



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta technologická
Institut informačních technologií

**ŘÍZENÍ SYSTÉMU S DOPRAVNÍM ZPOŽDĚNÍM S
VYUŽITÍM PADÉHO APROXIMACE**

Bakalářská práce

2005

Petr Jurák

Děkuji vedoucímu diplomové práce panu Ing. Martinu Tomašíkovi, za odborné vedení, rady a připomínky, které mi poskytoval při řešení diplomové práce.

Souhlasím s tím, že s výsledky mé práce může být naloženo podle uvážení vedoucího diplomové práce a ředitele ústavu. V případě publikace budu uveden jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé diplomové práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně dne 6.9.2005

.....

podpis diplomanta

RESUMÉ

Bakalářská práce se zabývá použitím a rozбором aplikace Padého aproximace prvního a druhého řádu při řízení systémů s dopravním zpožděním. Je zde popsán postup při syntéze regulátorů pomocí polynomiální metody ve 2DOF konfiguraci při zajištění asymptotického sledování referenčního signálu a kompenzace poruchy vstupujících do systému řízení.

V bakalářské práci jsou dále odvozeny regulátory pro zadané stabilní systémy 1. řádu s dopravním zpožděním za použití výše popsaných metod. Pro tyto systémy jsou pak odvozeny podmínky pro přípustnou volbu pólů uzavřeného regulačního obvodu, kdy je požadována stabilita výsledných regulátorů.

Na základě teoretických a vypočtených poznatků byl vytvořen simulační program pro ověření výsledků.

SUMMARY

The diploma work deals with use and analysis application Pade's approximation first and second code at control systems with time delay. There is describe procedure during the synthesis of regulators support polynomial method in the 2DOF configuration at the resource asymptotic monitoring of reference signal and compensation of the trouble enter to the control proceeding.

In the diploma work are further derived regulators for order stable systems of the first code with time delay by use height described methods. For these systems are then derived condition for admissible selection pole closed regulation circuit, when is demand stability of resultant regulators.

On the basic theoretical and calculate information were created simulative programme for authentic results.

OBSAH

ÚVOD	7
1 TEORETICKÁ ČÁST	8
1.1 METODY ELIMINACE DOPRAVNÍHO ZPOŽDĚNÍ.....	8
1.1.1 Aproximace přenosů dopravního zpoždění.....	8
1.2 POPIS VLASTNOSTI SYSTÉMU.....	9
1.3 SYNTÉZA ŘÍZENÍ POMOCÍ POLYNOMIÁLNÍ METODY	10
1.3.1 2DOF konfigurace systému řízení	11
2 VOLBA PÓLŮ UZAVŘENÉHO REGULAČNÍHO OBVODU	16
3 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST	18
3.1 SOUSTAVA ČÍSLO 1	18
3.2 SOUSTAVA ČÍSLO 2	20
3.3 SOUSTAVA ČÍSLO 3	22
3.4 SOUSTAVA ČÍSLO 4	24
4 SIMULAČNÍ ČÁST	27
4.1 TVORBA PROGRAMŮ PRO SIMULAČNÍ EXPERIMENTY	27
4.2 SOUSTAVA ČÍSLO 1	29
4.3 SOUSTAVA ČÍSLO 2	31
4.4 SOUSTAVA ČÍSLO 3	33
4.5 SOUSTAVA ČÍSLO 4	35
ZÁVĚR	37
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	39
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	40
SEZNAM OBRÁZKŮ	41

ÚVOD

Systémy reagující na změnu jednotkového skoku s určitou časovou prodlevou se nazývají systémy s dopravním zpožděním. Dopravní zpoždění lze definovat jako dobu, která uplynula od chvíle, kdy do soustavy vstoupil vstupní signál, až do okamžiku kdy lze na výstupu ze soustavy poprvé zaznamenat reakci výstupní veličiny na tento vstupní signál. Charakteristika určité soustavy nám udává dopravní zpoždění přenosu systému.

Pro systém řízení je základní podmínkou jeho stabilita a stabilitu zajišťující regulátory, které nazýváme stabilizující regulátory.

V téhle bakalářské práci se zabývám řešením systémů s dopravním zpožděním pomocí Padého aproximace. Popisuji zde postup při syntéze regulátorů pomocí polynomiální metody ve 2DOF konfiguraci při zajištění asymptotického sledování referenčního signálu a kompenzace poruchy.

V další části odvozuji regulátory pro zadané stabilní systémy 1. řádu s dopravním zpožděním za použití výše popsaných metod. Pro tyto systémy pak dále odvozuji podmínky pro přípustnou volbu pólů uzavřeného regulačního obvodu, kdy je požadována stabilita výsledných regulátorů.

