulátoru regulovat za pomoci jednoho regulátoru typu PID.

V tomto případě schematického zapojení (příloha P II), kde manipulátor reaguje na časově závislé žádané hodnoty (vlečná regulace) a vykonává náš žádaný pohyb po kružnici, jsme již použili dva regulátory typu PI. To je možné proto, že regulační odchylka není v žádném z časových okamžiků tak velká, aby integrační složka v polohové smyčce regulace způsobila nežádoucí kmitání úhlů.

Blokové schéma si rozdělíme na dva základní bloky, jak jsme to udělali již při blokovém zapojení pro skokové odezvy.

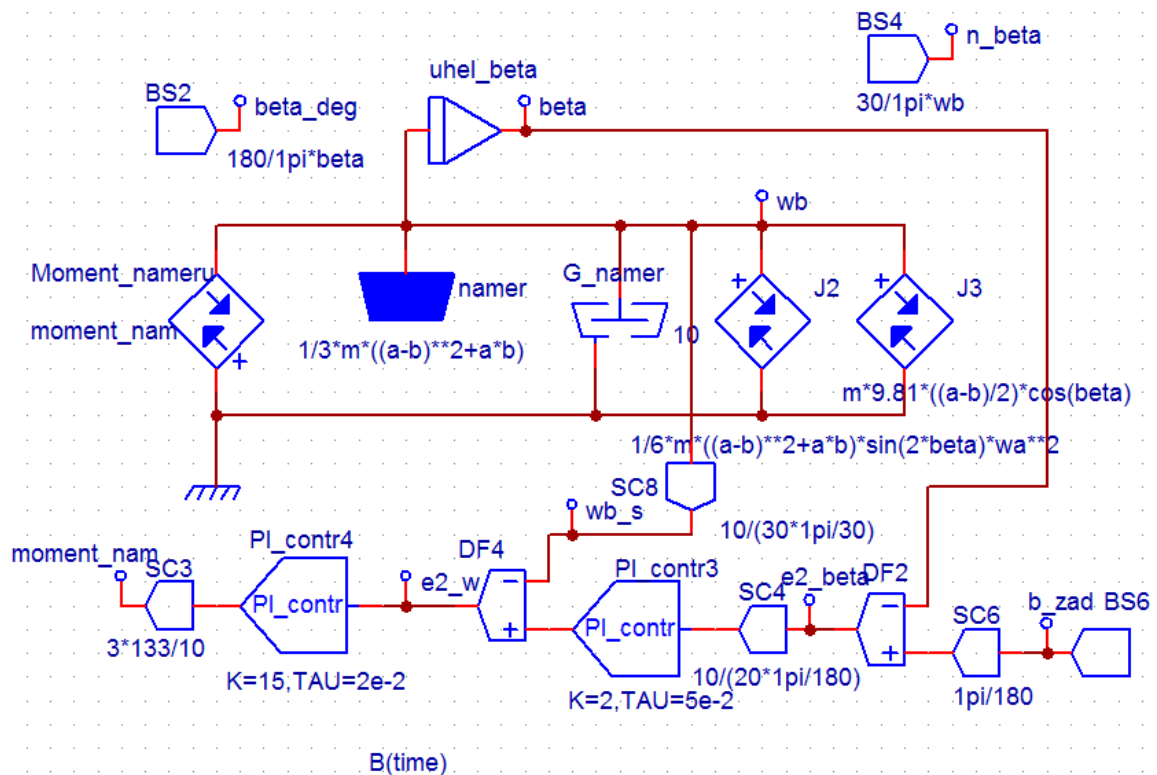


Obrázek 33: Blokové schéma momentu odměru manipulátoru pro pohyb po kružnici

Stejně jako u modelového zapojení zobrazeného v příloze P I, máme i zde stejné blokové zapojení, které nám představuje pohybové rovnice odměru našeho manipulátoru. Ale na rozdíl od předchozího zapojení, kde byla připojena informační část řízení, která měla charakter skokových funkcí, zde zapojení má již připojenou informační část pro žádané hodnoty pohybu po zadané trajektorii kružnice.

