

Programová podpora předmětu Optimalizace

Miloš Jurek



Prohlašuji, že jsem na celé diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 08. 06. 2005

.....

podpis

ABSTRAKT

Abstrakt česky

Optimalizační metody představují vyhledávání extrémů reálných funkcí s různým omezením na definiční obor. Práce je příspěvkem k programové a vizualizační podpoře předmětu, který se touto problematikou zabývá. Těžiště práce je ve zpracování analytických a iteračních metod pro hledání extrémů funkcí. Dále je uvedena problematika lineárního a dynamického programování jako disciplín operační analýzy. Simulační příklady jsou provedeny v prostředí Mathematica, vizualizace v Power Pointu. Jako ilustrace a pro studijní účely byla vypracována řada vzorových protokolů.

Abstrakt ve světovém jazyce

Optimization techniques and methods represent an important discipline for extreme function searching. The optimization problems can be assumed without or with various restrictions on the function domain. The bachelor thesis is a contribution to program and visualization support to the subject dealing with topics. The main focus of the work is in the set of analytical and iteration optimization methods. Further, linear and dynamic programming is presented as a part of operational analysis research. Simulation examples are performed in the Mathematica environment and visualization outputs are presented in Power Point. Many template protocols illustrate the methods and support student activities.

OBSAH

ÚVOD.....	6
1 KLASIFIKACE EXTREMALIZAČNÍCH ÚLOH.....	8
1.1 VOLNÝ EXTREM FUNKCE	8
1.1.1 Jednorozměrný případ.....	8
1.1.2 Vícerozměrný případ.....	9
1.2 VÁZANÝ EXTREM FUNKCE	10
1.2.1 Klasický vázaný extrém	10
1.2.2 Neklasický vázaný extrém	11
2 ANALYTICKÉ METODY.....	12
2.1 JEDNOROZMĚRNÝ PŘÍPAD	12
2.1.1 Metoda srovnání hodnot funkce.....	13
2.1.2 Metoda srovnání znamének první derivace	13
2.1.3 Metoda vyšších derivací.....	13
2.2 VÍCEROZMĚRNÉ PŘÍPADY	14
2.3 OMEZENÍ VE TVARU ROVNOSTI	17
2.4 OMEZENÍ VE TVARU NEROVNOSTI	21
3 ITERAČNÍ METODY OPTIMALIZACE	25
3.1 KOMPARATIVNÍ METODY	25
3.1.1 Metody jednorozměrné optimalizace.....	25
3.1.2 Metody vícerozměrné optimalizace	29
3.2 GRADIENTNÍ METODY	32
3.2.1 Jednorozměrné gradientní metody.....	32
3.2.2 Gradientní metody bez omezení	33
3.2.3 Gradientní metody s omezením	35
3.3 METODY NÁHODNÉHO VYHLEDÁVÁNÍ.....	36
4 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ.....	38
4.1 SIMPLEXOVÁ TABULKA	40
5 DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ	42
5.1 SÍŤOVÁ FORMA DYNAMICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ	42
ZÁVĚR	44
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	46
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	47
SEZNAM OBRÁZKŮ	48
SEZNAM TABULEK.....	49
SEZNAM PŘÍLOH.....	50

ÚVOD

Problematika optimalizačních metod zahrnuje vyhledávání extrémů reálných funkcí reálných proměnných. Tato, na první pohled matematicky jednoduchá formulace se v průběhu 20. století stala velmi hluboce studovanou a atraktivní disciplínou. Na extremalizační úlohy vede řada praktických a průmyslových aplikací a to v oblasti projektové i provozní. Lze si představit návrh výměníku tepla nebo odparky tak, že spotřeba energie nebo přestup tepla nebo náklady dosahují svých extrémů a stejně k optimalizační úloze vede problém optimálního výrobního programu nebo nalezení optimálního spojení (dráhy).

Z hlediska matematické filozofie je potřeba rozlišovat úlohy bez omezení na definiční obor (volný extrém), omezení typu rovnost a omezení typu nerovnost. Přirozeně, různé úlohy vyžadují různý matematický aparát a různé metody. V prvé řadě jde o analytické metody, nejbližší ke klasické matematické analýze. Tyto metody využívají prostředky diferenciálního počtu a jsou vhodné zejména pro individuální ruční výpočet. Druhou skupinu tvoří iterační metody, ve kterých se konstruuje posloupnost bodů definičního oboru, která konverguje k extrému. Metody jsou vhodné zejména pro číslicový počítač. Ve třetí skupině metod se jedná o speciální úlohy, které vyžadují specifické metody. Jedná se o lineární, dynamické, nelineární a jiné programování, které je obecně zastřešeno pojmem operační analýza.

Tato práce je příspěvkem k předmětu Optimalizace, která se touto problematikou zabývá v magisterském studiu. Je v ní nastíněno, co vlastně znamená a obnáší řešení optimalizačních úloh a výpočet extrémů funkcí. V první kapitole práce je uvedena klasifikace jednotlivých optimalizačních úloh. Jsou zde přiblíženy úlohy bez omezení (tzv. volný extrém) a úlohy s omezením ve tvaru rovnosti a nerovnosti (tzv. klasicky vázaný a neklasicky vázaný extrém). Následující kapitoly uvádějí typy extremalizačních metod a jejich nejvýznamnější výpočetní metody. Jako první je přiblíženo řešení extrémů pomocí analytických metod. Tyto metody používají výpočtu parciálních derivací a gradientů. Jejich užití je vhodné při ručních výpočtech jednodušších funkcí. Při velké složitosti funkce totiž roste počet jednotlivých analytických výpočtů a řešení se může stát nepřehledným. Dále jsou uvedeny metody iterační (krokové). Tyto metody vyhledávání extrémů funkcí tvoří jednu z nejrozpracovanějších tříd optimalizačních úloh. Jsou popsány algoritmy, které se

většinou dobře programují a nemají přílišné nároky na tvary účelových funkcí a omezení. Jako poslední jsou krátce zmíněny metody operační analýzy. Jako první disciplinou je lineární programování, které je nejhluběji propracovaným a nejdéle zkoumaným odvětvím operační analýzy a řeší úlohy pomocí simplexové tabulky. Dále je zmíněno dynamické programování a řešení síťové úlohy. Na závěr jsou přiloženy ukázkové výpočty optimalizačních příkladů ve formě vzorových protokolů. Výsledkem práce je sada přednáškových slidů vypracovaných v prostředí Power Point a [www](#) stránky předmětu. Tyto výstupy práce jsou určeny jako studijní opory pro studium zejména v distanční a kombinované formě studia.

1 KLASIFIKACE EXTREMALIZAČNÍCH ÚLOH

Optimalizační úlohy se klasifikují dle jejich omezení na definiční obor. Vyšetřujeme-li extrémy funkce n proměnných na celém prostoru $\mathbb{R}^n$ mluvíme o tzv. volných extrémech. Zajímají-li nás pouze takové body maxima nebo minima, které splňují nějaké další podmínky, mluvíme o vázaných extrémech. Názvy volné a vázané extrémy nejsou termíny v matematickém smyslu přesně zavedené a podle toho používané. O volných extrémech se například mluví i tehdy, kdy extremalizovaná funkce není všude v $\mathbb{R}^n$ definovaná a vyšetřuje se pouze na té množině $X \subset \mathbb{R}^n$, kde definována je. Je dohodnuto, že volný extrém funkce f je globální extrém této funkce vzhledem k $\mathbb{R}^n$.

Vázané extrémy se původně systematicky vyšetřovaly pouze při podmínkách tvaru $g_j(x_1, \dots, x_n) = 0$, $j = 1, \dots, n$, kde g_j byly funkce se spojitými prvními parciálními derivacemi. Po druhé světové válce se objevily důležité úlohy, v nichž se vyskytovaly vedlejší podmínky s nerovnostmi, upravované nejčastěji na tvar

$$g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0, j = 1, \dots, m \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

Extremalizační úlohy s omezeními ve tvaru (1.1) se nazývají úlohy matematického programování. V matematickém programování se extremalizovaná funkce nazývá funkce účelová. Ta $x \in \mathbb{R}^n$, která vyhovují omezujícím podmínkám, se nazývají přípustná řešení. Přípustné řešení x , které je globálním extrémem účelové funkce vzhledem k množině přípustných řešení, se nazývá optimální řešení.

1.1 Volný extrém funkce

Volným extrémem funkce rozumíme lokální minimum nebo lokální maximum funkce v libovolném bodě definičního oboru. Metody analytického vyhledávání volných extrémů jsou založené na výpočtech derivací, a proto jsou vhodné pro analyticky zadané funkce.

1.1.1 Jednorozměrný případ

Předpokládejme reálnou funkci jedné reálné proměnné. Pojem extrém funkce úzce souvisí s pojmy konkávnosti či konvexnosti. Funkce definovaná v jistém okolí bodu x_0 má v tomto bodě ostré lokální maximum, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x , $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $f(x) < f(x_0)$. O neostrém lokálním maximu hovoříme, jestliže je splněná neostrá nerovnost $f(x) \leq f(x_0)$. Pojem lokálního minima se definuje analogicky, ale při splnění nerovnosti $f(x) > f(x_0)$. Globální maximum (minimum) funkce f na intervalu D je největší (nejmenší)

hodnota, kterou funkce f na intervalu D nabude. Necht' funkce f má první derivaci na intervalu D a v bodě x_0 tohoto intervalu necht' existuje druhá derivace. Potom platí, že funkce f má v bodě x_0 ostré lokální maximum, když $f'(x_0)=0$ a $f''(x_0)<0$.

Jestliže $f'(x_0)=0$ a $f''(x_0)>0$, potom má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum. Jestliže druhá derivace funkce f v bodě x_0 neexistuje a první derivace je v levém okolí bodu x_0 kladná a v pravém okolí x_0 je záporná, potom má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum. Když je první derivace $f'(x_0)$ v levém okolí x_0 záporná a v pravém okolí x_0 kladná, potom má f v x_0 ostré lokální minimum. Může se stát, že první i druhá derivace v bodě x_0 je rovna nule. Potom funkce může mít v tomto bodě inflexi anebo je třeba zkoumat vyšší derivace.

Necht' existuje přirozené číslo n tak, že $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ a pro každé $k < n$ je $f^{(k)}(x_0) = 0$. Potom platí, že jestliže je n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, má f v x_0 ostré lokální minimum. Jestliže n je sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, má f v x_0 ostré lokální maximum. Když je n liché, jde o inflexní bod. V inflexním bodě se mění konkávnost funkce na konvexnost či naopak. Konkávnost souvisí s maximem funkce a konvexnost s minimem. Když je funkce f na intervalu D spojitá a má v každém bodě konečnou druhou derivaci, pak je funkce f na intervalu konvexní právě tehdy, když pro každé $x \in D$ je $f''(x) \geq 0$ a funkce f je konvexní právě tehdy, když pro každé $x \in D$ je $f''(x) \leq 0$.

1.1.2 Vícerozměrný případ

Analytické řešení vyhledávání extrémů reálné funkce více reálných proměnných je v zásadě zveřejněním jednorozměrného případu. Namísto pojmu první a druhá derivace se používá pojem gradientu a Hessovy matice. Gradient funkce se definuje jako vektor parciálních derivací:

$$\text{grad } f(x_1, \dots, x_n) = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (1.2)$$

A Hessova matice se definuje pomocí druhých parciálních derivací:

$$H = \nabla^2 f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Při vyšetřování extrémů se musí určit, zda je Hessova matice pozitivně či negativně definitní, což odpovídá kladné nebo záporné druhé derivaci v jednorozměrném případě.

Při vyšetřování pozitivní či negativní definitnosti matice je třeba počítat hlavní subdeterminanty. Podmínky pro definitnost matice udává Sylvestrovo kritérium: „Matice je pozitivně definitní, když všechny hlavní subdeterminanty této matice mají kladnou hodnotu. Matice je negativně definitní, když hodnoty hlavních subdeterminantů střídají znaménka, ale první subdeterminant musí být záporný“.

1.2 Vázaný extrém funkce

V případě volného extrému se hledá extrém na celém definičním oboru. V praxi se však vyhledávají extrémy při různých omezeních. Nejfrekventovanějším omezením bývají rovnost a nerovnost, případně smíšená omezení. Úlohy s omezením typu rovnost se nazývají úlohy klasického vázaného extrému, úlohy s nerovnostmi se nazývají úlohy neklasického vázaného extrému.

1.2.1 Klasický vázaný extrém

Postup řešení klasického vázaného extrému je všeobecně známý pod názvem metoda Lagrangeových multiplikátorů. Je třeba maximalizovat funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ při podmínkách $g_j(x_1, \dots, x_n) = 0, j = 1, \dots, m < n$

Při řešení této úlohy se definuje Lagrangeova funkce

$$\phi(x, p) = f(x) + \sum_{j=1}^m p_j g_j(x) \quad (1.4)$$

kde vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ se nazývá vektor Lagrangeových multiplikátorů. Body vázaného extrému se potom hledají jako body extrému Lagrangeovy funkce, tj. jako nulové body všech $n+m$ parciálních derivací funkce ϕ .

Když označíme:

$$\begin{aligned} \nabla_x \phi &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right)^T \\ \nabla_p \phi &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial p_1}, \frac{\partial \phi}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial p_m} \right)^T \end{aligned} \quad (1.5)$$

Potom existenci extrému udává následující věta: „Nechť funkce $f, g_1, \dots, g_m$ mají spojitě parciální derivace a necht' jsou funkce $\nabla g_j(x)$ lineárně nezávislé. Potom platí, že když je

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ bodem lokálního extrému funkce f při omezeních $g_j(x)=0$, potom existuje $p_0=(p_{01}, \dots, p_{0m})$ tak, že

$$\nabla_x \phi(x_0, p_0) = \nabla_2(x_0, p_0) = 0 \quad (1.6)$$

1.2.2 Neklasický vázaný extrém

Neklasický vázaný extrém se definuje jako úloha maximalizovat funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ při omezeních tvaru $g_j(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $j=1, \dots, m$ $x_i \geq 0$ $i=1, \dots, n$.