Všechny teoretické a vypočtené poznatky byly následně ověřeny simulačními experimenty, jejichž výsledky tvoří poslední kapitulu bakalářské práce. S provedením simulačních experimentů také souvisí vytvoření potřebných programových prostředků v prostředí MATLAB, jejichž struktura a tvorba je také zkráceně popsána.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 METODY ELIMINACE DOPRAVNÍHO ZPOŽDĚNÍ

Dopravní zpoždění regulované soustavy se projeví zpožděním výstupního signálu vzhledem k časovému působení vstupního signálu a to právě o hodnotu T_d . Přenos dopravního zpoždění v systému je definován pomocí vztahu (1)

$$E(s) = e^{-T_d s} \quad (1)$$

, kde je: T_d – dopravní zpoždění [s], $T_d \geq 0$

s – komplexní proměnná v L-transformaci [s^{-1}]

Dopravní zpoždění posunuje přechodovou charakteristiku (výstupní signál) o hodnotu T_d a tvar přechodové charakteristiky systému zůstává stejný jako v případě bez dopravního zpoždění. Pro řešení regulátoru pro soustavu s dopravním zpožděním je třeba kvůli stabilitě uzavřeného regulačního obvodu (URO) nejdříve eliminovat vliv tohoto dopravního zpoždění. Tato eliminace se provádí několika způsoby. Mezi ně patří využití metody aproximace dopravního zpoždění, které je dále rozvedeno.

1.1.1 Aproximace přenosů dopravního zpoždění

Pro návrh regulátoru regulačního obvodu pomocí metody řešení polynomiálních diofantických rovnic je zapotřebí nejprve pomocí vybraných aproximací přenosů dopravního zpoždění zjistit aproximovanou přenosovou funkci regulovaného systému. Pro aproximaci přenosu čistého dopravního zpoždění (1) budu uvažovat Padého aproximaci 1. a 2. řádu.

Padého aproximace

Pro náhradu přenosu dopravního zpoždění (1) lze použít Padého aproximace, která je Taylorovým rozvojem polynomu jak ve jmenovateli, tak i v čitateli. Rozvoj polynomu je znázorněn v (2).

$$e^{-T_d s} = \frac{e^{-\frac{T_d s}{2}}}{e^{\frac{T_d s}{2}}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \cdot \left(\frac{T_d}{2} s\right)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{T_d}{2} s\right)^k} \quad (2)$$

Z rozvoje polynomu (2) a po následných úpravách dostaneme Padého aproximaci dopravního zpoždění 1. řádu (3) a 2. řádu (4).

$$e^{-T_d s} \approx \frac{2 - T_d s}{2 + T_d s} \quad (3)$$

$$e^{-T_d s} \approx \frac{12 - 6T_d s + T_d^2 s^2}{12 + 6T_d s + T_d^2 s^2} \quad (4)$$

1.1 POPIS VLASTNOSTI SYSTÉMU

Chování spojitého systému s jednou vstupní a výstupní veličinou lze popsat lineární diferenciální rovnicí s konstantními součiniteli ve tvaru:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \quad (5)$$

, kde a_i, b_i jsou konstantní koeficienty.

$u(t)$ – vstupní veličina

$y(t)$ – výstupní veličina systému

Z podmínky fyzikální realizovatelnosti systému musí platit nerovnost $m \leq n$

tzn. že stupeň nejvyšší derivace výstupní veličiny musí být větší nebo roven stupni derivace vstupní veličiny. Řád diferenciální rovnice n určuje řád systému.

Základním popisem každého lineárního dynamického systému je jeho **přenos**. Přenos systému je definován jako poměr Laplaceova obrazu výstupní veličiny k Laplaceově obrazu vstupní veličiny při nulových počátečních podmínkách systému $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0$ a vstupního signálu $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(m-1)}(0) = 0$.

Lineární diferenciální rovnici s konstantními součiniteli (1) můžeme transformovat použitím pravidel Laplaceovy transformace a splnění výše uvedených podmínek:

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] U(s).$$

Z této rovnice podle výše uvedené definice má **přenos systému** tvar:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad (6)$$

Přenos $G(s)$ je racionální lomenou funkcí v komplexní proměnné s . Ryzost přenosové funkce vyjadřujeme pomocí stupňů polynomů $a(s)$ a $b(s)$. Platí-li $\deg b \leq \deg a$, mluvíme o **ryzí přenosové funkci**. Pokud platí pouze nerovnost $\deg b < \deg a$, je **přenosová funkce striktně ryzí**. Zkratka $\deg$ znamená stupeň polynomu.

Póly přenosu jsou kořeny charakteristického polynomu $a(s)$, tedy kořeny charakteristické rovnice $a(s) = 0$.

Nulami přenosu rozumíme kořeny polynomu čitatele přenosu $b(s)$, tj. kořeny rovnice $b(s) = 0$.