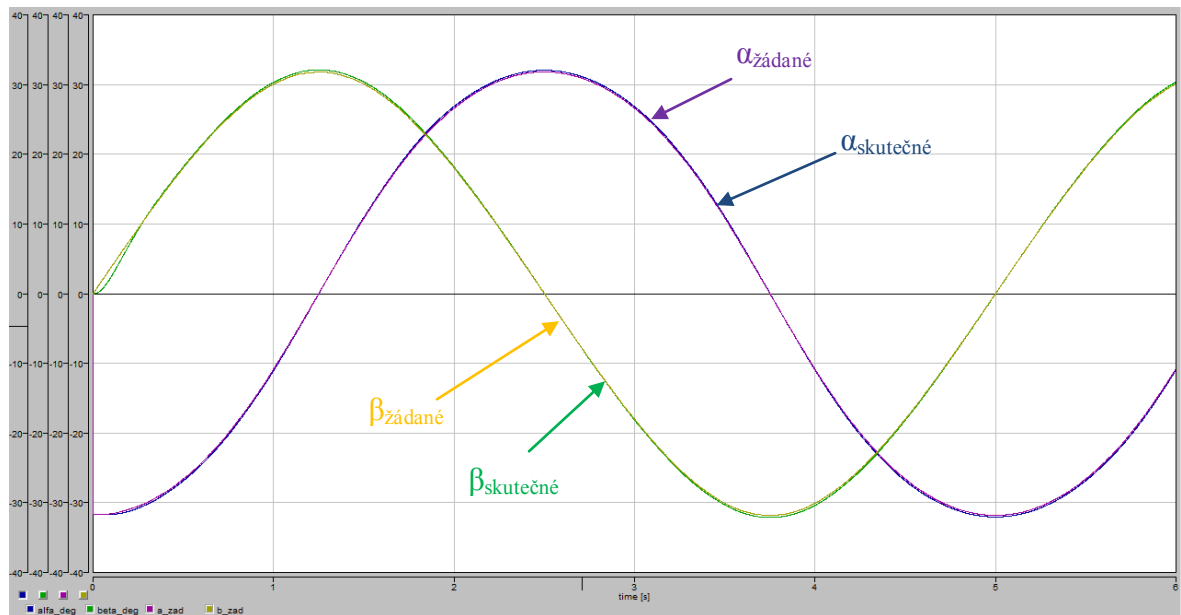
Informační část řízení je v tomto zapojení řešena regulační složkou s dvěma regulátory typu PI v kaskádním uspořádání. Do regulátoru označeného na *obrázku 33* jako **PI_contr1** jsou přivedeny porovnané žádané a skutečné hodnoty úhlové polohy. Výstup z prvního regulátoru je přiveden jako žádaná hodnota úhlové rychlosti do druhého regulátoru označeného **PI_contr2** a tento regulační člen vytváří informaci pro tvorbu urychlujícího momentu odměru.

Druhé schematické zapojení, které určuje urychlující moment náměru, má stejné chování i vlastnosti jako má schematické zapojení na *obrázku 13* s tím rozdílem, že je k němu připojena regulační část s regulátory typu PI, kterými řídíme chování celého tohoto zapojení pro námi požadovaný pohyb po kružnici takto:



Obrázek 34: Blokové schéma momentu náměru manipulátoru pro pohyb po kružnici

Na následujícím *obrázku 35* si můžeme prohlédnout jak regulační členy, v tomto případě čtyři regulátory typu PI, nám zajistí téměř žádaný průběh změn úhlů α a β skutečných a změn velikostí úhlů α a β požadovaných. Protože průběh skutečných a žádaných hodnot je téměř identický, křivky se navzájem překrývají.



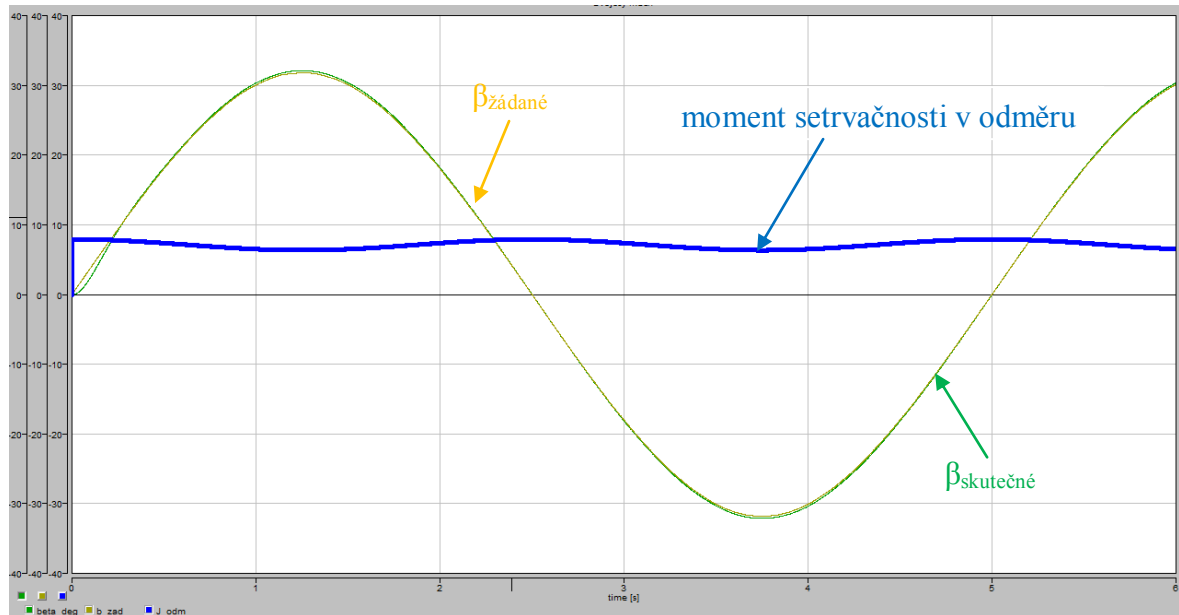
Obrázek 35: Zobrazení žádaných a skutečných průběhů úhlů α a β

Nyní jako u modelu pro skokové funkce si ukážeme chování našeho manipulátoru a jeho jednotlivých částí pohybových rovnic, při přivedení žádaných hodnot, které nutí náš manipulátor pohybovat se po zadané kružnici.

9.3 Jednotlivé průběhy pohybových rovnic při pohybu po kružnici

V této kapitole si ukážeme jednotlivé průběhy při zapojení manipulátoru tak, aby probíhal pohyb efektoru po žádané trajektorii zadané kružnice v kartézském globálním prostoru. Podobné průběhy jsme si již zobrazovali v předchozí kapitole, kde jsme si je ukázali v modelovém zapojení reagující na skokové funkce.