Takto formulovaná úloha se nazývá úloha matematického programování. Jednou z nejdůležitějších teorémů charakterizující takovouto úlohu je Kuhn-Tuckerova věta. Tato věta byla publikována roku 1951 a nazývá se též větou o sedlovém bodě. Podobně jako v případě omezení rovnostmi se definuje Lagrangeova funkce (1.4).

Kuhn-Tuckerova věta: „Vektor x_0 je optimálním řešením úlohy právě tehdy, když existuje vektor p_0 takový, že $x_0 \geq 0$ a $p_0 \geq 0$ a pro všechny $x \geq 0$, $p \geq 0$ platí:

$$\phi(x, p_0) \leq \phi(x_0, p_0) \leq \phi(x_0, p) \quad (1.7)$$

Bod (x_0, p_0) se nazývá nezáporný sedlový bod funkce ϕ .

Takto formulovaná věta má pro matematické programování význam jen teoretický, protože sedlový bod se hledá obtížně. Pro výpočetní účely má význam jen její důsledek, který platí pro diferencovatelné funkce f a g_j .

Důsledek Kuhn-Tuckerovy věty: „Nechť f a g_j mají všechny první parciální derivace.

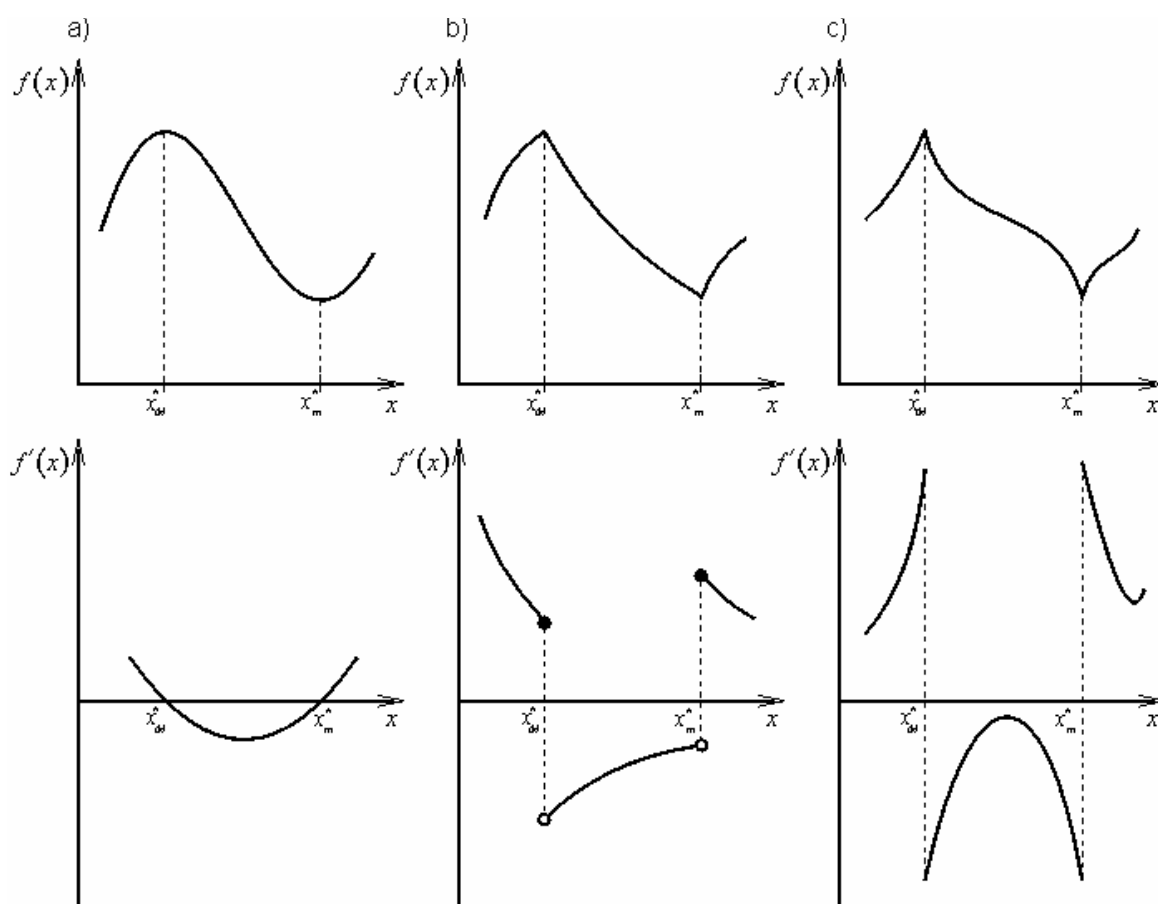
Potom podmínka (1.7) je ekvivalentní tzv. lokálním Kuhn-Tuckerovým podmínkám:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{(x_0, p_0)} &\leq 0 & x_{0i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{(x_0, p_0)} &= 0 & i=1, \dots, n & x_{0i} \geq 0 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial p_j} \right)_{(x_0, p_0)} &\geq 0 & p_{0j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p_j} \right)_{(x_0, p_0)} &= 0 & j=1, \dots, m & p_{0j} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

2 ANALYTICKÉ METODY

2.1 Jednorozměrný případ

U spojitě účelové funkce jedné proměnné $f(x)$ lze nutné podmínky existence lokálního extrému získat analýzou první derivace, viz (Obr.1). V bodech, ve kterých účelová funkce $f(x)$ má lokální extrém, derivace prvního řádu $f'(x)$ je nulová. Na (Obr.1a) je hladká účelová funkce $f(x)$, která má v bodech x_M a x_m nulovou derivaci $f'(x)$. Spojitě účelová funkce $f(x)$ na (Obr.1b) má v bodech x_M a x_m zlomy, kterým odpovídají body nespojitosti prvního druhu derivace $f'(x)$. V bodech x_M a x_m existují pouze derivace zleva a zprava. Případ, kdy derivace $f'(x)$ má body nespojitosti druhého druhu, je na (Obr.1c).



Obr. 1: Vybrané funkce a jejich derivace

Nutná podmínka tedy zní: „Spojitě účelová funkce má lokální extrém pouze v těch bodech, ve kterých je její první derivace nulová.“

Při určování lokálních extrémů spojitě účelové funkce $f(x)$ nejdříve na základě nutných podmínek určíme „podezřelé body“ a pak pomocí některé z následujících metod zjistíme průběh účelové funkce v okolí těchto podezřelých bodů.

2.1.1 Metoda srovnání hodnot funkce

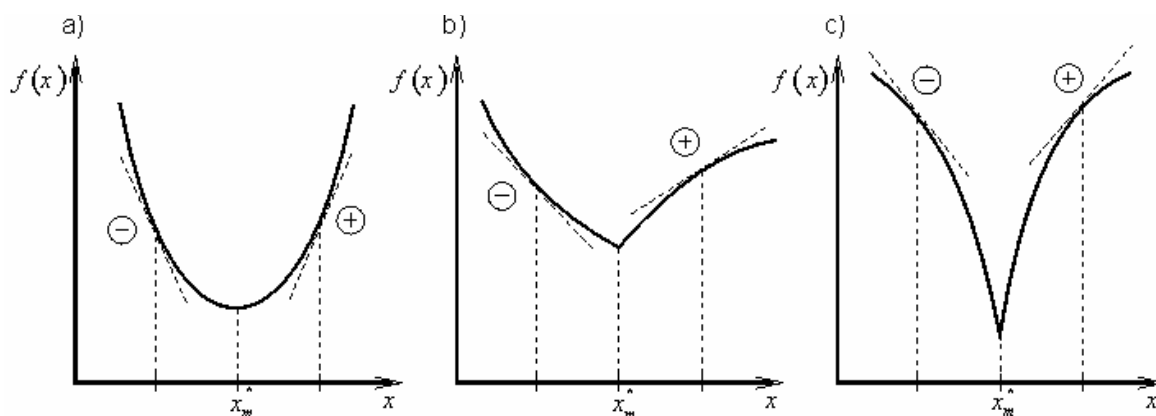
Tato metoda spočívá ve srovnání hodnot účelové funkce $f(x)$ v podezřelém bodě x s hodnotami v bodech $x-\Delta x$ a $x+\Delta x$, které jsou tak blízko bodu x , že mezi nimi neleží už žádný jiný podezřelý bod. Platí-li nerovnost

$$f(x) < f(x \pm \Delta x), \quad (2.1)$$

pak v bodě x vystupuje ostré lokální minimum. Platí-li opačná nerovnost, pak účelová funkce $f(x)$ má v bodě x ostré lokální maximum.

2.1.2 Metoda srovnání znamének první derivace

Při této metodě v bodech $x-\Delta x$ a $x+\Delta x$ srovnáváme znaménka první derivace $f'(x)$. Budou-li znaménka první derivace $f'(x)$ v bodech $x-\Delta x$ a $x+\Delta x$ stejná, pak v podezřelém bodě x extrém nevystupuje. Změní-li se znaménko první derivace $f'(x)$ při přechodu z bodu $x-\Delta x$ do bodu $x+\Delta x$ z $(-)$ na $(+)$, pak účelová funkce $f(x)$ má v bodě x ostré lokální minimum a opačně, změní-li se znaménko $f'(x)$ z $(+)$ na $(-)$, ostré lokální maximum.



Obr. 2: Ostrá lokální minima účelových funkcí

2.1.3 Metoda vyšších derivací

Tuto metodu lze použít pouze v těch případech, kdy v podezřelých bodech existují spojité derivace vyšších řádů. Reálné kořeny rovnice

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (2.2)$$

vyznačují podezřelé body, tzv. stacionární (kritické) body, ve kterých vypočteme druhé derivace. Bude-li ve stacionárním bodě druhá derivace $f''(x)$ kladná, pak účelová funkce $f(x)$ je ryze konvexní a má v tomto bodě ostré lokální minimum a opačně, bude-li záporná, pak účelová funkce $f(x)$ je ryze konkávní a má v tomto bodě ostré lokální maximum. Je-li

druhá derivace $f''(x)$ v nějakém stacionárním bodě nulová a třetí derivace nenulová, pak účelová funkce $f(x)$ v tomto bodě extrém nemá. Takový stacionární bod je inflexní. Bude-li i třetí derivace $f'''(x)$ ve stacionárním bodě nulová, je třeba použít následující pravidlo: „Je-li řád první nenulové derivace ve stacionárním bodě lichý, pak v tomto bodě extrém nevystupuje. Bude-li řád první nenulové derivace ve stacionárním bodě sudý, pak účelová funkce má v tomto bodě lokální extrém, který je ostrým lokálním minimem, resp. maximem. Bude-li tato derivace kladná, je účelová funkce ryze konvexní, bude-li záporná, je účelová funkce ryze konkávní“.

Při řešení praktických optimalizačních úloh se nezávislá proměnná x obvykle může měnit v určitém předem daném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Optimalizační úloha spočívá v nalezení bodů patřících do množiny přípustných řešení $X = \langle a, b \rangle$, ve kterých účelová funkce $f(x)$ nabývá nejmenší či největší možné hodnoty, tj. bodů globálního minima či maxima. Tato úloha se zapisuje ve tvaru

$$f(x) < f(x \pm \Delta x). \quad (2.3)$$

Protože v krajních bodech uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ vždy vystupují lokální extrémy, je nutno o tyto body rozšířit počet podezřelých bodů. Typ lokálního extrému lze zjistit některou z výše uvedených tří metod s tím, že se uvažuje průnik okolí krajního bodu s množinou přípustných řešení $X = \langle a, b \rangle$. U spojitě účelové funkce se body lokálního minima a maxima střídají – mezi dvěma lokálními minimy je lokální maximum a opačně – mezi dvěma lokálními maximy se nachází vždy lokální minimum. Globální extrém požadovaného druhu se z odpovídajících lokálních extrémů určí vzájemným srovnáním.

Při optimalizaci účelových funkcí jedné proměnné je velmi vhodné si nakreslit alespoň přibližný průběh dané účelové funkce. Značně se tím usnadní řešení optimalizační úlohy a také se zmenší možnost výskytu chyby.

2.2 Vícerozměrné případy

Optimalizační úlohy bez omezení (úlohy na volný extrém) mohou být zapsány ve tvaru

$$x = \arg \min_{x \in R^n} f(x). \quad (2.4)$$

Má-li účelová funkce $f(x)$ v bodě x lokální minimum, pak platí

$$f(x) \leq f(x \pm h\Delta x), \quad (2.5)$$

kde h je libovolné malé kladné číslo ($0 \leq h \leq 1$), $\Delta x = [\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n]^T$ – přírůstek vektoru x , který v euklidovském prostoru R^n vyjadřuje směr.

Funkci vystupující na pravé straně nerovnosti rozložíme v okolí bodu $h=0$ podle Taylorova vzorce se zbytkem v Lagrangeově tvaru (1.4) kde $0 < a < 1$ a $\nabla f(x)$ je gradient účelové funkce (1.2), H je Hessova matice (1.3) parciálních derivací druhého řádu účelové funkce. Z nerovností po úpravě dostaneme tzv. základní nerovnost

$$h\nabla^T f(x)\Delta x + \frac{1}{2}h^2\Delta x^T H(x+ah\Delta x)\Delta x \geq 0, \quad (2.6)$$

kteřá musí být splněna pro všechny směry Δx a libovolné malé kladné číslo h . Proto po vydělení obou stran této nerovnosti číslem h a limitním přechodu $h \rightarrow 0$ dostaneme

$$\nabla f(x) = 0. \quad (2.7)$$

Tato podmínka říká, že v bodě lokálního minima účelové funkce $f(x)$ jsou všechny její parciální derivace prvního řádu nulové.

Bod x vyhovující podmínkám je stacionárním bodem. Ze základní nerovnosti (2.6) a nutné podmínky prvního řádu (2.7) vyplývá nutná podmínka druhého řádu

$$\Delta x^T H(x)\Delta x \geq 0. \quad (2.8)$$

Pomocný materiál:

Je-li $H = [h_{ij}]$ symetrická čtvercová matice řádu n , pak výraz

$$Q(\Delta x) = \Delta x^T H \Delta x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \quad (2.9)$$

se nazývá kvadratická forma.