Řád přenosu určuje stupeň polynomu jmenovatele přenosu, tudíž stupeň polynomu $a(s)$. Tedy systém 2. řádu bude mít ve jmenovateli přenosu polynom 2. stupně.

Relativní řád systému je rozdíl mezi stupni polynomu jmenovatele a polynomu čitatele přenosu:

$$\deg a - \deg b \quad (7)$$

Stabilita systému je jednou z nejdůležitějších vlastností systémů. Klasickým přístupem bylo sledování stability na základě volné odezvy systému na nenulový počáteční stav. V poslední době se uplatňuje obecnější pohled na stabilitu systému, tzv. BIBO stabilita (Bounded Input, Bounded Output). Stabilním systémem ve smyslu BIBO stability se rozumí systém, jehož odezvou na omezený vstup je omezený výstup. Dalším pohledem na stabilitu systému je **silná stabilita**. Systém je stabilní ve smyslu silné stability, jestliže mimo stability systému řízení je vyžadována i stabilita regulátoru (mimo přítomnosti integrační složky). Více o splnění podmínky silné stability je uvedeno v bodu 1.4.

1.2 SYNTÉZA ŘÍZENÍ POMOCÍ POLYNOMIÁLNÍ METODY

Aplikace polynomiální metody při návrhu systémů řízení vede k řešení polynomiálních diofantických rovnic. Tvar těchto rovnic závisí na zvolené konfiguraci systému řízení, jejíž volbou lze zajistit požadovaný průběh řízení a ovlivnit velikost akčních zásahů. V této kapitole se budu věnovat popisu třech vybraných konfigurací řízení a odvození rovnic

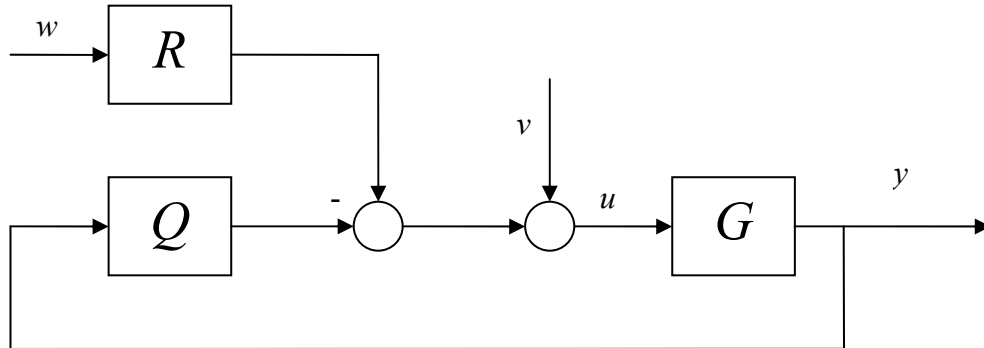
potřebných pro návrh regulátorů s námi požadovanými vlastnostmi. Nejdůležitější požadavky na vlastnosti regulačního obvodu jsou:

- stabilita systému řízení
- fyzikální realizovatelnost (vnitřní ryzost)
- asymptotické sledování referenčního signálu
- úplná kompenzace poruchy

Polynomiální metoda nám narozdíl od metod klasických určí jak strukturu regulátorů, tak i vztahy pro výpočet jejich parametrů.

1.1.1 2DOF konfigurace systému řízení

Tato konfigurace používá kromě zpětnovazebního regulátoru i regulátor přímovazební. 2DOF znamená two degrees of freedom, tedy systém se dvěma stupni volnosti. Struktura regulačního obvodu v této konfiguraci je zobrazena na Obr. 1.



Obr. 1. 2DOF konfigurace systému řízení

Signály a symboly:

R – přenos přímovazebního regulátoru

Q – přenos regulátoru

G – přenos regulované soustavy

v – poruchová veličina na vstupu do systému

u – akční zásah

w – žádaná hodnota (referenční signál)

y – řízený výstup

Přenosové funkce:

- a) přenos zpětnovazebního regulátoru

$$Q(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \quad (8)$$

, kde $q(s)$ a $p(s)$ jsou nesoudělné polynomy v komplexní proměnné s a platí $\deg q \leq \deg p$

- b) přenos přímovazebního regulátoru

$$R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \quad (9)$$

, kde $r(s)$ a $p(s)$ jsou nesoudělné polynomy v komplexní proměnné s a platí $\deg r \leq \deg p$

Obrazy vstupních signálů:

- a) obraz referenčního signálu

$$W(s) = \frac{h_w(s)}{f_w(s)} \quad (10)$$

, kde platí $\deg h_w \leq \deg f_w$

- b) obraz poruchové veličiny

$$V(s) = \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \quad (11)$$

, kde platí $\deg h_v \leq \deg f_v$

V systému může nastat více poruchových veličin, ať už poruchy vložené na výstup

$$Y(s) = G(s).U(s) \quad (12)$$

$$U(s) = R(s).W(s) - Q(s).Y(s) + V(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \cdot W(s) - \frac{q(s)}{p(s)} \cdot Y(s) + V(s) \quad (13)$$