Jako první si zde ukážeme průběh pro proměnný moment setrvačnosti v odměru v porovnání s žádanými a skutečnými hodnotami úhlu β :



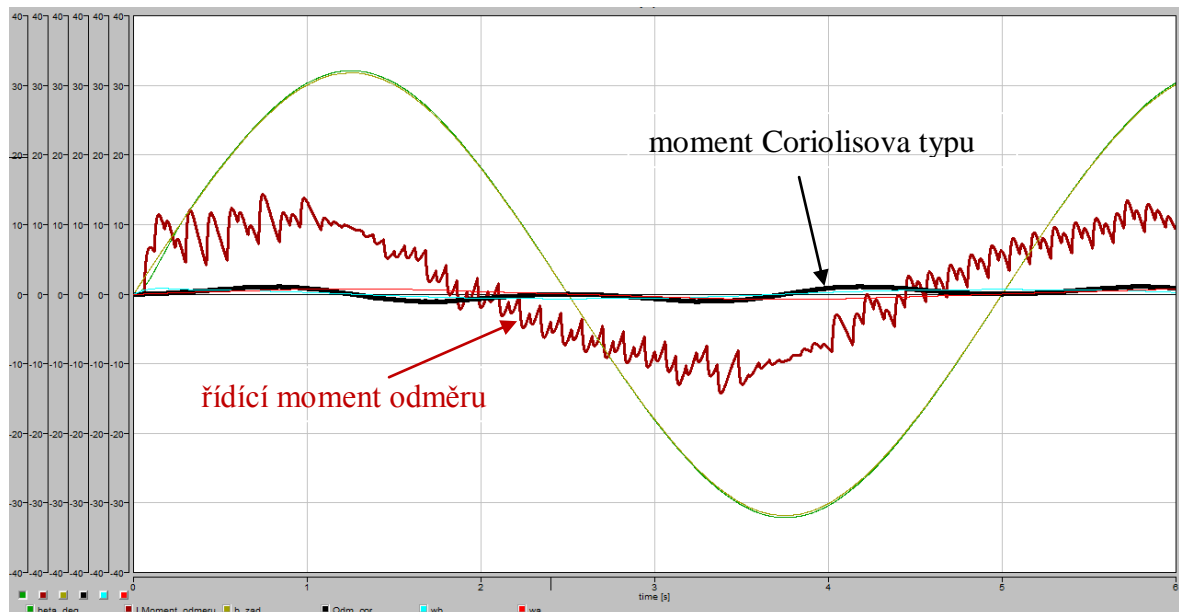
Obrázek 36: Moment setrvačnosti v odměru pro pohyb po kružnici

Průběh momentu setrvačnosti v odměru je na *obrázku 36* znázorněn **modrou** křivkou. Při pozorování tohoto průběhu lze odhadnout, že moment setrvačnosti reaguje po celou dobu na změny velikosti úhlu β v čase. Z grafu, ve kterém jsme nastavili stejná měřítka pro všechny zobrazené křivky, lze odečíst, že velikost momentu setrvačnosti v odměru se mění jen nepatrně, a to v jednotkách kgm^2 .

Stejně malého průběhu jsme si mohli všimnout i při zobrazení průběhu v zapojení reagujícím na skokové funkce. V zobrazení, kde moment setrvačnosti reaguje na skokové změny, bylo patrné, že se moment setrvačnosti mění jen při změnách velikosti úhlu β . V tomto případě „*obrázek 36*“ se velikost momentu mění neustále z důvodů neustálých změn úhlu β .

Dalším graficky znázorněným průběhem, který si zde ukážeme, je zobrazení pro moment Coriolisova typu při pohybu manipulátoru po žádané trajektorii zadané kružnice.

Křivky pro velikosti žádaného úhlu β a skutečného úhlu β již v dalších obrázcích popisovat nebudeme, protože si budou držet stejné barevné rozlišení a jejich průběh bude na všech obrázcích stejný.