Kvadratická forma je:

- kladně respektive záporně definitivní, když pro všechny nenulové vektory $\Delta x \neq 0$ platí $Q(\Delta x) > 0$ respektive $Q(\Delta x) < 0$;
- kladně respektive záporně semidefinitní, když pro všechny vektory Δx platí $Q(\Delta x) \geq 0$ respektive $Q(\Delta x) \leq 0$ a existuje-li takový vektor $\Delta x \neq 0$, že $Q(\Delta x) = 0$;
- indefinitní, když není kladně ani záporně (semi-)definitní.

Shodně s kvadratickou formou $Q(\Delta x)$ nazýváme i jí příslušnou matici H kladně, respektive záporně (semi-)definitní, či indefinitní.

Definitnost symetrických čtvercových matic a jim příslušných kvadratických forem se určuje pomocí Sylvestrova kritéria. Symboly $H_1, H_2, \dots, H_n$ označíme hlavní rohové minory (subdeterminanty) matice H ,

$$H_1 = h_{11}, H_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots, H_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Kvadratická forma a jí příslušná matice H jsou kladně definitní, když všechny její hlavní rohové minory jsou kladné, tj. $H_1 > 0, H_2 > 0, \dots, H_n > 0$.

Kvadratická forma a jí příslušná matice H jsou kladně semidefinitní, když všechny její hlavní minory jsou nezáporné a přitom alespoň jeden z hlavních rohových minorů je roven nule.

Z uvedených vlastností kvadratických forem přímo vyplývá, že je-li matice H kladně (semi-) definitní, pak matice $-H$ je záporně (semi-)definitní a naopak.

Nutná podmínka druhého řádu říká, že má-li účelová funkce $f(x)$ v bodě lokální minimum, pak Hessova matice v tomto bodě musí být kladně semidefinitní (účelová funkce $f(x)$ musí být v okolí bodu x konvexní).

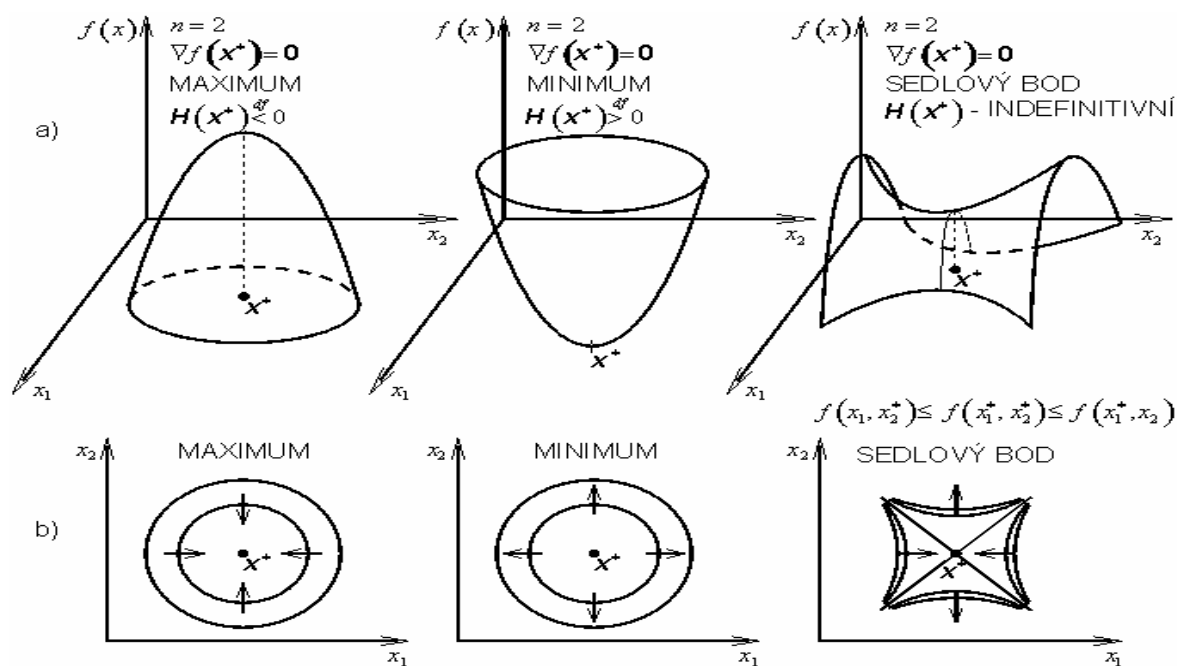
Postačujícími podmínkami pro to, aby účelová funkce $f(x)$ měla v bodě x ostré lokální minimum jsou

$$\nabla f(x) = 0, \quad H(x) > 0 \quad (2.11)$$

Postačující podmínky vyžadují kladnou definitnost Hessovy matice ve stacionárním bodě.

Je-li ve stacionárním bodě x Hessova matice záporně definitní, pak jsou splněny postačující podmínky pro to, aby účelová funkce $f(x)$ měla v bodě x ostré lokální maximum.

Nemá-li účelová funkce $f(x)$ ve stacionárním bodě extrém a je-li Hessova matice $H(x)$ indefinitní, pak stacionární bod x je lokálním sedlovým bodem.



Obr. 3: Extrémy funkcí více proměnných

Uvedené tři základní případy jsou ukázány na (Obr.3a). K zobrazení účelové funkce $f(x)$ na (Obr.3b) jsou použity hladiny (vrstevnice). Šipky ukazují směr růstu hodnot účelové funkce $f(x)$. Směr největšího růstu v některém bodě vyjadřuje gradient účelové funkce $f(x)$, který je vždy kolmý na hladinu procházející daným bodem.

2.3 Omezení ve tvaru rovnosti

Optimalizační úlohy s omezeními ve tvaru rovností (klasické úlohy vázaného extrému) lze vyjádřit ve tvaru

$$x_0 = \arg \min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x : g(x) = b, x \in R^n\} \quad (2.12)$$

kde $g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]^T$ – vektor omezujících funkcí,

$b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ – vektor omezujících (vazebních) konstant.

Rozdíl $s=n-m$ se nazývá stupeň volnosti úlohy. Pro $s = 0$ optimalizační úloha (2.12) spočívá v nalezení řešení soustavy $n = m$ obecně nelineárních rovnic $g(x)=b$.

Z těchto řešení se pak srovnáním funkčních hodnot vyčlení optimální řešení x , pro které účelová funkce $f(x)$ nabývá globálního minima na množině přípustných řešení X .

Značně důležitější je případ $s > 0$, tj. $n > m$. Pro řešení takových optimalizačních úloh se nejčastěji používá Lagrangeova metoda mající v teorii optimalizace základní význam.

Uvažujme úlohu minimalizace

$$x_0 = \arg \min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x : g(x) = b, x \in R^2\} \quad (2.13)$$

tj. $s = 1, n = 2$ a $m = 1$.

Předpokládejme, že v bodě $x=[x_1, x_2]^T$ existuje lokální řešení optimalizační úlohy (2.13)

a že v tomto bodě jedna z parciálních derivací prvního řádu omezující funkce je nenulová.

Pak vztah pro totální (úplný) diferenciál

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (2.14)$$

lze v okolí bodu x_0 zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = - \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \quad (2.15)$$

Řešením této rovnice je

$$x_2 = \varphi(x_1) \quad (2.16)$$

kde

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = -\frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \quad (2.17)$$

Nyní můžeme výchozí úlohu vyjádřit ve tvaru optimalizační úlohy s jednou proměnnou bez omezení. Zavedeme novou proměnnou

$$p = -\frac{\partial f / \partial x_2}{\partial g / \partial x_2} \quad (2.18)$$

a po dosazení obdržíme ze samotného vztahu (2.18) nutné podmínky prvního řádu pro existenci lokálního řešení úlohy (2.13)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + p \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \quad (2.20)$$

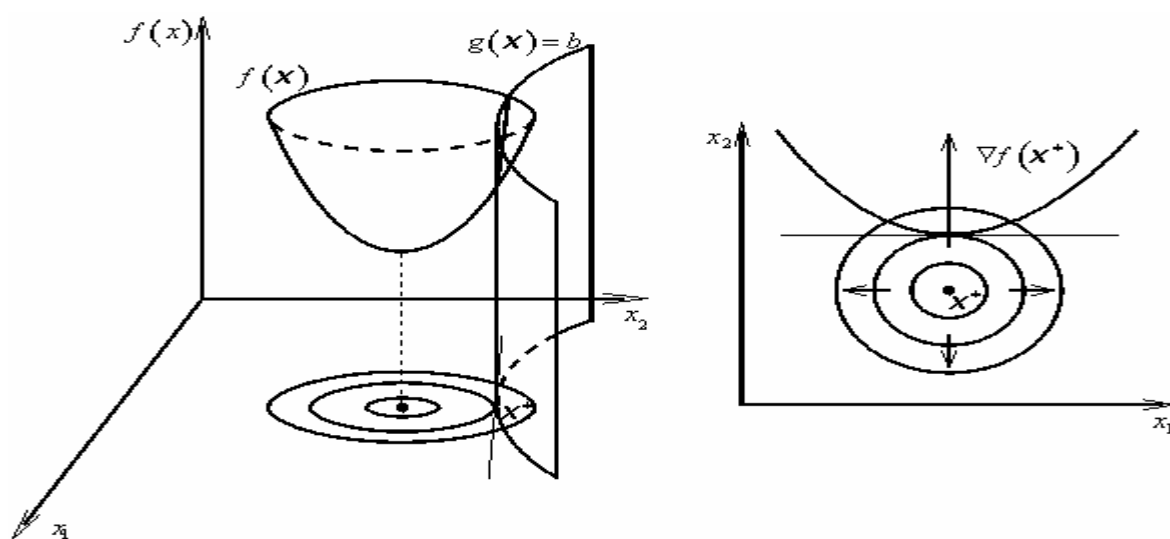
Z posledního vztahu vyplývá vlastnost směrnice tečny ke hladině

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\text{HLADINA}} = -\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$

Vztah (2.14) vyjadřuje směrnici tečny ke křivce omezení

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\text{OMEZENÍ}} = -\frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2}$$

Ze srovnání předchozích vztahů plyne, že lokální řešení x úlohy (2.13) vystupuje v bodě dotyku křivek hladiny a omezení, tj. v bodě, ve kterém mají obě křivky společnou tečnu (viz. Obr.4).



Obr. 4: Omezení rovností

Proměnná p se nazývá Lagrangeův multiplikátor Lagrangeovy funkce (1.4). Pro tuto proměnnou se používají i jiné symboly: λ , u , φ , μ , atd.

Uvažujme Lagrangeovu funkci Φ jako funkci omezující konstanty b :

$$\Phi(b) = f[x_1(b), x_2(b)] + p(b) \{g[x_1(b), x_2(b)] - b\}$$

Derivováním podle b dostaneme

$$\frac{d\phi(b)}{db} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \frac{dx_1}{db} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + p \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \frac{dx_2}{db} + [g(x_1, x_2) - b] \frac{dp}{db} - p \quad (2.21)$$

a protože $\Phi(x_1, x_2, p) = f(x_1, x_2) = f(x)$ dostaneme velmi důležitý vztah

$$p = -\frac{df}{db} \quad (2.22)$$

Vidíme, že optimální hodnota Lagrangeova multiplikátoru p vyjadřuje citlivost optimální hodnoty účelové funkce f na změnu hodnoty omezující konstanty b . Podobně lze postupovat i při řešení obecné optimalizační úlohy s omezeními ve tvaru rovností (2.12) pro $m < n > 2$. Využívá se zde věty o implicitních funkcích, která vyjadřuje Jacobiovy podmínky pro to, aby v okolí bodu x_0 bylo možné vyřešit soustavu rovnic

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.23)$$

vzhledem k některým m proměnných, např. $x_2 = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ vyjádřených ve funkci zbývajících $n-m$ proměnných $x_1 = [x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n]^T$.

Tyto podmínky spočívají v tom, že vektorová funkce $g(x)$ má spojitě všechny parciální derivace prvního řádu a hodnost Jacobiovy matice

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

je rovna počtu řádků m .

Pak optimalizační úlohu s omezeními ve tvaru rovností lze zastoupit $(n-m)s$ – rozměrnou optimalizační úlohou bez omezení.

Další postup je formálně shodný s výše uvedeným případem. Zavedeme m -rozměrný vektor Lagrangeových multiplikátorů a utvoříme Lagrangeovu funkci (1.4).

Nutné podmínky prvního řádu pro existenci lokálního řešení x_0 úlohy (2.13) jsou shodné s podmínkami stacionarity Lagrangeovy funkce. Z těchto podmínek vyplývá, že záporný

gradient účelové funkce $-\nabla f(x)$ je dán lineární kombinací gradientů omezujících funkcí $\{\nabla g_i(x)\}$. Váhovými koeficienty jsou Lagrangeovy multiplikátory $\{p_i\}$.

Řešením soustavy $n+m$ rovnic dostaneme $n+m$ neznámých: n proměnných $x=[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a m Lagrangeových multiplikátorů $p=[p_1, p_2, \dots, p_m]^T$.

Nutné podmínky druhého řádu spočívají v tom, že Hessova matice (1.3) sestavena z parciálních derivací druhého řádu Lagrangeovy funkce Φ podle proměnných $\{x_j\}$ musí být kladně (záporně) semidefinitní v bodě lokálního minima (maxima) $[x, p]^T$ při současném splnění podmínky

$$dg = Jdx = 0 \quad (2.25)$$

kde J je Jacobiova matice.

Bude-li při splnění podmínky (2.25) Hessova matice Lagrangeovy funkce kladně (záporně) definitní, pak nutné podmínky prvního řádu jsou zároveň postačujícími podmínkami pro to, aby v bodě x_0 účelová funkce $f(x)$ měla ostré lokální minimum (maximum). Samozřejmě se předpokládá, že všechny funkce $f(x)$ a $\{g_i(x)\}$ mají v okolí bodu $x_0 \in X$ spojitě parciální derivace druhého řádu.

Podmínky jsou nutné a postačující pro existenci globálního minima (maxima) v případě, že účelová funkce $f(x)$ je konvexní (konkávní) a omezující funkce $\{g_i(x)\}$ jsou lineární.