Dosazením (6) a (13) do (12) a následnou úpravou dostaneme:

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \cdot \left[\frac{r(s)}{p(s)} \cdot W(s) - \frac{q(s)}{p(s)} \cdot Y(s) + V(s) \right]$$

$$\left[1 + \frac{b(s).q(s)}{a(s).p(s)} \right] Y(s) = \frac{b(s).r(s)}{a(s).p(s)} \cdot W(s) + \frac{b(s)}{a(s)} \cdot V(s)$$

$$Y(s) = \frac{b(s).r(s)}{a(s).p(s) + b(s).q(s)} \cdot W(s) + \frac{b(s).p(s)}{a(s).p(s) + b(s).q(s)} \cdot V(s) \quad (14)$$

Dosadíme (14) do vztahu $E(s) = W(s) - Y(s)$ a dostaneme:

$$E(s) = \left[1 - \frac{b(s).r(s)}{a(s).p(s) + b(s).q(s)} \right] W(s) - \frac{b(s).p(s)}{a(s).p(s) + b(s).q(s)} V(s) \quad (15)$$

Označíme

$$a(s).p(s) + b(s).q(s) = d(s) \quad (16)$$

Polynom $d(s)$ je charakteristický polynom systému.

Dosazením (16) do (14) a (15) dostaneme:

$$Y(s) = \frac{1}{d(s)} (b(s).r(s).W(s) + b(s).p(s).V(s)) \quad (17)$$

$$E(s) = \frac{d(s) - b(s).r(s)}{d(s)} \cdot W(s) - \frac{b(s).p(s)}{d(s)} \cdot V(s) \quad (18)$$

Stabilitu systému řízení zajišťuje zpětnovazební regulátor, jehož polynomy přenosu jsou dány řešením 1. polynomiální diofantické rovnice (16) - $a(s).p(s) + b(s).q(s) = d(s)$ - se stabilním polynomem $d(s)$ na pravé straně.

Pokud dosadíme do (18) za $W(s)$ a $V(s)$ vztahy (6) a (7), dostaneme následující rovnici:

$$E(s) = \frac{d(s) - b(s).r(s)}{d(s)} \cdot \frac{h_w(s)}{f_w(s)} - \frac{b(s).p(s)}{d(s)} \cdot \frac{h_v(s)}{f_v(s)} \quad (19)$$

Z (19) plyne, že pro zajištění **úplné kompenzace poruchy** musí být polynom $p(s)$ dělitelný jmenovatelem přenosu poruchy $f_v(s)$. Potom bude mít $p(s)$ tvar

$$p(s) = f_v(s) \cdot \tilde{p}(s) \quad (20)$$

a 1. polynomiální diofantická rovnice bude ve tvaru:

$$a(s).f_v(s).\tilde{p}(s) + b(s).q(s) = d(s) \quad (21)$$

Přenosy regulátorů pak budou mít tvar:

$$Q(s) = \frac{q(s)}{f_v(s).\tilde{p}(s)}, \quad R(s) = \frac{r(s)}{f_v(s).\tilde{p}(s)} \quad (22)$$

Z (19) dále plyne, že jmenovatel referenčního signálu $f_w(s)$ musí dělit polynom $d(s) - b(s).r(s)$, tj.

$$d(s) - b(s).r(s) = t(s).f_w(s) \quad (23)$$

Asymptotické sledování referenčního signálu je zajištěno přímovazební částí regulátoru, ve kterém čítec přenosu $r(s)$ je dán řešením 2. polynomiální diofantické rovnice ve tvaru

$$t(s).f_w(s) + b(s).r(s) = d(s) \quad (24)$$

Polynom $t(s)$ je neznámý pomocný polynom, který používáme při výpočtu, avšak do přenosu regulátoru nevstupuje.

Systém řízení bude vnitřně ryzí, jestliže přenosy všech prvků v systému budou ryzí, tj. platí:

$$\deg q \leq \deg(f_v \tilde{p}) = \deg f_v + \deg \tilde{p} \quad (25)$$

$$\deg b \leq \deg a \quad (26)$$

$$\deg r \leq \deg(f_v \tilde{p}) = \deg f_v + \deg \tilde{p} \quad (27)$$

$\deg$... stupeň polynomu

$$\deg d = \deg(af_v \tilde{p}) = \deg a + \deg f_v + \deg \tilde{p} \quad (28)$$