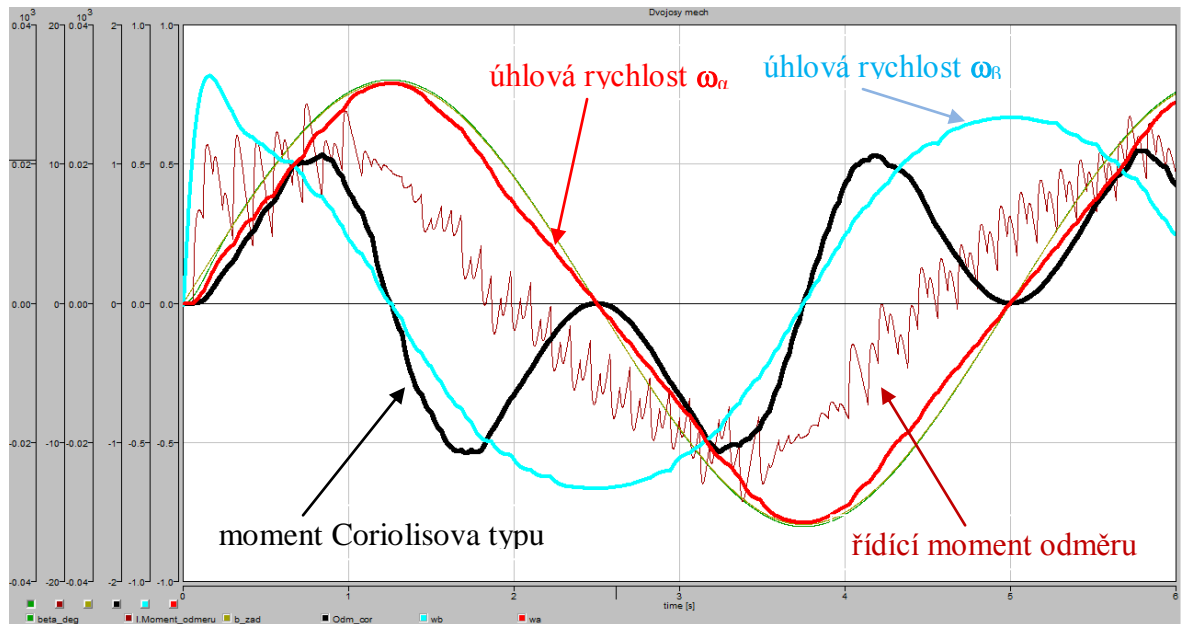


Obrázek 37: Moment Coriolisova typu pro pohyb po kružnici

Jak bylo již popsáno při modelovém zapojení pro reakce manipulátoru na skokové signály, moment Coriolisova typu je závislý na změnách velikostí úhlových rychlostí ω_α i ω_β , a to jen při změně jejich velikostí současně ve stejném časovém okamžiku (na *obrázku 19* je tato reakce zobrazena).

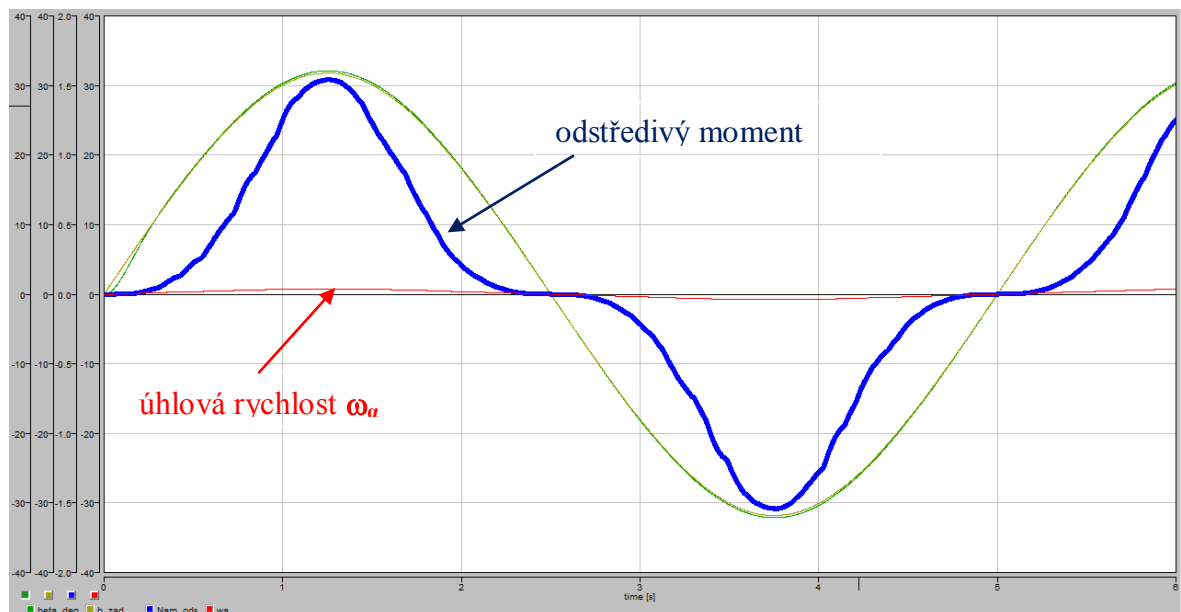
V tomto případě, kdy na *obrázku 37* je znázorněn coriolisův moment (**černá** křivka) spolu s řídicím moment odměru „aktivním“ (**červená** křivka) a obě úhlové rychlosti ω_α i ω_β (**červená** a **azurová** křivka) ve stejném měřítku, je vidět, že velikost coriolisova momentu je řádově jen v desetinách newton/metrů a jeho působení je po celou dobu průběhu prakticky stejné.

Protože z *obrázku 37* není jasně patrné, že se obě úhlové rychlosti ω_α i ω_β po celou dobu průběhu mění, ukážeme si je na následujícím obrázku spolu s momentem Coriolisova typu a řídicím momentem v zobrazení, ve kterém není nastaveno stejné společné měřítko. Na následujícím obrázku, kde je zobrazen průběh obou momentů (coriolisův, setrvačnosti) i průběh obou úhlových rychlostí v rozdílných měřítkách, je vidět s větší přehledností chování celého manipulátoru. V tomto detailnějším zobrazení můžeme vidět, že velikost coriolisova momentu přesáhne jen zřídka hodnotu 1 newton/metru.



Obrázek 38: Průběh úhlových rychlostí při zapojení pro pohyb po kružnici

Další průběh, který si zde zobrazíme a popíšeme, je působení odstředivého momentu při pohybu manipulátoru po zadané trajektorii kružnice.