Uvažujme nyní okolí bodu $[x, p]$ v $(n+m)$ -rozměrném euklidovském prostoru R^{n+m} . Má-li funkce $L(x, p)$ v bodě x lokální minimum, pak platí

$$\phi(x_0, p) \geq \phi(x_0, p_0) = f(x, p_0) \quad (2.26)$$

Protože $x \in X$, pro libovolný vektor p platí rovnost

$$\phi(x, p) = f(x) \quad (2.27)$$

a vztah (2.26) lze tedy zapsat ve tvaru

$$\phi(x_0, p) \geq \phi(x_0, p_0) = \phi(x, p_0) \quad (2.28)$$

ze kterého vyplývá, že Lagrangeova funkce má v bodě $[x, p]^T$ lokální singulární sedlový bod, protože na pravé straně vztahu (2.28) je znak rovnosti.

Lagrangeova metoda je velmi výhodná, protože umožňuje převést optimalizační úlohu s omezeními ve tvaru rovností na optimalizační úlohu bez omezení, tzn. dovoluje zastoupit získání lokálních vázaných extrémů účelové funkce $f(x)$ určením lokálních volných extrémů Lagrangeovy funkce. Při řešení konkrétní optimalizační úlohy nejdříve najdeme stacionární body Lagrangeovy funkce, potom každý stacionární bod identifikujeme a vzájemným srovnáním funkčních hodnot vyčleníme globální řešení.

2.4 Omezení ve tvaru nerovnosti

Optimalizační úlohy s omezeními ve tvaru nerovnosti (úlohy na neklasický vázaný extrém) lze vyjádřit ve tvaru

$$x_0 = \arg \min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x : g(x) = b, x \in R^n\} \quad (2.29)$$

Na rozdíl od optimalizačních úloh s omezeními ve tvaru rovností, veličiny n a m mohou být libovolná konečná čísla. Zvolený typ nerovnosti $\leq$ ve vztahu na množinu přípustných řešení X lze získat z opačné nerovnosti vynásobením -1 a z rovnosti pomocí dvou nerovností, např.:

$$g_i(x) \geq b_i \Rightarrow -g_i(x) \leq -b_i \quad (2.30)$$

$$g_i(x) = b_i \Rightarrow \begin{cases} g_i(x) \leq b_i \\ -g_i(x) \leq -b_i \end{cases} \quad (2.31)$$

Omezení vyjadřující nezápornost proměnných $\{x_j\}$ rovněž nejsou podmínkou. Může-li nějaká proměnná nabývat jak kladných, tak i záporných hodnot, např. x_j pak tuto proměnnou zastoupíme dvěma pomocnými proměnnými $x'_j \geq 0$ a $x''_j \geq 0$, které vyhovují vztahům

$$x'_j \geq 0, \quad x''_j \geq 0, \quad x'_j - x''_j = x \quad (2.32)$$

Nově formulovaná optimalizační úloha nebude obsahovat proměnnou x_j .

Podmínky nezápornosti $x \geq 0$ vytvářejí v n -rozměrném euklidovském prostoru nezáporný ortant. V R^2 je to nezáporný kvadrant a v R^3 nezáporný oktant.

Uvažujme nejdříve optimalizační úlohu pouze při podmínkách nezápornosti

$$x_0 = \arg \min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x : g(x) = b, x \in R^n\} \quad (2.33)$$

Má-li účelová funkce $f(x)$ v bodě $x \in X$ lokální minimum a spojité parciální derivace druhého řádu, pak podobně jako v případě úlohy bez omezení musí pro $(x_0 + h\Delta x) \in X$ platit základní nerovnost (2.6). Základní nerovnost (2.6) vyjadřuje nutnou podmínku existence lokálního minima účelové funkce $f(x)$ v bodě x . Je-li $x > 0$, tzn. že je vnitřním bodem množiny X , pak základní nerovnost platí pro všechny směry Δx a tedy nutná podmínka prvního řádu, má tvar

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

Předpokládejme nyní, že v optimálním bodě x jedna proměnná nabývá hraniční hodnoty. Necht' přírůstky všech zbývajících proměnných jsou nulové, pak jediný přípustný směr je takový, pro který $\Delta x_j \geq 0$. Proto nutná podmínka prvního řádu spočívá v tom, že

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \geq 0, \text{ když } x_j = 0 \quad (2.35)$$

V bodě vnitřního minima ($x_j > 0$) parciální derivace prvního řádu podle x_j je nulová a v bodě hraničního minima ($x_j = 0$) parciální derivace prvního řádu podle x_j je větší nebo rovna nule. Tzn. buď parciální derivace prvního řádu je nulová (ve vnitřním bodě) nebo odpovídající proměnná je nulová (v hraničním bodě), proto jejich součin v bodě lokálního minima x je vždy roven nule

$$x_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.36)$$

Protože všechny proměnné $\{x_j\}$ jsou nezáporné, součet součinů (2.36) musí být rovněž nulový. Z předcházejících vztahů vyplývá, že v bodě x lokálního minima účelové funkce $f(x)$ musí být splněno $2n + 1$ nutných podmínek prvního řádu

$$\nabla f(x) \geq 0, \quad x^T \nabla f(x) = 0, \quad x \geq 0 \quad (2.37)$$

Vztahy využijeme pro řešení obecné optimalizační úlohy s omezeními ve tvaru nerovností (2.29). Zavedeme nezáporný vektor pomocných proměnných $z = [z_1, z_2, \dots, z_m]$ pomocí kterého omezující nerovnosti $g(x) \leq b$ lze napsat jako rovnosti

$$b - g(x) = z \quad (2.38)$$

Nyní optimalizační úlohu (2.29) můžeme zapsat ve tvaru

$$[x, z]^T = \arg \min_{x, z} f(x) \quad (2.39)$$

při omezujících podmínkách

$$g(x) + z = b, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0. \quad (2.40)$$

Kdyby omezující podmínky (2.40) neobsahovaly $n + m$ podmínek nezápornosti, pak by tato úloha mohla být vyřešena Lagrangeovou metodou. Lagrangeova funkce takové úlohy může být vyjádřena vztahem

$$\phi_z(x, p, z) = f(x) + p^T [g(x) + z - b] \quad (2.41)$$

Nutné podmínky prvního řádu by pro tuto úlohu spočívaly v tom, že všechny parciální derivace prvního řádu funkce $\phi_x(x, p, z)$ podle x , p a z , by měly být nulové. Protože x a z jsou nezáporné vektory, odpovídající podmínky na hodnoty parciálních derivací prvního

řádu funkce $\phi_x(x,p,z)$ podle těchto $n + m$ proměnných se změní na podmínky, které lze obdržet ze vztahů (2.37). Po zastoupení vektoru pomocných proměnných z vztahem (3.38) a úpravě dostaneme Kuhn-Tuckerovy nutné podmínky (1.8) prvního řádu pro existenci lokálního řešení úlohy (2.29). Tytéž podmínky lze obdržet pomocí (zobecněné) Lagrangeovy funkce. Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou nutné a postačující pro (ostré) globální minimum za předpokladu, že účelová funkce $f(x)$ je (ryze) konvexní a že omezující funkce $\{g_i(x)\}$ jsou konvexní a splňují určitou podmínku regularity.

Ukažme si geometrickou interpretaci Kuhn-Tuckerových podmínek. Uvažujme tyto podmínky ve tvaru (2.37). Zavedeme-li další vektor pomocných proměnných

$$r = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m p_i \nabla g_i(x), \quad (2.42)$$

pak podmínky (2.37) budou mít tvar

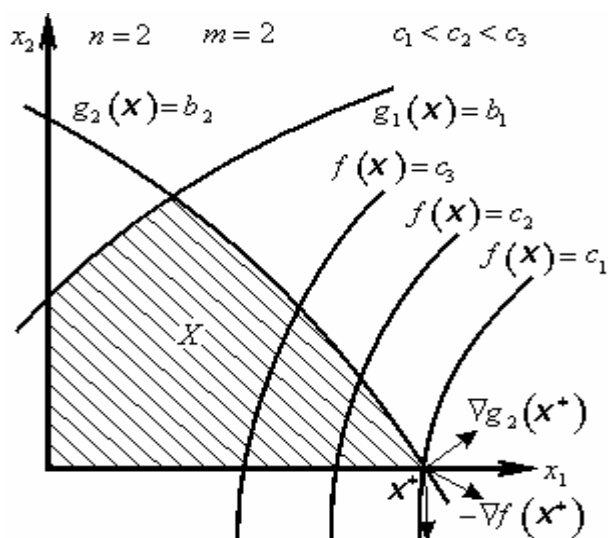
$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m p_i \nabla g_i(x) - r &= 0, & x^T r &= 0, & r &\geq 0, & x &\geq 0, \\ g_i(x) + z - b &= 0, & z^T p &= 0, & z &\geq 0, & p &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nezápornost pomocných proměnných zaručuje splnění odpovídajících nerovností. Prvních n vztahů lze napsat ve tvaru:

$$-\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m p_i \nabla g_i(x) - rI \quad (2.44)$$

kde I je čtvercová jednotková matice řádu n .

Geometrický význam vztahu (2.44) spočívá v tom, že v optimálním bodě x je záporný gradient účelové funkce dán lineární kombinací gradientů aktivních omezujících nadploch viz. (Obr.5). Gradienty omezujících funkcí $\{\nabla g_i(x)\}$ jsou trasponované řádky příslušné Jacobiovy matice a gradienty podmínek nezápornosti jsou řádky jednotkové matice I . Váhovými koeficienty jsou nezáporné Lagrangeovy multiplikátory $\{p_i\}$ a pomocné proměnné $\{-r_i\}$. Odtud vyplývá, že neregulární (singulární) omezení budou taková aktivní omezení, jejichž gradienty jsou lineárně závislé.



Obr. 5: Aktivní omezující nadplochy

V případě lineárních omezujících funkcí $\{g_i(x)\}$ podmínky regularity jsou vždy splněny.

Porovnáme-li Kuhn-Tuckerovy podmínky (1.8) s podmínkami (2.40), uvidíme, že bod $[x, p]^T$ je sedlovým bodem Lagrangeovy funkce $\Phi(x, p)$, tzn., že minimalizuje Lagrangeovu funkci podle všech nezáporných proměnných x a maximalizuje podle všech nezáporných Lagrangeových multiplikátorů p

$$\phi(x_0, p) \leq \phi(x_0, p_0) \leq \phi(x, p_0) \quad (2.45)$$

při všech $x \geq 0$ a $p \geq 0$.

Úloha získání nezáporných vektorů x a p vyhovujících nerovnosti (2.45) se nazývá úloha na sedlový bod. A podmínky (2.45) vyjadřují Kuhn-Tuckerovu větu o sedlovém bodě (1.7).

3 ITERAČNÍ METODY OPTIMALIZACE

Tyto metody lze rozdělit na tři typy. Na optimalizační metody, které nevyžadují výpočet nebo odhad derivací účelové funkce. Iterační charakter těchto metod je založený na deterministickém principu. Dalším typem jsou metody gradientní a třetím jsou metody nedeterministické. Iterační přírůstek těchto metod, či jeho směr má náhodný charakter.

3.1 Komparativní metody

3.1.1 Metody jednorozměrné optimalizace

Nejznámější dvě metody jednorozměrné optimalizace, které nevyžadují výpočet derivací, jsou Fibonacciho metoda a Metoda zlatého řezu. Obě metody jsou založené na myšlence zvolit posloupnost bodů x_i z daného intervalu tak, abychom našli interval co nejmenší délky, ve kterém se nachází bod extrému.

Metoda zlatého řezu

Metoda zlatého řezu patří mezi postupné komparativní metody hledání minima libovolné spojitě unimodální účelové funkce $f(x)$. Postupné komparativní metody spočívají v utvoření takové posloupnosti intervalů neurčitosti $x \in \{I_k\} = \{\langle a_k, b_k \rangle\}$, která vyhovuje vztahům

$$\dots \subset I_{k+1} \subset I_k \subset \dots \subset I_2 \subset I_1 = \langle a, b \rangle, \quad (3.1)$$

$$\dots < l_{k+1} < l_k < \dots < l_2 < l_1 = b - a \quad (3.2)$$

Každý následující interval neurčitosti je podintervalem předcházejícího intervalu neurčitosti, a proto posloupnosti $\{I_k\}$ a $\{l_k\}$ konvergují. Počet kroků N je dán požadovanou přesností ε , pro kterou platí vztahy:

$$b_N - a_N = l_N \leq 2\varepsilon, \quad (3.3)$$

$$x = x_N \pm \frac{1}{2}l_N \quad (3.4)$$

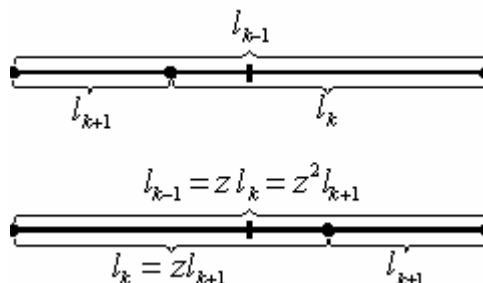
kde

$$x_N = \frac{1}{2}(a_N + b_N). \quad (3.5)$$

Metoda zlatého řezu spočívá v rozdělení každého intervalu neurčitosti tak, aby poměr větší části k menší byl roven poměru celého děleného intervalu k větší části tj.

$$\frac{l_{k-1}}{l_k} = \frac{l_k}{l_{k+1}} = z = \text{konst.}, \quad (3.6)$$

$$l_{k-1} = l_k + l_{k+1}, k = 2, 3, \dots \quad (3.7)$$



Obr. 6: Rozdělení intervalu v Metodě zlatého řezu

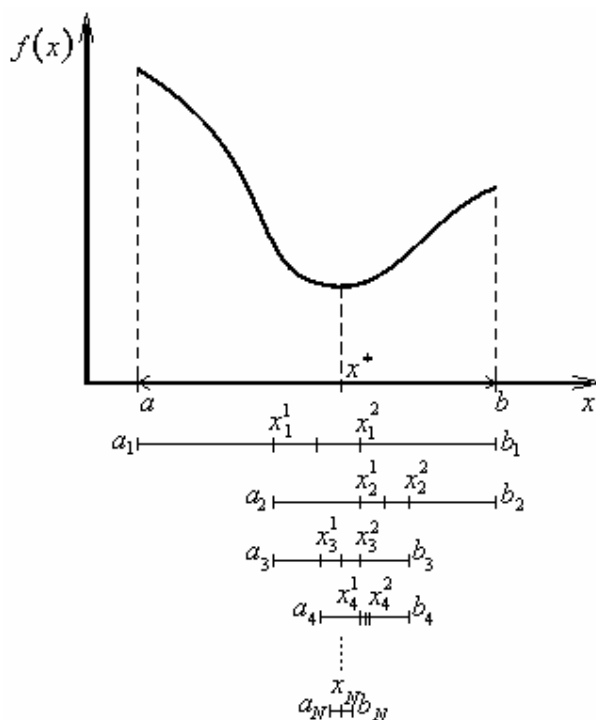
Po dosazení (3.6) do (3.7) a úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad (3.8)$$

jejíž kladný kořen je hledaný poměr

$$z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618 \quad (3.9)$$

Při metodě zlatého řezu ve všech krocích (kromě prvního) interval neurčitosti obsahuje spolu s krajními body jeden vnitřní bod. Proto je třeba určit hodnotu účelové funkce $f(x)$ pouze v jednom novém bodě umístěném symetricky k již známému bodu .