Plyne to z podmínek fyzikální realizovatelnosti (25) a (26). Při řešení porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin máme k dispozici počet rovnic

$$\deg d + 1 = \deg a + \deg f_v + \deg \tilde{p} + 1 \quad (29)$$

a z nich hledáme počet neznámých

$$\deg q + \deg \tilde{p} + 2 \quad (30)$$

Musí platit, že počet rovnic = počet neznámých, z čehož plyne:

$$\deg a + \deg f_v + \deg \tilde{p} + 1 = \deg q + \deg \tilde{p} + 2 \quad (31)$$

$$\Rightarrow \deg q = \deg a + \deg f_v - 1 \quad (32)$$

Dosazením (31) do (32) dostaneme stupeň polynomu $\tilde{p}(s)$:

$$\deg \tilde{p} \geq \deg a - 1 \quad (33)$$

V některých případech je však třeba (jak bude ukázáno později), aby $\deg \tilde{p} > \deg a - 1$. To lze ošetřit následovně:

$$\deg \tilde{p} \geq \deg a - 1 + k, \quad (34)$$

kde $k \geq 0$.

Potom

$$\deg d = \deg(af_v \tilde{p}) = 2 \deg a + \deg f_v - 1 + k \quad (35)$$

Při stanovení stupňů polynomů $r(s)$ a $t(s)$ vyjdeme z 2. polynomiální diofantické rovnice (44b). Při řešení porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin máme k dispozici počet rovnic

$$\deg d + 1 = \deg t + \deg f_w + 1, \quad (36)$$

z nichž hledáme počet neznámých

$$\deg t + \deg r + 2 \quad (37)$$

Musí platit, že počet rovnic = počet neznámých, z čehož plyne:

$$\deg t + \deg f_w + 1 = \deg t + \deg r + 2 \quad (38)$$

$$\Rightarrow \deg r = \deg f_w - 1 \quad (39)$$

Stupeň polynomu $t(s)$ určíme ze stupně charakteristického polynomu $d(s)$ porovnáním (35) a (36).

$$\begin{aligned} \deg d &= 2 \deg a + \deg f_v - 1 + k = \deg t + \deg f_w \\ \Rightarrow \deg t &= 2 \deg a + \deg f_v - \deg f_w - 1 + k \end{aligned} \quad (40)$$

a musí platit $\deg t \geq 0$. Zde je patrný význam konstanty k . Protože stupeň polynomu $t(s)$ nemůže být záporný, musíme volit konstantu k tak, abychom dostali alespoň $\deg t = 0$. Např. v případě, že máme soustavu 1. řádu ($\deg a = 1$), referenční signál je sinusový nebo rampa ($\deg f_w = 2$) a porucha má charakter bílého šumu ($\deg f_v = 0$), byl by stupeň polynomu $t(s)$ pro $k=0$ $\deg t = -1$, což není možné. Musíme tedy volit $k > 0$, což se projeví zvýšením stupně polynomu $\tilde{p}(s)$, resp. polynomu $p(s)$. Z toho nám plyne i podmínka pro volbu konstanty k :

$$k \geq \deg f_w + 1 - 2 \deg a - \deg f_v. \quad (41)$$

Pokud $\deg f_w + 1 - 2 \deg a - \deg f_v \leq 0$, pak volíme $k=0$. V případě, že $\deg f_w + 1 - 2 \deg a - \deg f_v > 0$, volíme $k = \deg f_w + 1 - 2 \deg a - \deg f_v$.

2 VOLBA PÓLŮ UZAVŘENÉHO REGULAČNÍHO OBVODU

Úloha přiřazení pólů řeší volbu pravé strany charakteristické rovnice, tedy volbu polynomu $d(s)$. V každém případě to musí být stabilní polynom, který má obecně tvar:

$$d(s) = \prod_{i=1}^{\deg d} (s + s_i), \quad (42)$$

kde $s_i = \alpha_i + j\omega_i$ a $\alpha_i > 0$ pro všechna i . Pokud $\omega_i = 0$ pro všechna i (tj. volíme jen reálné póly), získáme aperiodický (nekmitavý) charakter regulačního pochodu. V případě volby komplexně sdružených pólů obdržíme kmitavý regulační pochod. Volbou reálné a imaginární části pólů zajistíme požadovaný průběh regulačního pochodu, tj. dobu regulace a překmit. Přístupů k volbě pólů je známých mnoho, liší se především podle typu soustavy, kterou chceme řídit. Odlišná je tedy volba pólů pro stabilní a nestabilní soustavy, stejně jako pro soustavy s minimální či neminimální fází. Dalším problémem je, zda zvolit jeden násobný kořen, či několik různých reálných či imaginárních kořenů a jak stanovit vztah mezi těmito kořeny. Další z možností je zvolit jako část polynomu $d(s)$ přímo prvek z přenosu regulované soustavy, např. polynom $a(s)$ či jeho část. V této kapitole uvedu několik možností volby charakteristického polynomu, a to z hlediska typu soustavy.