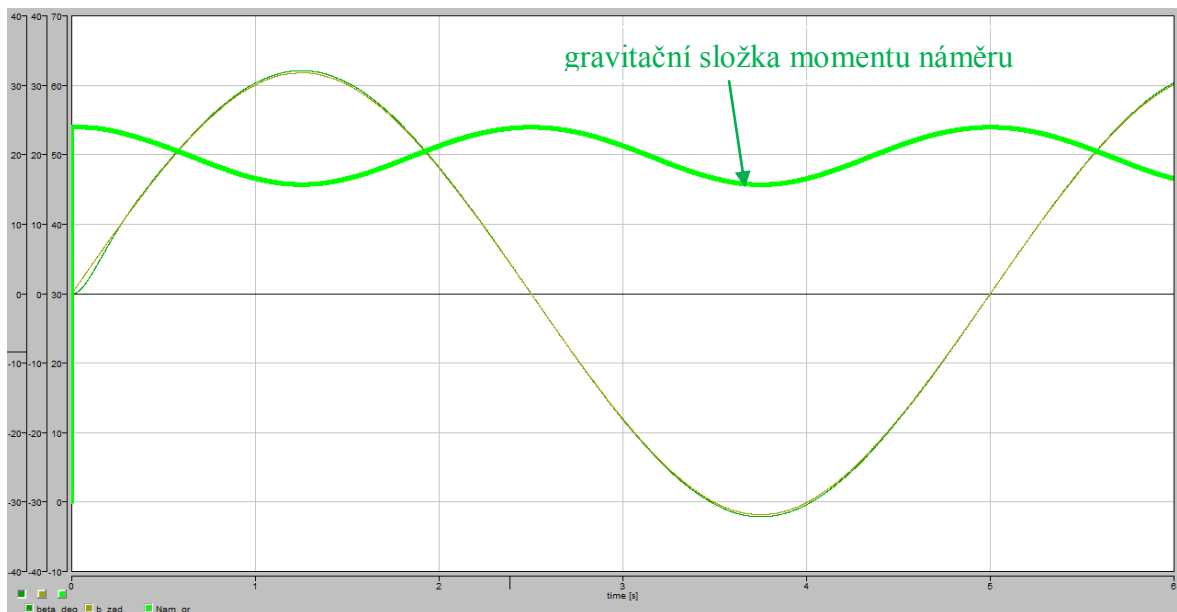


Obrázek 39: Odstředivý moment při pohybu po kružnici

Na *obrázku 39* jsme si znázornili odstředivý moment **modrou** křivkou. Tento moment reaguje na změny velikosti úhlové rychlosti ω_a , kdy odstředivý moment je závislý na druhé mocnině úhlové rychlosti. Tato síla působí na hmotný bod směrem od středu křivosti trajektorie pohybu náměru a reaguje na změnu kvadrátu úhlové rychlosti ω_a .

Ve sledovaném případě na *obrázku 40*, kde je znázorněna reakce odstředivého momentu při pohybu manipulátoru (jeho náměru) po požadované trajektorii kružnice, je velikost odstředivého momentu v závislosti na změny velikosti úhlové rychlosti větší a stálá. Odstředivý moment působí v tomto případě po celou dobu pohybu náměru po kružnici z důvodu neustále se měnící úhlové rychlosti ω_a .

Posledním zobrazením, které zde uvádíme pro pohyb efektoru po kružnici, je vliv gravitační složky v náměru manipulátoru.



Obrázek 40: Vliv gravitační složky v náměru při pohybu po kružnici

Průběh gravitační složky momentu náměru je znázorněn v grafické podobě na předchozím obrázku **zelenou** křivkou, kde je vidět, že gravitační složka reaguje na změnu velikosti úhlu β v náměru. Gravitační složka má téměř sinusový průběh, který je závislý na aktuální poloze náměru. Na začátku průběhu je velikost působení gravitační složky nulová, protože je rameno náměru v klidové poloze. Teprve až se začne rameno pohybovat, začíná působit i gravitační síla.

Tak jako u předchozího zapojení pro skokové odezvy (zobrazeno v příloze P I) i zde v zapojení pro žádaná data, která nám reprezentují chování modelu při pohybu po kružnici (zobrazeno v příloze P II), nám všechny uváděné grafické průběhy pro pohyb manipulátoru představují průběhy určitých částí pohybových rovnic, které jsme si matematicky vyjádřili již dříve v této práci.

ZÁVĚR

Při řešení této diplomové práce jsem prozkoumával oblast robotiky, manipulátorů a zejména dynamiku pohybu robotického manipulátoru za pomoci pohybových rovnic, jejichž prostřednictvím lze navrhnout zákony řízení pohybu a tedy ovládat pohyb manipulátoru. Manipulátor, se kterým jsem v této práci pracoval, je v takzvaném zapojení Cardanova uspořádání azimut – elevace.

Pro zkoumaný manipulátor jsem v této práci nejdříve matematicky odvodil jeho pohybové rovnice, které jsem dále použil pro simulační experimenty v počítačovém programovém prostředí Dynast. Pomocí vypočtených pohybových rovnic a programového prostředí byly pro manipulátor připraveny dvě úlohy, na kterých jsem analyzoval jeho chování při pohybu a graficky zobrazil jednotlivé části pohybových rovnic.

V programu Dynast jsem za pomoci jednotlivých bloků nastavil žádané hodnoty poloh manipulátoru tak, aby řídicí systém pohybu reagoval na zvolené skokové funkce. Toto schematické zapojení je uvedeno v příloze P I. V tomto zapojení je pro řízení polohy použit jen jeden regulátor typu PID, který stačil pro dosažení požadovaného průběhu „*pohybu*“ manipulátoru. V druhém zapojení, které se již věnuje pohybu manipulátoru po zadané trajektorii, v mém případě kružnice, jsem pro dosažení požadovaného pohybu použil kaskádní zapojení dvou regulátorů typu PI. Toto zapojení je uvedeno v příloze této práce, označené jako P II. U obou těchto zapojení jsem prezentoval průběhy chování jednotlivých částí pohybových rovnic při pohybu manipulátoru. V práci byly zobrazeny průběhy pro moment setrvačnosti odměru, coriolisův moment, vliv gravitační složky na náměr a odstředivý moment v odměru.