Obr. 7: Princip metody zlatého řezu

Metodu zlatého řezu lze popsat algoritmem:

$$\begin{aligned}
 & x_1^1 = a_1 + \frac{1}{z^2} (b_1 - a_1) \\
 1. \text{ krok} & \begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = b \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 = b_1 + \frac{1}{z^2} (b_1 - a_1) \\ l_1 = b_1 - a_1 = b - a \end{cases} \\
 k - \text{tý krok} & \begin{cases} f(x_{k-1}^1) \leq f(x_{k-1}^2) & f(x_{k-1}^1) > f(x_{k-1}^2) \\ a_k = a_{k-1} & a_k = x_{k-1}^1 \\ x_k^1 = a_k + \frac{1}{z^2} (b_k - a_k) & x_k^1 = x_{k-1}^2 \\ b_k = x_{k-1}^2 & x_k^2 = x_{k-1}^1 \\ x_k^2 = b_k + \frac{1}{z^2} (b_k - a_k) & b_k = b_{k-1} \end{cases} \\
 k = 2, 3, \dots, N-1 & \\
 l_k & = b_k - a_k = (b-a)z^{-(k-1)} \\
 N - \text{tý krok} & \begin{cases} f(x_{N-1}^1) \leq f(x_{N-1}^2) & f(x_{N-1}^1) > f(x_{N-1}^2) \\ a_N = a_{N-1} & a_N = x_{N-1}^1 \\ b_N = x_{N-1}^2 & b_N = b_{N-1} \\ x_N = \frac{1}{2} (a_N + b_N) & \end{cases} \\
 l_N & = b_N - a_N = (b-a)z^{-(N-1)}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Po N -tém kroku je optimální bod x lokalizován v intervalu neurčitosti $I_N = \langle a_N, b_N \rangle$ o délce

$$l_N = (b-a)z^{-(N-1)}. \tag{3.11}$$

Potřebný počet kroků N pro určení optimálního bodu x s přesností ε zjistíme ze vzorce

$$N \geq \frac{\log \frac{b-a}{2\varepsilon}}{\log z} + 1. \tag{3.12}$$

Počet experimentů M je stejný jako počet kroků N , tj. $M=N$. Efektivnost metody zlatého řezu je dána vztahem $E=z^{m-1}$.

U metody zlatého řezu se výsledek zapíše ve tvaru

$$x = x_N \pm \frac{1}{2} l_N, \quad \text{nebo} \quad x = x_N \pm \varepsilon.$$

Fibonacciho metoda

Fibonacciho metoda využívá při zkracování intervalů neurčitosti přímé úměrnosti jejich délek číslům Fibonacciho posloupnosti, tj.

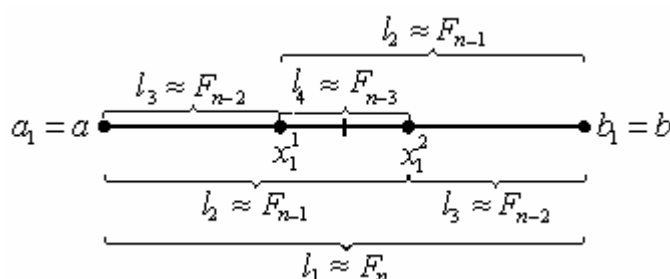
$$l_N = \frac{b-a}{F_N} = \frac{l_1}{F_N} = \frac{l_2}{F_{N-1}} = \dots = \frac{l_k}{F_{N-(k-1)}} = \dots = \frac{l_{N-1}}{F_2} = \frac{l_N}{F_1} \tag{3.13}$$

kde čísla Fibonacciho posloupnosti $\{F_i\}$ jsou dána vztahy

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (3.14)$$

resp.

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[z^{k+1} - \left(-\frac{1}{z} \right)^{k+1} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3.15)$$



Obr. 8: Dělení intervalu u Fibonacciho metody

Pro velké k lze v rovnici (3.15) výraz $\left(-\frac{1}{z} \right)^{k+1}$ zanedbat a dostaneme přibližný vzorec pro výpočet čísel Fibonacciho posloupnosti

$$F_k \approx \frac{1}{\sqrt{5}} z^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Fibonacciho metoda minimalizace může být popsána následujícím algoritmem:

$$\begin{aligned}
 & l_n = \frac{1}{F_n} (b - a) \\
 1. \text{ krok } & \begin{cases} a_1 = a \\ b_1 = b \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^1 = a_1 + F_{n-2} l_n \\ x_1^2 = b_1 - F_{n-2} l_n \end{cases} \\
 & l_1 = b_1 - a_1 = b - a \\
 k - \text{tý krok } & \begin{cases} f(x_{k-1}^1) \leq f(x_{k-1}^2) \\ f(x_{k-1}^1) > f(x_{k-1}^2) \end{cases} \\
 & \begin{cases} a_k = a_{k-1} \\ b_k = x_{k-1}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_k^1 = a_k + F_{n-(k+1)} l_n \\ x_k^2 = x_{k-1}^1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = x_{k-1}^1 \\ b_k = b_{k-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x_k^1 = x_{k-1}^2 \\ x_k^2 = b_k - F_{n-(k+1)} l_n \end{cases} \\
 & k = 2, 3, \dots, N-2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_k &= b_k - a_k = (b-a)z^{-(k+1)} \\
(N-1)\text{-tý krok} &\left\{ \begin{array}{ll} f(x_{N-2}^1) \leq f(x_{N-2}^2) & f(x_{N-2}^1) > f(x_{N-2}^2) \\ a_{N-1} = a_{N-2} & a_{N-1} = x_{N-2}^1 \\ x_{N-1} = x_{N-1}^1 = x_{N-1}^2 = x_{N-2}^1 & x_{N-1} = x_{N-1}^1 = x_{N-1}^2 = x_{N-2}^1 \\ b_{N-1} = x_{N-2}^2 & b_{N-1} = b_{N-2} \end{array} \right. \\
l_{N-1} &= b_{N-1} - a_{N-1} = 2l_N \\
N\text{-tý krok} &\left\{ \begin{array}{ll} f(x_{N-1}) \leq f(x_{N-1} + \varphi) & f(x_{N-1}) > f(x_{N-1} + \varphi) \\ a_N = a_{N-1} & a_N = x_{N-1} \\ b_N = x_{N-1} + \varphi = x_{N-1} & b_N = b_{N-1} \\ x_N = \frac{1}{2}(a_N + b_N) & \\ l_N = b_N - a_N = \frac{1}{F_N}(b-a) & \end{array} \right. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Malé kladné číslo φ na N -tém kroku dovoluje určit polohu optimálního bodu x vzhledem k bodu x_{N-1} . Hodnotu čísla φ volíme nejméně o řád menší než je požadovaná přesnost ε . Po N -tém kroku optimální bod x leží v intervalu $\langle a_N, b_N \rangle$. Pro dosažení přesnosti ε při lokalizaci optimálního bodu x ze vztahů (3.3) a (3.4) dostaneme

$$F_N \geq \frac{b-a}{2\varepsilon}, \quad (3.18)$$

tj. musíme najít takové číslo Fibonacciho posloupnosti, které vyhovuje nerovnosti (3.18). Jeho index N udává počet potřebných kroků, a zároveň počet experimentů M , tzn. že $M=N$. Využijeme-li v nerovnosti (3.18) aproximace (3.16), pak dostaneme přibližný vztah

$$N \geq \frac{\log \frac{b-a}{2\varepsilon}}{\log z} + \frac{\log \sqrt{5}}{\log z} - 1. \quad (3.19)$$

Pro efektivnost Fibonacciho metody platí přibližně $E \approx \frac{1}{\sqrt{5}} z^{M+1}$.

3.1.2 Metody vícerozměrné optimalizace

Metoda mapování kritériální plochy

V diskretizovaných bodech povoleného podprostoru se zkoumají hodnoty účelové funkce. Postupuje se tak, že všechny nezávislé proměnné jsou konstantní a mění se jen jedna od dolní meze po horní. Potom se změní o krok další nezávislá proměnná a postup se opakuje.

Nevýhodou je, že při zvyšování počtu nezávislých proměnných se neúměrně zvyšuje počet vyčíslení účelové funkce. Krok diskretizace je třeba předem stanovit. Programová realizace je velmi jednoduchá. Výpočet hodnot účelové funkce se realizuje ve vnořených cyklech. Po vyčíslení všech hodnot je třeba jednoduchým porovnávacím algoritmem najít extrémální prvek a k němu hodnotu nezávislých proměnných. Toto porovnávání lze provádět přímo ve vnořených cyklech.

Boxova-Wilsonova metoda

Účelová funkce se vyčísľuje ve vrcholech čtverce a v jeho geometrickém středu. V dalším kroku se vrchol s největší či nejmenší hodnotou bere za střed nového čtverce a postup se opakuje. Metoda by se pro $N=2$ dala popsat následujícím algoritmem. Zvolíme střed M_0 a stanovíme délku strany čtverce. Okolo středu M_0 sestrojíme vrcholy čtverce M_1, M_2, M_3, M_4 . V jednotlivých bodech čtverce spočítáme hodnoty účelové funkce a určíme extrémální bod (minimum či maximum). Jestliže hodnota v bodě M_0 je nejbližší extrému, pak výpočet končí. V opačném případě se novým středem stává bod s hodnotou nejbližší extrému.

Postup se velmi lehce zevšeobecní na N -rozměrný případ tak, že místo čtverce se konstruuje nadkvádr s 2^N vrcholy.

Simplexové metody

Simplexové metody patří mezi další komparační metody, které nepotřebují výpočet derivací účelové funkce. Oproti předcházejícím metodám se počet bodů výpočtu hodnot účelové funkce redukuje na minimum. Ve dvojrozměrném prostoru je simplexem rovnostranný trojúhelník, v třírozměrném prostoru je to pravidelný čtyřstěn. V R^n jsou body pravidelného simplexu určeny následujícími vztahy

$$x_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} a_1 + d + e \\ a_2 + d \\ \dots \\ a_n + d \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad x_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1 + d \\ a_2 + d \\ \dots \\ a_n + d + e \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$d = \rho \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt[n]{2}} \quad e = d + \frac{\rho}{2} \quad (3.21)$$

kde ρ je délka hrany simplexu a n je dimenze prostoru.

Základní strategií pro maximalizaci účelové funkce v R^n je spočítání hodnot účelové funkce ve vrcholech simplexu a určení bodu s nejmenší hodnotou. Tento bod se překloupí

přes těžiště simplexu do směru největšího růstu tak daleko, aby tento bod tvořil se základnou opět pravidelný simplex. Nový vrchol simplexu se sestojí podle vztahu

$$x = x_m + 2(c - x_m) = 2c - x_m \quad (3.22)$$

$$c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} x_j \quad (3.23)$$

Metodu pravidelného simplexu lze vylepšit tak, že délka hrany simplexu se v průběhu výpočtu zmenšuje. Tím se zlepší konvergence a nedochází k oscilacím okolo extrémálního bodu. Upravená metoda se nazývá metodou flexibilního simplexu. Zkonstruuji se vrcholy simplexu $x(1), \dots, x(n+1)$ s maximální hodnotou v $x(i)$. K dalšímu bodu se postupuje podle vztahů:

jestliže $f(x(i)) > \max\{f(x(1)), f(x(2)), \dots, f(x(n+1))\}$, *pak*

$$x(i+1) = c + \alpha(x(i) - c) \quad \alpha \in (1; \infty)$$

1. expanze:

jestliže $f(x(i+1)) > \max\{f(x(1)), \dots, f(x(n+1))\}$, *pak*

se pokračuje v postupu úspěšným směrem;

jestliže $f(x(i)) < f(x(j))$ $j \neq i$, *pak*

2. kontrakce:

$$x(i+1) = c + \beta(x(i) - c) \quad \beta \in (1; 1)$$

jestliže $f(x(i+1)) < f(x(k))$, *pak se zmenší délka simplexu*

3. redukce:

$$\text{podle vztahu } x(j) = x(k) + \frac{1}{2}(x(j) - x(k))$$

Metoda cyklické záměny parametrů

Tato metoda se někdy nazývá Gaussova-Seidlova metoda. Při optimalizaci v R^n se zvolí jedna proměnná x_k a ostatní se nechají konstantní. Najde se částečné optimum nějakou metodou jednorozměrné optimalizace a proměnná x_k se na této hodnotě zafixuje. Přejde se k další proměnné x_j a opět se hledá jednorozměrný extrém. Tímto způsobem se vystřídají všechny proměnné a cyklus se opakuje. Uvedený postup však nemusí být vždy konvergentní a konvergence závisí na pořadí proměnných. Pro všeobecný tvar účelové funkce se metoda programuje obtížně.

3.2 Gradientní metody

Gradientními metodami jednorozměrné a vícerozměrné optimalizace budeme rozumět iterační algoritmus, ve kterém přírůstek vektoru parametrů je úměrný gradientu účelové funkce. Iterační vztah lze všeobecně vyjádřit jako

$$x(k+1) = x(k) + \lambda_k \nabla f(x(k)). \quad (3.24)$$

Hodnota $\lambda_k < 0$ znamená minimalizaci f , hodnota $\lambda_k > 0$ se volí při maximalizaci.