A: Násobné póly

Tento typ charakteristického polynomu má tvar:

$$d(s) = (s + \alpha)^n, \quad (43)$$

kde $n = \deg d$ a platí $\alpha > 0$.

Volba jednoho několikanásobného pólu je použitelná jen u stabilních soustav a i přesto neposkytuje nejlepší výsledky. Volba pólu α je problematická a volí se na základě zkušeností a simulačního ověření chování obvodu. Příliš velké α vede na velké parametry polynomu $q(s)$, což má za následek nepřiměřené akční zásahy, tzv. wind-up efekt. Protože se parametry regulované soustavy mohou při adaptivním řízení měnit, je vhodné adaptovat i α .

Zlepšení kvality regulace lze dosáhnout volbou dvou několikanásobných pólů. Polynom $d(s)$ pak bude vypadat takto:

$$d(s) = (s + \alpha_1)^k \cdot (s + \alpha_2)^{n-k}, \quad \alpha_i > 0 \quad (44)$$

Neexistuje ovšem žádná metoda, jak explicitně vypočítat vztah mezi α_1 a α_2 , takže jejich volba musí být ověřena simulačně.

Samozřejmě by bylo možno zvolit si ještě více násobných pólů, ale protože neexistuje žádná metoda, která by stanovila jejich vzájemný poměr, jejich volba je spíše otázkou štěstí a zkušenosti. Nalezení takových hodnot α_i , které by významně zlepšily kvalitu regulace, může být navíc velmi zdlouhavé a pracné a nakonec se ani nemusí podařit. Z těchto důvodů se obvykle více než 2 různé póly nevolí.

B: Polynom $a(s)$ v kombinaci s násobným pólem

Tato volba je možná pouze u stabilních soustav, tj. u soustav se stabilním polynomem $a(s)$ ve jmenovateli přenosu. Polynom $d(s)$ je pak složen ze dvou částí a má tvar:

$$d(s) = a(s)(s + \alpha)^j, \quad (45)$$

kde $j = \deg d - \deg a$. Pro násobný pól opět platí podmínka $\alpha > 0$, jinak by polynom $d(s)$ nebyl stabilní.

C: Polynom $n(s)$ v kombinaci s násobným pólem

Polynom $d(s)$ v tomto tvaru lze použít u nestabilních soustav a vypadá následovně:

$$d(s) = n(s)(s + \alpha)^j, \quad (46)$$

kde $j = \deg d - \deg a$ a $\alpha > 0$. Polynom $n(s)$ je stabilní polynom získaný spektrální faktorizací

$$n^*(s)n(s) = a^*(s)a(s), \quad (47)$$

kde hvězdička představuje konjugovaný polynom, tzn.

$$n^*(s) = n(-s) \text{ a } a^*(s) = a(-s) \quad (48)$$

a platí $\deg n = \deg a$.

Takováto volba polynomu $d(s)$ stabilizuje i nestabilní soustavy a při výpočtu vede ke stabilnímu regulátoru. Obecně platí, že stabilizovat kořeny polynomu $a(s)$ můžeme spektrální faktorizací dle rovnice (48).

3 EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

V této kapitole budou odvozeny regulátory (9) pro systémy s dopravním zpožděním (1) a vyjádření obecných rovnic pro výpočet parametrů polynomů $q(s)$, $r(s)$ a $\tilde{p}(s)$ ve 2 DOF konfiguraci.

Obecně uvažujeme přenos lineárního dynamického systému s dopravním zpožděním, který tvoří podíl polynomů $l(s)$ a $m(s)$ a násobeno přenosem dopravního zpoždění $E(s)$.

$$K(s) = \frac{m(s)}{l(s)} e^{-T_d s} \quad (49)$$

3.1 Soustava číslo 1

$$G(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1} \cdot \frac{2 - T_d s}{2 + T_d s} \quad (50)$$

Vztah roznásobíme a po úpravách provádíme substituci vzniklých proměnných, kde dostáváme polynomy:

$$b_1 = -\frac{k}{\tau_1} ; b_0 = \frac{2k}{\tau_1 T_d} \quad (51)$$

$$a_2 = 1 ; a_1 = \frac{2\tau_1 + T_d}{\tau_1 T_d} ; a_0 = \frac{2}{\tau_1 T_d} \quad (52)$$

Pak aproximovaný přenos systému nabývá tvaru:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (53)$$

Do systému nám vstupuje během řízení porucha s charakteristikou jednotkového skoku:

$$V(s) = \frac{1}{s} \quad (54)$$

Provedeme opět výpočet stupňů polynomů regulátoru $q(s)$, $r(s)$, $\tilde{p}(s)$ a charakteristického polynomu $d(s)$.