Cílem práce bylo především navrhnout řešení pro pohyb manipulátoru, respektive pohyb jeho náměru vyjádřeného „*efektorem*“ po zvolené trajektorii, kterou v našem případě představovala kružnice. A za pomoci simulace v programovém prostředí Dynast provést analýzu dynamických vlastností a následně posoudit možnosti autonomního řízení pohybových stavů soustavy a efektoru jako MIMO soustavy.

U obou schematických zapojení zobrazených v přílohách této práce jako P I a P II, pro které jsem uváděl jednotlivé grafické zobrazení průběhů, je patrné, že dosažené výsledky nám ukazují možnost regulovat pohyb manipulátoru za pomoci autonomních servopohonů a také velikost poruchových momentů, které musí tyto autonomní servopohony „zvládnout“ při zvoleném pohybu. V uvedeném případě lze zvolit i jiné možnosti regulace pohy-

bu daného manipulátoru, například řízení za pomoci regulace vlivem stavového regulátoru, takzvané regulace MIMO soustavy. Tato regulace však vyžaduje buď linearizaci dynamických rovnic pro případ lineárního stavového regulátoru, nebo použití jiné sofistikovanější struktury pro MIMO řízení nelineárních systémů. Obzvláště při zapojení, kde manipulátor zobrazuje odezvy chování na skokové funkce, žádané hodnoty úhlů ukazují, že tento typ pohybu manipulátoru by bylo vhodnější řešit pro kvalitnější průběh regulací typu MIMO, zatímco spojitý pohyb efektoru na manipulátoru lze kvalitně zajistit autonomními regulátory.

Výsledkem této práce je úspěšné zprovoznění robotického manipulátoru, který dokáže svým ramenem „efektorem“ pohybovat po zadané trajektorii kružnice v jeho pracovním prostoru. Využití tohoto zařízení bych navrhoval například při umístění sledovací kamery na efektor, kde bude tato kamera zaznamenávat určitý cíl, který se pohybuje ve vymezené trajektorii, kterou zadáme jako požadovaný pohyb. Tato možnost s umístěním snímací kamery na efektor manipulátoru, která by snímala nějaký vzdálený cíl, který by se ovšem pohyboval volně někde v prostoru, by mohla být vhodným rozšířením a pokračováním této práce.

Závěrem je možné konstatovat, že zadání této práce bylo splněno a bylo realizované v plném rozsahu.

CONCLUSION

To deal with this master's thesis, I had to explore the area of robotics, manipulators and especially the dynamics of movement of a robotic manipulator using equations of motion. Owing to these equations, it is possible to design laws of Motion and control the movement of the manipulator. I worked in this thesis with the manipulator which is in the so-called Cardan form azimuth – elevation.

Firstly, I derived mathematically the equations of motion of the manipulator and then used them for simulated experiments in the software Dynast. Due to the calculated equations of motion and the software, I prepared two tasks for the manipulator on which I analysed its behaviour in the movement and portrayed graphically the individual parts of the equations of motion.

Likewise, in the software Dynast I set up required values of the manipulator positions using individual blocks so that the controlling system could react to the chosen step functions. This schematic diagram is introduced in the attachment P. I. In this diagram there was applied only one regulator PID that was efficient enough to achieve the required process of the manipulator “motion“. In the other diagram, which shows the motion of the manipulator following a trajectory, i.e. a circle in this work, I chose a cascade connection of two regulators P. I. in order to achieve the required movement. This connection is portrayed in the attachment P II. of this thesis. In both of the diagrams I presented the processes of the behaviour of the individual parts of the equations of motion while the manipulator was working. Next, this master's thesis describes the processes for the moment of inertia delivery, Coriolis's moment, impact of the gravitational force on elevation and the centrifugal moment in delivery.

Above all, this work is aimed at suggesting a solution for the motion of manipulator or rather the movement of its elevation expressed by an “effector“ following the chosen trajectory presented by a circle in this situation. Equally, the simulation in the software Dynast enabled me to analyze dynamic features and judge the possibilities of the autonomous operation of the physical states of the system and effectors as MIMO system.

It is obvious, in the both schematic diagrams depicted in the attachments P I and P II and presenting individual graphic portrayal of the processes, the achieved results show the possibility of regulation of the manipulator motion using the autonomous actuators, as well as the size of the faulty moments which these autonomous actuators have to “manage“ in

the particular movement. In the presented situation there can be different possibilities of the motion regulation of the manipulator like controlling with the regulation effected by a state controller, the so-called regulation of MIMO system. However, this regulation requires either linearization of dynamic equations for the linear state controller or application of more sophisticated structure for MIMO controlling nonlinear systems. It is apparent, especially in the diagram in which the manipulator depicts the reactions of behaviour to the step functions, the required angle values portray the fact that this type of the manipulator motion would be better to be deal with for more quality process of regulations of the type MIMO whereas continuous movement of the effector on the manipulator could be provided by the autonomous regulators.