3.2.1 Jednorozměrné gradientní metody

Nejpoužívanějšími metodami jednorozměrné gradientní optimalizace jsou Regula falsi a Newtonova metoda. Tyto metody se uplatnily v numerické matematice. Regula falsi vyžaduje existenci první derivace na celém intervalu, ve kterém extrém hledáme. Newtonova metoda vyžaduje i existenci druhé derivace. Při metodě Regula falsi se účelová funkce aproximuje následujícím polynomem

$$p(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f'(x_{i-1}) - f'(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \cdot \frac{(x - x_i)^2}{2} \quad (3.25)$$

Další bod iterace se najde z podmínky extrému $p'(x_{i+1}) = 0$. Derivováním předchozího vztahu dostaneme

$$p'(x) \big|_{x=x_i} = f'(x_i) + \frac{f'(x_{i-1}) - f'(x_i)}{x_{i-1} - x_i} (x_{i+1} - x_i) = 0 \quad (3.26)$$

Z (3.26) vyplývá iterační předpis ve tvaru

$$x_{i+1} = x_i - f'(x_i) \frac{x_{i-1} - x_i}{f'(x_{i-1}) - f'(x_i)} \quad (3.27)$$

U Newtonovy metody se účelová funkce aproximuje prvními třemi členy Taylorova rozvoje

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2} f''(x_i)(x - x_i)^2 \quad (3.28)$$

Derivováním (3.28) a vyřešením $f'(x_{i+1}) = 0$ dostaneme

$$f'(x_i) + f''(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0 \quad (3.29)$$

z čehož vyjádříme iterační vztah pro x_{i+1} ve tvaru

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} \quad (3.30)$$

3.2.2 Gradientní metody bez omezení

Gradientní iterační postupy se realizují všeobecně podle vztahu (3.24). V případě, že se volí λ_k konstantní, hovoříme o gradientní metodě s krátkým krokem. Takovýto výpočet je poměrně jednoduchý, ale úspěšná konvergence posloupnosti není vždy zaručena. Při konstantním λ_k je možné přeskocení hledaného extrému. Proto byly vypracovány další metody, které mění λ_k v každém kroku tak, aby se dosáhlo co největšího možného zlepšení účelové funkce směrem k minimu anebo k maximu. Nejběžnější z těchto metod je gradientní metoda s dlouhým krokem. Při této metodě se volba uskutečňuje podle vztahu

$$\lambda(i) = \max \left\{ \lambda; \frac{d}{d\lambda} f(x(i) + \lambda \nabla f(x(i))) = 0 \right\} \quad (3.31)$$

Tento postup zabezpečuje řešení v menším počtu kroků, ale vyžaduje větší počet výpočtů. V každém kroku iterace je zapotřebí řešit úlohu jednorozměrné optimalizace.

Gradientní metody lze použít i v případech, kdy nejsou známy derivace. Používají se numerické odhady derivací, které mohou být symetrické anebo nesymetrické. Nejjednodušší vzorce tzv. dvojbodové mají následující tvary

symetrický vzorec

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - \Delta, \dots, x_n)}{2\Delta} \quad (3.32)$$

levý nesymetrický vzorec

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta} \quad (3.33)$$

nebo pravý nesymetrický vzorec

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - \Delta, \dots, x_n)}{\Delta} \quad (3.34)$$

Pro druhou derivaci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta, \dots, x_n) - 2f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i - \Delta, \dots, x_n)}{2\Delta} \quad (3.35)$$

kde Δ je malé kladné číslo. Jiné vzorce pro více bodů výpočtu udává numerická matematika.

Existují i další varianty gradientních metod s dlouhým krokem, které se snaží jiným, efektivnějším způsobem nahradit jednorozměrnou extremalizaci podle λ v iteračním postupu. Tyto metody jsou potom vhodné pro programování na počítačích.

První z metod je **Metoda konjugovaných gradientů**. Iterační algoritmus lze popsat následujícími vztahy

$$\begin{aligned}
 d(0) &= \nabla f(x(0)) && x(0) - \text{počáteční bod postupu} \\
 x(i+1) &= x(i) + \lambda(i)d(i) \\
 \lambda(i) &= -\frac{\nabla f^T(i)d(i)}{d^T(i)\nabla^2 f(i)d(i)} \\
 d(i+1) &= \nabla f(x(i+1)) + \delta(i)d(i) \\
 \delta(i) &= -\frac{\nabla f(i+1)^T \nabla f(i)}{d^T(i)^T \nabla f(i)} d(i)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Této metodě je podobná metoda paralelních tečen, která je známá pod označením **PARTAN**. Základní algoritmus této metody je:

1. volba počátečního bodu $x(0)$; volba N
2. $i = 1$, $x(1) = x(0) + \lambda \nabla f(0)$ pro λ , které maximalizuje $f(x(0) + \tilde{\lambda} \nabla f(0))$
3. $y(i) = x(i) + \tilde{\lambda}(i) \nabla f(i)$, kde $\tilde{\lambda}(i)$ maximalizuje $f(x(i) + \tilde{\lambda} \nabla f(x(i)))$
4. $x(i+1) = x(i-1) + \delta(i)[x(i) - x(i-1)]$, kde $\delta(i)$ maximalizuje $f(x(i+1)) = f(x(i-1) + \delta(i)[y(i) - x(i-1)])$
5. jestliže $i < N$, pak $i = i+1$ a skok na 3,
6. jestliže $i = N$, pak $x(0) = x(N)$ a skok na 2

Další metoda se opírá o algoritmus Newtonovy metody, ve které se namísto Hessovy matice druhých parciálních derivací konstruuje pouze její odhad. Metoda je známá pod označením **DFP** (Davidon, Fletcher, Powell) a vychází z iteračního vztahu

$$x(i+1) = x(i) + \lambda(i)S(i)\nabla f(i) \tag{3.38}$$

kde $S(i)$ je matice, která aproximuje inverzi Hessovy matice. Výpočet DFP metodou lze popsat následujícím algoritmem:

1. volba počáteční hodnoty $x(0)$ a pozitivně definitní matice $S(0)$; $i = 0$
 2. $d(i) = S(i)\nabla f(i)$
 3. $x(i+1) = x(i) + \lambda(i)d(i)$, kde $\lambda(i)$ maximalizuje $f(x(i) + \lambda(i)d(i))$
a výpočet $f(x(i+1))$ (3.39)
 4. $v(i) = \lambda(i)d(i)$ $w(i) = \nabla f(i) - \nabla f(i+1)$
- $$S(i+1) = S(i) + \frac{v(i)v^T(i)}{v^T(i)w(i)} - \frac{S(i)w(i) \quad w^T(i)S(i)}{w^T(i) \quad w(i)}$$
5. $i = i+1$ a skok na 2.

3.2.3 Gradientní metody s omezením

Použití gradientních metod při vícerozměrné optimalizaci naráží na problémy ve dvou případech. V první řadě jde o případy neanalyticky zadaných funkcí, kde vyjádření parciálních derivací je problematické, protože se musí použít numerických odhadů. V druhé řadě je to v případě omezení kladených na nezávislé proměnné.

Používanou metodou vycházející z gradientního iteračního postupu je metoda projekce gradientu, která je schopná akceptovat omezení ve tvaru konvexních množin (nerovnic).

Algoritmus vychází z běžného gradientního postupu, při kterém se kontroluje, jestli nedochází k překročení omezení. Jestliže k překročení dojde, vykoná se geometrický průmět tohoto bodu na hranici omezení. Z tohoto bodu se potom opět postupuje gradientní metodou s dlouhým krokem.

Předpokládejme úlohy maximalizace nelineární funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ při konvexních omezení ve tvaru

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Předpokládáme, že v iteračním postupu už poznáme posloupnost bodů $x(0), \dots, x(k)$ a konstruujeme další bod $x(k+1)$. Upravíme omezení do tvaru

$$\begin{aligned} Ax(k) &\leq b \\ -x(k) &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

a vytvoříme matici Q řádků, které jsou splněné jako rovnice. Můžeme odvodit, že projekční matice má tvar

$$P = (I - Q^T (QQ^T)^{-1} Q) \quad (3.42)$$

a nový směr postupu je potom daný

$$q = (QQ^T)^{-1} Q^T \nabla f(x(k)) \quad (3.43)$$

Jestliže $q_k < 0$, pak z matice Q vynecháme k -tý řádek a utvoříme matici Q^* a vypočítáme q^* . Tak postupujeme až po $k=1$. V případě, že q má všechny složky kladné, iterační postup se ukončuje.

Nový směr iteračního postupu je potom daný

$$s = P \nabla f(x(k)) \quad (3.44)$$

Délku iteračního postupu vypočítáme podle vztahu

$$\lambda = \max \{ \lambda; x(k) + \lambda s \text{ je přípustné} \} \quad (3.45)$$

Operace, které je třeba vykonat v každém kroku iteračního postupu, lze popsat následujícím algoritmem

1. sestavení Q
2. $q = (QQ^T)^{-1} Q^T \nabla f(x(k))$
3. test : jestliže $q_k < 0$ $k > 1$, pak vynechat k -tý řádek, sestavit Q^*
a skok na 2;
jestliže $q_k > 0$ pro všechny $k \geq 1$, pak konec
4. $P = (I - Q^T (QQ^T)^{-1} Q) \dots$ projekční matice
5. $s = P \nabla f(x(k))$
6. $\tilde{\lambda} = \max \{ \lambda, x(k) + \lambda s \text{ je přípustné} \}$
7. $x(k+1) = x(k) + \tilde{\lambda} s$
8. skok na bod 1.

(3.46)

3.3 Metody náhodného vyhledávání

Při těchto metodách je iterační přírůstek proměnných závislý na náhodně generované veličině. V zásadě jde tyto metody rozdělit do dvou tříd:

- jednoduché (striktně náhodné) metody, při kterých se pouze vyhodnocuje, jestli je nový bod „lepší“ než předcházející. Jestliže to tak není, strategie se vrací do předcházejícího bodu a generuje se nový směr a velikost kroku.

- metody s adaptací, při kterých se nějakou strategií vyhodnocuje, jestli se jde správným směrem anebo ne. Potom se mění velikost a směr kroku. Jde o kombinaci stochastické a deterministické strategie.

Konvergence algoritmů náhodného vyhledávání se všeobecně zaručit nedá a některá odvození jsou značně heuristická a intuitivní. Napříč tomu se ukazuje, že někdy jsou tyto metody efektivnější než deterministické. Hlavně v případech skutečně mnohorozměrných a v případech, kdy účelová funkce není zadána analyticky.

Uvažujme problém maximalizace účelové funkce $F(x)$ n reálných proměnných, která je definovaná na podmnožině R^n pomocí systému nerovností. Všeobecně lze algoritmus náhodného vyhledávání popsat vztahy

$$\begin{aligned}x(i+1) &= x(i) + \Delta x(i) \\ \Delta x(i) &= a_i \psi[i; \Delta F(i), x(i)] \xi_i \\ \Delta F(i) &= F(i) - F(i-1)\end{aligned}\tag{3.47}$$

První rovnice charakterizuje iterační postup metod, třetí rovnice se nazývá zpětná diference účelové funkce. Podle její hodnoty se určuje „zlepšení“ anebo „zhoršení“ účelové funkce. Prostřední rovnice charakterizuje vlastní strategii postupu. V této rovnici a_i udává velikost kroku, ψ je adaptační funkce, která nějakým nenáhodným způsobem hodnotí předcházející zkušenosti iteračního postupu a ξ_i je n-rozměrný náhodný vektor.

4 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

Nejhlouběji propracovaným a nejdéle zkoumaným odvětvím speciálních úloh matematického programování je lineární programování. Některé problémy vedoucí na tuto oblast se začali řešit už ve čtyřicátých letech. Charakteristickými vlastnostmi úloh lineárního programování je linearita účelové funkce a linearita omezení. První vlastnost můžeme vyjádřit skalárním součinem

$$f(x_1, \dots, x_n) = c^T x \quad (4.1)$$

druhá vlastnost se vyjadřuje vztahem

$$Ax \leq b \quad (4.2)$$

Potom můžeme rozlišovat čtyři základní typy úloh a to

$$a) \max c^T x \quad Ax \leq b \quad (4.3)$$

$$b) \min c^T x \quad Ax \leq b \quad (4.4)$$

$$c) \max c^T x \quad Ax \geq b \quad (4.5)$$

$$d) \min c^T x \quad Ax \geq b \quad (4.6)$$

Tvary, které se liší pouze max či min účelové funkce (při stejném otočení nerovností v omezení), lze jednoduše upravit na stejný tvar záměnou $\min c^T x$ za $\max(-c^T x)$.

Další variantou je úloha, když některá omezení musí být splněna jako rovnost. Úloha potom může mít tvar

$$\max f(x) = c^T x \quad (4.7)$$

při omezeních

$$\sum_{r=1}^n a_{ir} x_r \leq b_i \quad i = 1, \dots, p \quad (4.8)$$

$$\sum_{r=1}^n a_{jr} x_r = b_j \quad j = 1 + p, \dots, p + q \quad (4.9)$$

A poslední variantou je úloha, když jsou v omezeních kombinované všechny tři tvary a to

$$\sum_{r=1}^n a_{ir} x_r \leq b_i \quad i = 1, \dots, p \quad (4.10)$$

$$\sum_{r=1}^n a_{jr} x_r = b_j \quad j = 1 + p, \dots, p + q \quad (4.11)$$

$$\sum_{r=1}^n a_{kr} x_r \geq b_i \quad k = p+1, \dots, p \quad (4.12)$$

Nyní uvažujme úlohu ve tvaru (4.1), (4.2) při podmínkách nezápornosti. Dimenze polí necht' jsou:

$$\dim c = \dim x = n$$

$$\dim A = m \cdot n \quad m \leq n$$

Nejprve je třeba doplnit nerovnice na rovnice tak, že ke každé nerovnici přidáme novou nezápornou proměnnou x_j ; $j=n+1, \dots, m+n$. Dostaneme tak soustavu lineárních algebraických rovnic ve tvaru

$$\tilde{A}\tilde{x} = b \quad (4.13)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

nezákladní

proměnné

základní

proměnné

(4.14)

$$\tilde{x}^T = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$$

Soustava (4.13) reprezentuje m rovnic o $n+m$ neznámých a je v tzv. kanonickém tvaru. Základním řešením nazýváme takovou $(m+n)$ -tici čísel, kde jsou hodnoty základních proměnných rovné hodnotám pravých stran. Pro (4.13), (4.14) má základní řešení tvar

$$x^T = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$$

Toto řešení určitě nemaximalizuje pravou stranu (má prvních n složek nulových). Postup, který vyhledává optimum, je v hledání různých základních řešení tak, že se báze sloupce postupně prohazují. Počet kombinací těchto výměn je $\binom{m+n}{m}$. Mezi těmito řešeními je

třeba najít to, které maximalizuje. Toto řešení se nazývá optimální. Metoda získání všech základních řešení se nazývá eliminační. O řešení úloh lineárního programování platí dvě důležité věty.