$$\begin{aligned}
 a(s)f(s)\tilde{p}(s) + b(s)q(s) &= d(s) \\
 (s^2 + a_1s + a_0)s(p_1s + p_0) + (b_1s + b_0)(q_2s^2 + q_1s + q_0) &= (s^2 + a_1s + a_0)(s + \alpha)^2 \\
 p_1s^4 + a_1p_1s^3 + a_0p_1s^2 + p_0s^3 + a_1p_0s^2 + a_0p_0s + b_1q_2s^3 + b_0q_2s^2 + b_1q_1s^2 + b_0q_1s + b_1q_0s + b_0q_0 &= \\
 = s^4 + 2\alpha s^3 + \alpha^2 s^2 + a_1s^3 + 2\alpha a_1s^2 + \alpha^2 a_1s + a_0s^2 + 2\alpha a_0s + \alpha^2 a_0 & \\
 p_1s^4 + (a_1p_1 + p_0 + b_1q_2)s^3 + (a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1)s^2 + (a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0)s + b_0q_0 &= \\
 = s^4 + (2\alpha + a_1)s^3 + (\alpha^2 + 2\alpha a_1 + a_0)s^2 + (\alpha^2 a_1 + 2\alpha a_0)s + \alpha^2 a_0 &
 \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostaneme:

$$\begin{aligned}
 s^4 : p_1 &= 1 \\
 s^3 : a_1p_1 + p_0 + b_1q_2 &= 2\alpha + a_1 \\
 s^2 : a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1 &= \alpha^2 + 2\alpha a_1 + a_0 \\
 s^1 : a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0 &= \alpha^2 a_1 + 2\alpha a_0 \\
 s^0 : b_0q_0 &= \alpha^2 a_0 \Rightarrow q_0 = \frac{\alpha^2 a_0}{b_0}
 \end{aligned}$$

Řešením tří rovnic o třech neznámých získáme chybějící parametry regulátoru:

$$p_0 = 2\alpha - b_1 \frac{\alpha^2}{b_0} ; q_2 = \frac{\alpha^2}{b_0} ; q_1 = a_1 \frac{\alpha^2}{b_0}$$

$$\begin{aligned}
 t(s) \cdot f_w(s) + b(s) \cdot r(s) &= d(s) \\
 (t_3s^3 + t_2s^2 + t_1s + t_0)s + b_0r_0 &= (s^2 + a_1s + a_0)(s + \alpha)^2
 \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostaneme:

$$s^0 : b_0r_0 = \alpha^2 a_0 \Rightarrow r_0 = \frac{\alpha^2 a_0}{b_0}$$

Výsledné regulátory pak budou :

$$Q(s) = \frac{\frac{\alpha^2}{b_0}(s^2 + a_1s + a_0)}{s\left(s + 2\alpha - b_1\frac{\alpha^2}{b_0}\right)} = \frac{\alpha^2\left(\frac{\tau_1 T_d}{2k}s^2 + \frac{2\tau_1 + T_d}{2k}s + \frac{1}{k}\right)}{s\left(s + 2\alpha + \frac{\alpha^2 T_d}{2}\right)} \quad (55)$$

$$R(s) = \frac{\frac{\alpha^2}{b_0}a_0}{s\left(s + 2\alpha - b_1\frac{\alpha^2}{b_0}\right)} = \frac{\frac{\alpha^2}{k}}{s\left(s + 2\alpha + \frac{\alpha^2 T_d}{2}\right)} \quad (56)$$

3.2 Soustava číslo 2

$$G(s) = \frac{k(\tau_1 + 1)}{\tau_2 s + 1} \cdot \frac{2 - T_d s}{2 + T_d s} \quad (57)$$

Vztah roznásobíme a po úpravách provádíme substituci vzniklých proměnných, kde dostáváme polynomy:

$$b_2 = \frac{k\tau_1}{\tau_2} ; b_1 = \frac{k(2\tau_1 - T_d)}{\tau_2 T_d} ; b_0 = \frac{2k}{\tau_2 T_d} \quad (58)$$

$$a_2 = 1 ; a_1 = \frac{2\tau_2 + T_d}{\tau_2 T_d} ; a_0 = \frac{2}{\tau_2 T_d} \quad (59)$$

Pak aproximovaný přenos systému nabývá tvaru:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (60)$$

Do systému nám vstupuje během řízení porucha s charakteristikou jednotkového skoku:

$$V(s) = \frac{1}{s} \quad (61)$$

Provedeme opět výpočet stupňů polynomů regulátoru $q(s)$, $r(s)$, $\tilde{p}(s)$ a charakteristického polynomu $d(s)$.