The result of this work is successful operating of the robotic manipulator that is able to move with its arm, i. e. effector, in the direction of the given trajectory of a circle in its operating area. I suggest using this equipment in the location of a document camera on the effector where this camera would record a target moving in a particular trajectory which we would enter as a required movement. The idea of the location of the document camera on the effector of the manipulator recording a distant target in an unlimited area would be an advisable topic for the next part of this work.

In conclusion, it could be stated the task of this thesis has been done and carried out to a great extent.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] ÚŘEDNÍČEK, Zdeněk. UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ. *ROBOTIKA* [online]. 1. vyd. 2012 [cit. 2014-01-27]. ISBN 978-80-7454-223-7. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10563/18589>
- [2] HEŘMAN, Mann a Michal ŠEVČENKO. ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE. *Snadné počítačové modelování dynamických soustav* [online]. Praha, 2008 [cit. 2014-01-27]. Dostupné z: <http://virtual.cvut.cz/dynastcz/prirucka.pdf>
- [3] KRATOCHVÍL, Lukáš. *Ovládání modelu robota*. Brno, 2009. Bakalářská. Mendelova zemědělská a lesnická univerzita v Brně.
- [4] Robotika, kybernetika: Teorie průmyslových robotů. [online]. Ostrava, 2000 [cit. 2014-01-30]. Dostupné z: http://matescb.skvorsmalt.cz/robotika_kybernetika/teorie_prumyslovych_robotu.pdf
- [5] MANN, Herman. *Course on Dynamics of multidisciplinary and controlled Systems: Modeling and Simulation*. Praha, 2006, 141 s.
- [6] ŠOLC, F., P. VÁCLAVEK a P. VAVŘÍN. *Řízení a regulace II*. VUT Brno: FAkulta automatizace a měřicí techniky, Skripta, Leden 2011.
- [7] VALÁŠEK, Michael. *Kinematika robotických systémů* [online]. ČVUT Praha, 2011 [cit. 2014-03-20]. Dostupné z: http://www.crr.vutbr.cz/system/files/brozura_06_1102.pdf
- [8] MANN, Heřman a Michal ŠEVČENKO. *Snadné počítačové modelování dynamických soustav: Příručka k internetovému kurzu a simulačnímu systému DYNAST*. Praha: ČVUT, 2008.
- [9] Softwarový systém DYNAST. [online]. [cit. 2014-03-25]. Dostupné z: <http://virtual.cvut.cz/dynastcz/#resic>
- [10] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. Encyklopedie fyziky: ***Coriolisova síla. [online]. [cit. 2014-04-08]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/43-coriolisova-sila>
- [11] Demonstrace Coriolisovy síly. [online]. [cit. 2014-05-13]. Dostupné z: kof.zcu.cz/st/rz/prace/mohler.doc

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

DH Denavit-Hartenbergova metoda.

GCS Globální soustava souřadnic.

LCS Lokální soustava souřadnic.

P Regulátor typu P

PI Regulátor typu PI

PID Regulátor typu PID

ω Úhlová rychlost

MIMO Multi-input multi-ouput

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Polohový vektor bodu P lze popsat v souřadném systému tělesa B nebo v globálním souřadném systému G	14
Obrázek 2: Článek (i) a jeho kloub směrem k základně i a směrem k efektoru i+1	16
Obrázek 3: Článek (i-1), (i), a (i+1) se soustavou souřadnic B_i a B_{i-1}	17
Obrázek 4: Parametry a_i , α_i , θ_i a d_i definované pro kloub (i) a článek (i)	19
Obrázek 5: Zobrazení 3R rovinného manipulátoru a DR s. soustavy každého článku	20
Obrázek 6: Průmyslový robot s pěti stupni volnosti	21
Obrázek 7: Ukázka dvou souřadných systémů	22
Obrázek 8: Metody inverzní transformace	26
Obrázek 9: Model manipulátoru se soustavou souřadných systémů	33
Obrázek 10: Graf pro cosinus	44
Obrázek 11: Konfigurace systému Dynast[9].....	47
Obrázek 12: Blokové schéma momentu odměru manipulátoru.....	48
Obrázek 13: Blokové schéma momentu náměru manipulátoru.....	49
Obrázek 14: Žádané a skutečné průběhy pro změnu úhlů α a β	50
Obrázek 15: Vyjádření momentu setrvačnosti odměru	51
Obrázek 16: Průběh momentu setrvačnosti v odměru.....	51
Obrázek 17: Moment Coriolisova typu v blokovém zapojení.....	52
Obrázek 18: Moment Coriolisova typu pro náš manipulátor graficky.....	52
Obrázek 19: Moment Coriolisova typu v detailnějším zobrazení.....	53
Obrázek 20: Velikost odstředivého momentu	53
Obrázek 21: Průběh odstředivého momentu.....	54
Obrázek 22: Gravitační složka	54
Obrázek 23: Grafické znázornění působení gravitační síly v náměru	55
Obrázek 24: Regulátor typu P	55
Obrázek 25: Regulátor typu PI	56
Obrázek 26: Žádaná hodnota x	58
Obrázek 27: Žádaná hodnota y	58
Obrázek 28: Žádaná hodnota z	58
Obrázek 29: Blok představující 1. řádek maticové rovnice.....	59
Obrázek 30: Blok představující 2. řádek maticové rovnice.....	59
Obrázek 31: Blok představující 3. řádek maticové rovnice.....	60