Věta 1: „Vektor x je základním řešením úlohy, právě tehdy, když je krajním bodem množiny omezení“.

Věta 2: „Jestliže existuje optimální řešení úlohy lineárního programování, pak existuje i základní řešení této úlohy“.

Věty v zásadě říkají, že optimální řešení se nacházejí pouze na hranici konvexní množiny omezení. Úloha lineárního programování má řešení pro každý tvar.

4.1 Simplexová tabulka

Aby nebylo potřeba prohledávat všechna základní řešení, byl vypracován efektivní postup, podle kterého se dospěje k optimálnímu řešení ve směru největšího vzrůstu účelové funkce. Postup je známý pod označením metoda simplexové tabulky.

Sestavení simplexové tabulky spočívá v zapsání doplněné soustavy rovnic do tabulky.

Do posledního řádku tabulky se zapíší hodnoty účelové funkce s opačnými znaménky podle (Tab1).

Tab1: Simplexová tabulka

x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	omezení
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	...	0	b_1
...	...	...	...	...	...	...	...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	...	1	b_m
$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_m$	0	...	0	f

Nové základní řešení se hledá tak, že je třeba vyhledat klíčový sloupec a klíčový řádek. Jejich průsečík udává klíčový prvek, který se v dalším kroku eliminuje jako bázický, a tak určuje další základní řešení. Postupuje se do té doby, dokud je v řádku účelové funkce číslo se záporným znaménkem.

Za klíčový sloupec se vybírá ten, který má v řádku účelové funkce záporné číslo s největší absolutní hodnotou. Za klíčový řádek se vybírá ten, kde podíl pravé strany a prvku klíčového sloupce je nejmenší (vybírá se pouze z nezáporných podílů). Celý postup tvorby nového základního řešení v simplexové tabulce lze popsat následujícím algoritmem

1. sestavení simplexové tabulky
2. test optimality: jestliže $c_j \geq 0$, pak konec;
3. výběr největšího c_j se záporným znamínkem; tím je určený klíčový sloupec
4. výpočet $\beta_i, i = 1, \dots, m$ $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ij}}$, kde j udává klíčový sloupec
5. výběr nejmenšího β_i z nezáporných podílů; tím je určen klíčový řádek
6. eliminace klíčového prvku; tím je určeno nové základní řešení
7. skok na bod 2

5 DYNAMICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Dynamické programování je speciální úloha tzv. separovatelného programování, ve kterém se za jistých předpokladů úloha vícerozměrné optimalizace transformuje na postupnou jednorozměrnou optimalizaci. V dynamickém programování tuto myšlenku rozpracoval R. Bellman a metody dynamického programování našli široké uplatnění. Dynamickým programováním lze řešit úlohy statické i dynamické optimalizace. Základní myšlenkou úloh dynamického programování je tzv. Bellmanův princip optimality. Tento princip lze vyjádřit následující větou: „Optimální řazení na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je optimální bez ohledu na počáteční stav a na předchozí rozhodnutí“. Tento princip intuitivně říká, že optimální řešení je třeba hledat od konce.

5.1 Síťová forma dynamického programování

Na tomto typu úlohy je nejlépe vidět optimalizační princip. Na tento typ úlohy vedou rozličné typy úloh, nejčastěji problém dopravních nákladů. Úlohu lze formulovat takto: Z místa A do místa B je potřeba přepravit určitý náklad. K dispozici je mnoho způsobů, které tvoří síť cest mezi těmito místy. Dopravní náklady mezi libovolnými dvěma uzly jsou ohodnoceny podle jejich vzdálenosti a kvality cesty.

Tab2: Ukázka možného zadání síťové úlohy dynamického programování

	11	13	12	10	8	8	B
7	6 12	8 13	7 12	8 10	10 7	11 13	
8	7 10	8 8	9 9	9 8	10 10	11 12	
10	10 11	9 9	11 7	10 7	11 9	12 12	
11	9 12	10 11	12 10	13 9	14 13	14 14	
A							

Cílem úlohy je potom najít v síti cestu s nejnižšími celkovými náklady, tj. matematicky najít minimum funkce

$$f = s_{Aj} + s_{jk} + \dots + s_{mB} \quad (5.1)$$

kde s_{ij} jsou náklady při přepravě z i -tého do j -tého uzlu.

Při řešení takovéto úlohy se postupuje podle Bellmanova principu optimality od koncového bodu B. V k -tém kroku se určí cesta z uzlu, který je od koncového místa B vzdálený o k úseků tak, aby náklady z tohoto uzlu do B byly minimální. Tímto způsobem se pokračuje až k bodu A. Mezi určenými cestami se nakonec vyznačí ta, která skutečně spojuje body A a B. Je zřejmé, že počet vyčíslení účelové funkce při použití Bellmanova principu optimality je mnohonásobně menší, než kdybychom prozkoumávali všechny varianty spojení bodů A a B. Optimální trajektorii se podaří nalézt pro libovolnou síť. Tato úloha má vždy řešení, které nemusí být jednoznačné. Může se stát, že optimální trajektorie se bude dát dosáhnout více způsoby. Úloha dynamického programování nemusí být zadána jen pravoúhlou sítí, ale například trojúhelníkovou. Princip výpočtu je však stejný. Síťové metody se kromě dopravních úloh používá např. při řešení kaskády chemických reaktorů v chemických technologiích, či při optimálním řízení letadel. I když postup vyhledávání je jednoduchý a přehledný, ve všeobecné případě se programuje obtížně. Většinou je třeba pro konkrétní úlohu vytvořit konkrétní program.

ZÁVĚR

Teorie optimalizace je matematickou disciplínou zabývající se určováním minimálních a maximálních hodnot funkcí při určitých omezujících podmínkách. Původně bylo vyšetřování extrémů klasickým tématem matematické analýzy s motivací přicházející z oblasti fyziky a dalších oblastí lidské činnosti. Později se objevily technické, ekonomické a vojenské aplikace. Rozvoj počítačů posunul řešení další řady úloh, které do té doby nebylo možné řešit na analytické úrovni. V jednotlivých kapitolách práce jsou přiblíženy různé typy optimalizačních, tedy extremalizačních úloh a metody jejich řešení. Jednotlivé metody používají při řešení různé druhy různě náročných postupů. Důraz je kladen na metody vhodné pro počítačovou aplikaci a vizualizaci. Analytické metody používají k výpočtům derivací a gradientů. Umožňují získat jak kvalitativní, tak i kvantitativní údaje a výsledky při změnách některých parametrů. Avšak při větším počtu proměnných a omezení na definiční obor roste složitost výpočtů potřebných k získání extrému a použití analytických metod se může stát nerealizovatelné. Tyto metody jsou vhodné především pro ruční individuální výpočty extrémů. Pro číslicové počítače se algoritmicky výhodnější jeví iterační (krokové) metody, které lze rozdělit na tři kategorie, na metody komparativní, gradientní a metody náhodného vyhledávání. Komparativní metody nevyžadují výpočet ani odhad derivací účelové funkce. Jejich jediným požadavkem je unimodalita (existuje pouze jeden extrém) a spojitost účelové funkce. Tyto metody jsou postaveny na principu výpočtu hodnot účelové funkce v určitých bodech pomocí daného algoritmu, jejich vzájemné komparace a tím nalezení extrému. Gradientní iterační metody používají diferenciálního počtu. V případech, kdy derivace nejsou známy, se pomocí numerické matematiky vypočítají jejich symetrické či nesymetrické odhady. Algoritmy pak využívají hodnot gradientů a Hessovy matice, z nichž stanovují hodnotu účelové funkce v daném bodě. metody se dle způsobu konvergence k extrému dělí na metody s krátkým a dlouhým krokem. Metody náhodného vyhledávání jsou v optimalizačních metodách specifickou třídou. jejich algoritmus je založený tak, že iterační přírůstek v jednotlivých krocích, je závislý na náhodně generované veličině. Lze je rozdělit na striktně náhodné metody a metody s adaptací neboli s učením. Konvergence algoritmu se nedá zaručit, avšak někdy jsou tyto metody efektivnější než deterministické. Všechny iterační metody mají uplatnění hlavně při použití na číslicových počítačích. Metody lineárního a dynamického programování jsou nejvíce algoritmicky propracované úlohy matematického programování.

jejich řešení má velké praktické aplikace. Mezi typické úlohy patří optimalizace výrobních plánů, různé úlohy optimalizace dělení materiálů a řešení dopravních plánů. Algoritmy jsou postaveny na využití numerických metod řešení soustav lineárních rovnic.

Podle této klasifikace byly v práci vypracovány následující výsledky. V první řadě byla vytvořena sada slidů v prostředí Power Point a www stránek. Těchto výstupů bude využito jako studijních opor v distanční a kombinované formě studia. Jako další výsledek lze uvést řadu vzorových příkladů a protokolů, ve kterých jsou ilustrovány postupy a algoritmy mnoha optimalizačních úloh. V poslední řadě je to vlastní teoretický text práce, který může sloužit studentům jako forma studijního textu.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] PROKOP, R. : *Teória systémov a optimalizácia*, CHTF STU Bratislava, 1990
- [2] MAŇAS, M.: *Optimalizační metody*, SNTL Praha, 1979
- [3] BRUNOVSKÁ, A.: *Malá optimalizácia*, Alfa, Bratislava, 1990
- [4] *Statická optimalizace*, Dostupný z URL:
< [www.fs.vsb.cz/books/ statickaoptimalizace](http://www.fs.vsb.cz/books/statickaoptimalizace) >
- [5] *Metody operačního výzkumu*, Dostupný z URL:
< www1.osu.cz/studium >

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

$\mathbf{b}$	vektor omezujících konstant
$\nabla f(\mathbf{x})$	gradient funkce
$\mathbf{g}(\mathbf{x})$	vektor omezujících funkcí
$\mathbf{H}, \nabla^2 f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$	Hessova matice
$\mathbf{J}$	Jacobiova matice
$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$	Lagrangeova funkce
$\mathbf{p}$	Lagrangeův multiplikátor
$Q(\Delta \mathbf{x})$	kvadratická forma příslušné Hessovy matice
$\mathbb{R}^n$	n-rozměrný prostor
X	množina přípustných řešení

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Vybrané funkce a jejich derivace.....	12
Obr. 2: Ostrá lokální minima účelových funkcí.....	13
Obr. 3: Extrémy funkcí více proměnných.....	16
Obr. 4: Omezení rovností.....	18
Obr. 5: Aktivní omezující nadplochy.....	24
Obr. 6: Rozdělení intervalu v Metodě zlatého řezu	26
Obr. 7: Princip metody zlatého řezu	26
Obr. 8: Dělení intervalu u Fibonacciho metody.....	28

SEZNAM TABULEK

Tab1: Simplexová tabulka	40
Tab2: Ukázka možného zadání síťové úlohy dynamického programování	42

SEZNAM PŘÍLOH

P I : Gradientní metoda s krátkým krokem

P II : Fibonacciho metoda

P III : Boxova-Wilsonova metoda

P IV : Metoda cyklické záměny parametrů

P V : Lineární programování

P I : GRADIENTNÍ METODA S KRÁTKÝM KROKEM

Najděte maximum funkce $f(x, y) = x + y - xy - x^2 - y^2$,

při parametru $\lambda = \frac{1}{2}$

Ruční řešení

$$x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad f(x(1)) = 0,25$$

$$x(2) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} \quad f(x(2)) = 0,312$$

$$x(3) = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3125 \\ 0,3125 \end{pmatrix} \quad f(x(3)) = 0,332$$

$$x(4) = \begin{pmatrix} 0,3125 \\ 0,3125 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0,0625 \\ 0,0625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,34375 \\ 0,34375 \end{pmatrix} \quad f(x(4)) = 0,333$$

$$x(5) = \begin{pmatrix} 0,34375 \\ 0,34375 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -0,03125 \\ -0,03125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,328125 \\ 0,328125 \end{pmatrix} \quad f(x(5)) = 0,333$$

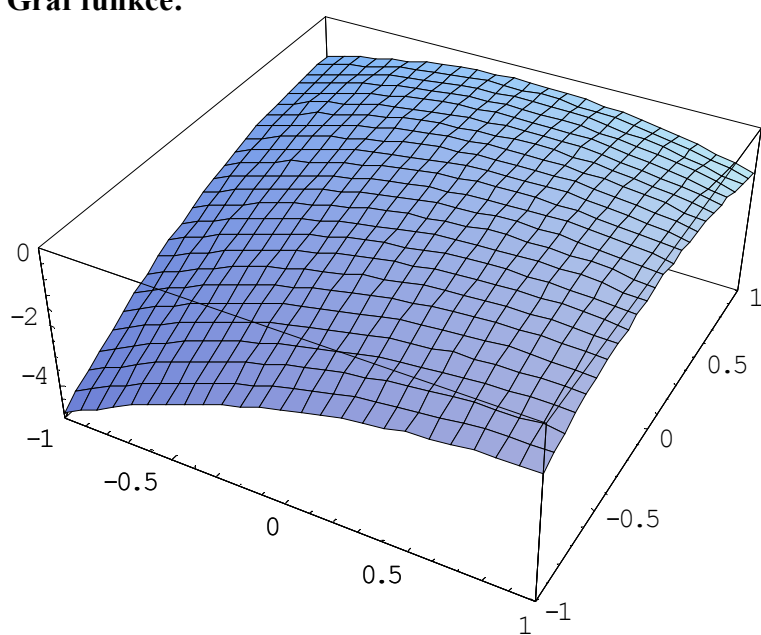
...