Obrázek 32: Výstupní graf časových závislostí žádaných úhlů α a β	60
Obrázek 33: Blokové schéma momentu odměru manipulátoru pro pohyb po kružnici.....	62
Obrázek 34: Blokové schéma momentu náměru manipulátoru pro pohyb po kružnici.....	63
Obrázek 35: Zobrazení žádaných a skutečných průběhů úhlů α a β	64
Obrázek 36: Moment setrvačnosti v odměru pro pohyb po kružnici.....	65
Obrázek 37: Moment Coriolisova typu pro pohyb po kružnici.....	66
Obrázek 38: Průběh úhlových rychlostí při zapojení pro pohyb po kružnici.....	67
Obrázek 39: Odstředivý moment při pohybu po kružnici.....	67
Obrázek 40: Vliv gravitační složky v náměru při pohybu po kružnici.....	68

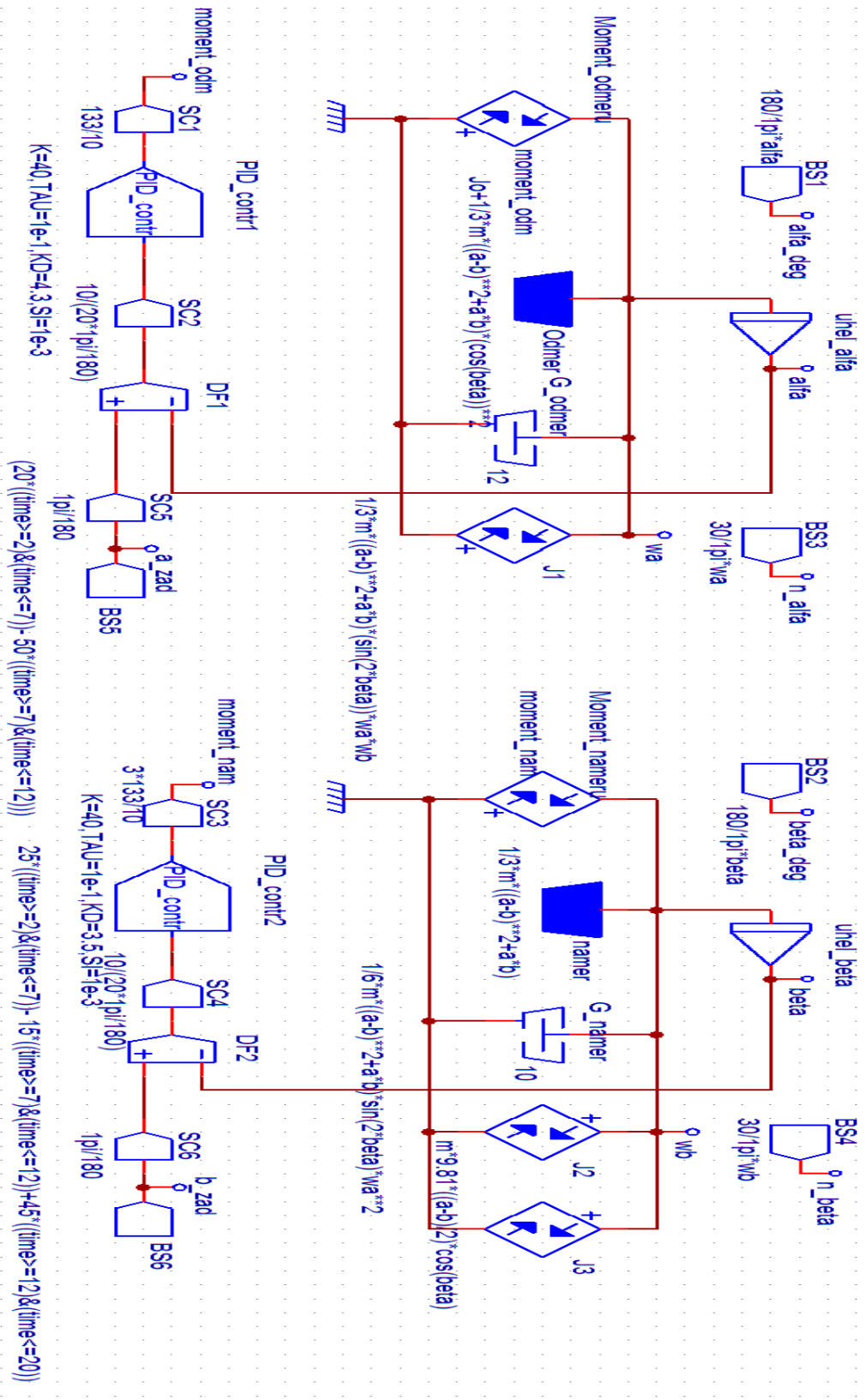
SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Tabulka DH parametrů pro zavedení článkových soustav souřadnic.....	19
Tabulka 2: DH parametry pro 3R rovinný manipulátor z obrázku 5	20
Tabulka 3: DH parametry pro zavedený manipulátor	34

SEZNAM PŘÍLOH

- P I Základní zapojení odměru a náměru manipulátoru s regulátorem PID
- P II Zapojení odměru a náměru manipulátoru s regulátory PI a žádanými hodnotami pro pohyb po kružnici

PŘÍLOHA PI: ZÁKLADNÍ ZAPOJENÍ ODMĚRU A NÁMĚRU MANIPULÁTORU S REGULÁTOREM PID



PŘÍLOHA P II: ZAPOJENÍ ODMĚRU A NÁMĚRU MANIPULÁTORU S REGULÁTRY PI A ŽÁDANÝMI HODNOTAMI PRO POHYB PO KRUŽNICI