Zdrojový kód programu Mathematica

```
f=x+y-xy-x^2-y^2;
xx=D[f,x];
yy=D[f,y];
a=0.5;c=0;q=0;x=0;
n=1000;
y=0;
For[i=1;p=0,i<n,bb={{x},{y}}+a*{{xx},{yy}};
  x=bb[[1,1]];
  y=bb[[2,1]];
  xxxx={{bb[[1,1]],bb[[2,1]]}+a*{{xx},{yy}};
  bb=xxxx;q=f*n;q=Round[q];
If[q!=c,i=i,i=n];c=f*n;c=Round[c];
  TableForm[Print[f]];
  i++;p++];
Print[p];Clear[x];Clear[y];Clear[p];
Plot3D[f,{x,-10,10},{y,-10,10}]
```

Extrému při daném parametru λ dosahujeme po 5. kroku. Musíme dát pozor na velikost parametru λ , aby nedošlo k přeskočení extrému a tím k zacyklení programu.

Graf funkce:



P II : FIBONACCIHO METODA

Najděte maximum funkce $f(x) = -x^2 - 3x$
na intervalu $\langle -2; 0 \rangle$

Ruční řešení

$$d_1=2 \quad N=4$$

$$\alpha_1 = -2 \quad \beta_1 = 0$$

1.krok

$$\tilde{\alpha}_2 = 0 - \frac{5}{8} \cdot 2 = -\frac{5}{4}$$

$$\tilde{\beta}_2 = -2 + \frac{5}{8} \cdot 2 = -\frac{3}{4}$$

$$f(\tilde{\beta}_2) = 1,68 \quad f(\tilde{\alpha}_2) = 2,18$$

$$f(\alpha_2) > f(\beta_2) \rightarrow \alpha_2 = -2$$

$$\beta_2 = -0,75$$

...

4. krok

$$\tilde{\alpha}_5 = -1,5 \quad \tilde{\beta}_5 = -1,5$$

$$f(\tilde{\alpha}_5) = f(\tilde{\beta}_5) \rightarrow \alpha_5 = -1,5$$

$$\beta_5 = -1,25$$

Zdrojový kód programu Mathematica

$$q[j] = -j^2 - 3j;$$

$$N1=4;$$

$$F1=\{1,2,3,5,8\};$$

$$a=-2;$$

$$b=-0;$$

$$e=0.1;$$

$$k = \frac{b-a}{e};$$

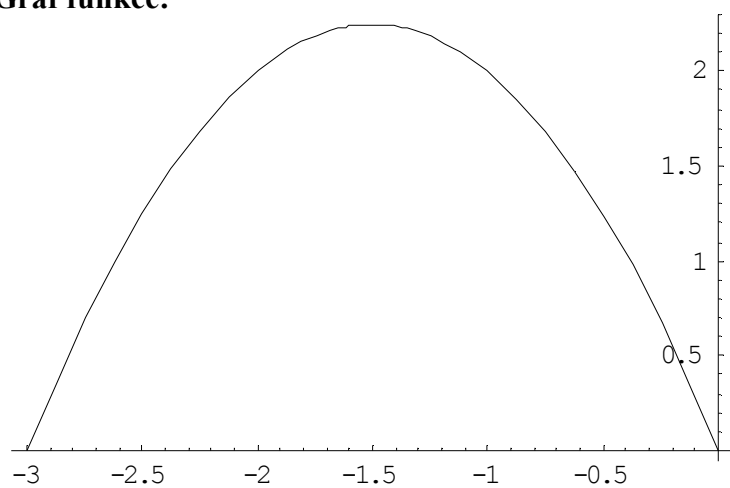
$$\text{For}[i=1, i < N1+1, A = b - \frac{F1[[N1-i+1]]}{F1[[N1-i+2]]} * Abs[b-a];$$

$$B = a + \frac{F1[[N1-i+1]]}{F1[[N1-i+2]]} * Abs[b-a]; \text{VA} = q[A];$$

$$\text{VB} = q[B]; \text{If}[\text{VA} > \text{VB}, a = a; b = B, a = A; b = b]; \text{Print}[i, i++]; \text{Int} = \{a, b\}; \text{Print}["interval->", \text{Int}];$$

$$\text{Plot}[q[j], \{j, -3, 0\}]$$

Maximum se nachází na intervalu $\langle -1,5; -1,25 \rangle$.

Graf funkce:

P III : BOXOVA-WILSONOVA METODA

Najděte maximum funkce $f(x, y) = x + y - xy - x^2 - y^2$

Počáteční bod středu $\{0;0\}$

Délka strany $a=0,015$

Ruční řešení

souřadnice bodů	hodnoty účelové funkce
$S=\{0;0\}$	$F(S)=0$
$M1=\{0,015;0,015\}$	$F(M1)=0,029325$
$M2=\{0,015;-0,015\}$	$F(M2)=-0,000225$
$M3=\{-0,015;0,015\}$	$F(M3)=-0,000225$
$M4=\{-0,015;-0,015\}$	$F(M4)=-0,030675$
...	
...	

Zdrojový kód programu Mathematica

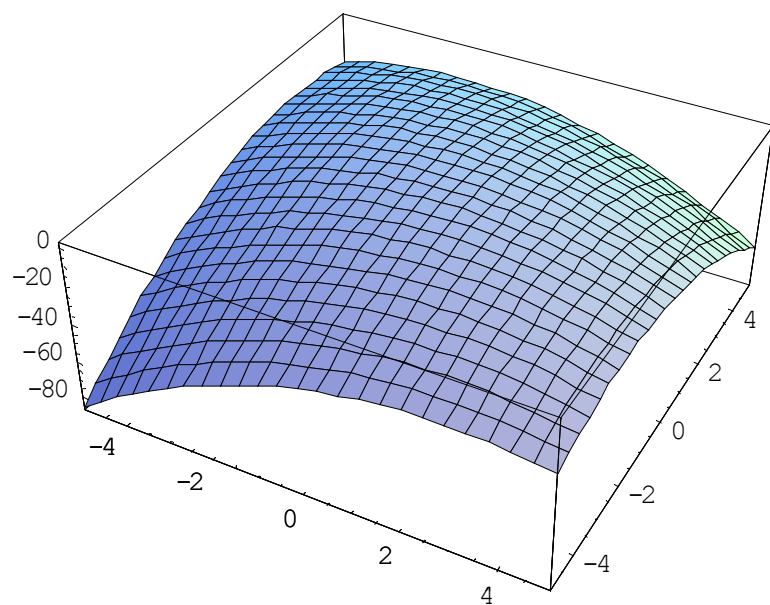
```

F[x_,y_]:=-x^2-y^2-x*y+x+y;
sx={0};
sy={0};
a=0.015;i=0;krok=0;
While[i<1,x={sx[[1]]+0.5*a,sx[[1]]+0.5*a,sx[[1]]-0.5*a,sx[[1]]-0.5*a};
  y={sy[[1]]+0.5*a,sy[[1]]-0.5*a,sy[[1]]+0.5*a,sy[[1]]-0.5*a};
  fs=F[sx[[1]],sy[[1]]];
  f1=F[x[[1]],y[[1]]];
  f2=F[x[[2]],y[[2]]];
  f3=F[x[[3]],y[[3]]];
  f4=F[x[[4]],y[[4]]];
  funkce={f1,f2,f3,f4};
  m=Position[funkce,Max[funkce]];
  mm=m[[1,1]];
  If[Max[funkce]>fs,sx={x[[mm]]};sy={y[[mm]]};,i=10;Print["maximum je
",fs];krok++;]Print[krok];
Plot3D[F[x,y],{x,-5,5},{y,-5,5}]

```

Hodnota maxima je 0,3333 a dosáhneme jí po 45. kroku.

Graf funkce:



P IV : METODA CYKICKÉ ZÁMĚNY PARAMETRŮ

Najděte maximum funkce $f(x, y) = 16x + 12y - 2x^2 - y^2$

Počáteční bod $\{0;0\}$

Ruční řešení

$$f(0 + \alpha; 0) = 16\alpha - 2\alpha^2$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 16 - 4\alpha = 0 \quad \alpha = 4$$

$$f(4; 0 + \beta) = 32 + 12\beta - \beta^2$$

$$\frac{df}{d\beta} = 12 - 2\beta = 0 \quad \beta = 6$$

postup opakujeme z bodu $\{4;6\}$

$$f(4 + \alpha; 6) = 68 - 2\alpha^2$$

$$\frac{df}{d\alpha} = -4\alpha = 0 \quad \alpha = 0$$

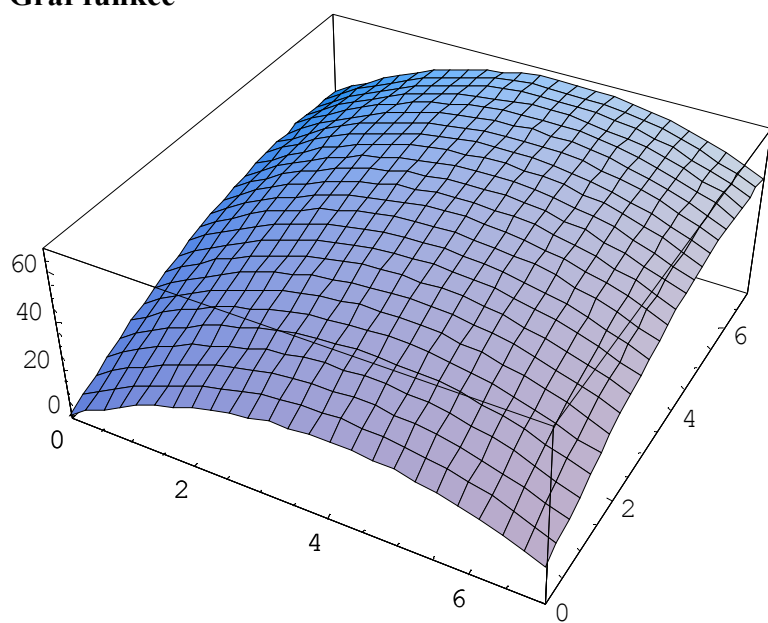
$$f(4; 6 + \beta) = 68 - \beta^2$$

$$\frac{df}{d\beta} = -2\beta = 0 \quad \beta = 0$$

Po druhém kroku je přírůstek nulový, tudíž maxima dosahujeme již po 1. kroku v bodě $\{4,6\}$

Zdrojový kód programu Mathematica

```
F[x_,y_]:=16x+12y-2x^2-y^2
xx=0;
yy=0;
i=0;
krok=0;
While[i<1,krok++;
  a=F[xx+x,yy];
  dfx=∂xa;
  x1=Resolve[dfx==0,x];
  xx=x1[[2]];
  b=F[xx,yy+y];
  dfy=∂yb;
  y1=Resolve[dfy==0,y];
  yy=y1[[2]];
  Print[xx,";",yy];If[xx ≠ 0||yy ≠ 0,i=0,i=2;]
]
Plot3D[F[x,y],{x,0,7},{y,0,7}]
```

Graf funkce

P V : LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ**Zadání formou tabulky**

	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	Omezení
Surovina S	2	0	1	1	2	≤120
Stroj Z1	0,5	1	2	0	0	≤200
Stroj Z2	1	2	0	1	0,5	≤400
Zisk	15	5	10	10	30	

Označíme množství produktů V₁,...,V₅ proměnnými x₁,...,x₅ a půjde o maximalizaci účelové funkce

$$f(x) = 15x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 30x_5$$

Při omezeních

$$2x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 120$$

$$0,5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 200$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 + 0,5x_5 \leq 400$$

Simplexová tabulka

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	
2	0	1	1	2	1	0	0	120
0,5	1	2	0	0	0	1	0	200
1	2	0	1	0,5	0	0	1	400
-15	-5	-10	-10	-30	0	0	0	0

Řešení pomocí simplexové tabulky

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	
1	0	0,5	0,5	1	0,5	0	0	60
0,5	1	2	0	0	0	1	0	200
0,5	2	-0,25	0,75	0	-0,25	0	1	370
15	-5	5	5	0	15	0	0	1800
1	0	0,5	0,5	1	1	0	0	60
0,25	0	2,125	-0,375	0	0,25	1	-0,25	15
0,25	1	-0,125	0,375	0	-0,125	0	0,5	185
16,25	0	4,375	6,875	0	14,375	0	2,5	2725

Odečtení výsledných hodnot:

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈
0	185	0	0	60	0	15	0

Význam hodnot X₆ a X₈ znamená, že první a třetí omezení jsou vyčerpána beze zbytku. Hodnota X₇ znamená, že druhé omezení je nedočerpáno o 15. Hodnota účelové funkce je 2725 při 185 jednotkách V₂ a 60 jednotkách V₅

Zdrojový kód programu Mathematica:

```

p = {{2, 0, 1, 1, 2, 120}, {0.5, 1, 2, 0, 0, 200}, {1, 2, 0, 1, 0.5, 400},
{15, 5, 10, 10, 30, 0}};
ien = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {0, 0, 0}};
inv = {{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1}};
ccc = Transpose[{p[[All, 1]], p[[All, 2]], p[[All, 3]], p[[All, 4]], p[[All, 5]],
ien[[All, 1]], ien[[All, 2]], ien[[All, 3]], p[[All, 6]]}];
z = ccc*inv;
For[v = 0, v < 10,
  m = Position[z, Min[z]];
  x = m[[1, 2]];
  xx = z[[All, x]]; podil = {0, 0, 0};
  For[p = 1, p < 3, If[
z[[p, x]] ≤ 0, podil[[p]] = ∞; p++, podil[[p]] = z[[p, 9]]/z[[p, x]]; p++];
  qq = Position[podil, Min[podil]];
  q = qq[[1, 1]];
  z[[q]] = z[[q]]/z[[q, x]];
  For[i = 1, i < 5, If[i ≠ q, h = z[[q]]; hhh = z[[i, x]]*h;
    z[[i]] = z[[i]] - hhh; z[[i]] = z[[i]];
  ]; i++]; xxx = Min[z[[4, All]]];
  If[xxx < 0, v = v, v = 11]; v++];
MatrixForm[z]

```

Výstupem programu je konečná podoba simplexové tabulky, ze které odečteme výsledky.