$$\begin{aligned}
 a(s)f(s)\tilde{p}(s) + b(s)q(s) &= d(s) \\
 (s^2 + a_1s + a_0)s(p_1s + p_0) + (b_2s^2 + b_1s + b_0)(q_2s^2 + q_1s + q_0) &= (s^2 + a_1s + a_0)(s + \alpha)^2 \\
 p_1s^4 + a_1p_1s^3 + a_0p_1s^2 + p_0s^3 + a_1p_0s^2 + a_0p_0s + b_2q_2s^4 + b_1q_2s^3 + b_0q_2s^2 + b_2q_1s^3 + \\
 + b_1q_1s^2 + b_0q_1s + b_2q_0s^2 + b_1q_0s + b_0q_0 &= \\
 = s^4 + 2\alpha s^3 + \alpha^2 s^2 + a_1s^3 + 2\alpha a_1s^2 + \alpha^2 a_1s + a_0s^2 + 2\alpha a_0s + \alpha^2 a_0 \\
 (p_1 + b_2q_2)s^4 + (a_1p_1 + p_0 + b_1q_2 + b_2q_1)s^3 + (a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1 + b_2q_0)s^2 + \\
 + (a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0)s + b_0q_0 &= \\
 = s^4 + (2\alpha + a_1)s^3 + (\alpha^2 + 2\alpha a_1 + a_0)s^2 + (\alpha^2 a_1 + 2\alpha a_0)s + \alpha^2 a_0
 \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostaneme:

$$\begin{aligned}
 s^4 : p_1 + b_2q_2 &= 1 \\
 s^3 : a_1p_1 + p_0 + b_1q_2 + b_2q_1 &= 2\alpha + a_1 \\
 s^2 : a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1 + b_2q_0 &= \alpha^2 + 2\alpha a_1 + a_0 \\
 s^1 : a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0 &= \alpha^2 a_1 + 2\alpha a_0 \\
 s^0 : b_0q_0 = \alpha^2 a_0 &\Rightarrow q_0 = \frac{\alpha^2 a_0}{b_0}
 \end{aligned}$$

Řešením tří rovnic o třech neznámých získáme chybějící parametry regulátoru:

$$p_1 = 1 - b_2 \frac{\alpha^2}{b_0} ; p_0 = 2\alpha - b_1 \frac{\alpha^2}{b_0} ; q_2 = \frac{\alpha^2}{b_0} ; q_1 = a_1 \frac{\alpha^2}{b_0} ; q_0 = a_0 \frac{\alpha^2}{b_0}$$

$$\begin{aligned}
 t(s) \cdot f_w(s) + b(s) \cdot r(s) &= d(s) \\
 (t_3s^3 + t_2s^2 + t_1s + t_0)s + (b_2s^2 + b_1s + b_0)r_0 &= (s^2 + a_1s + a_0)(s + \alpha)^2
 \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostaneme:

$$s^0 : b_0r_0 = \alpha^2 a_0 \Rightarrow r_0 = \frac{\alpha^2 a_0}{b_0}$$

Výsledné regulátory pak budou :

$$Q(s) = \frac{\frac{\alpha^2}{b_0}(s^2 + a_1s + a_0)}{s \left[\left(1 - b_2 \frac{\alpha^2}{b_0} \right) s + \left(2\alpha - b_1 \frac{\alpha^2}{b_0} \right) \right]} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{\tau_2 T_d}{2k} s^2 + \frac{2\tau_2 + T_d}{2k} s + \frac{1}{k} \right)}{s \left[\left(1 - \alpha^2 \frac{\tau_1 T_d}{2} \right) s + \left(2\alpha - \frac{2\tau_1 - T_d}{2} \right) \right]} \quad (62)$$

$$R(s) = \frac{\frac{\alpha^2}{b_0} a_0}{s \left[\left(1 - b_2 \frac{\alpha^2}{b_0} \right) s + \left(2\alpha - b_1 \frac{\alpha^2}{b_0} \right) \right]} = \frac{\frac{\alpha^2}{k}}{s \left[\left(1 - \alpha^2 \frac{\tau_1 T_d}{2} \right) s + \left(2\alpha - \frac{2\tau_1 - T_d}{2} \right) \right]} \quad (63)$$

3.3 Soustava číslo 3

$$G(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1} \cdot \frac{12 - 6T_d s + T_d^2 s^2}{12 + 6T_d s + T_d^2 s^2} \quad (64)$$

Vztah roznásobíme a po úpravách provádíme substituci vzniklých proměnných, kde dostáváme polynomy:

$$b_2 = \frac{k}{\tau_1} ; b_1 = -\frac{6k}{\tau_1 T_d} ; b_0 = \frac{12k}{\tau_1 T_d^2} \quad (65)$$

$$a_3 = 1 ; a_2 = \frac{6\tau_1 + T_d}{\tau_1 T_d} ; a_1 = \frac{12\tau_1 + 6T_d}{\tau_1 T_d^2} ; a_0 = \frac{12}{\tau_1 T_d^2} \quad (66)$$

Pak aproximovaný přenos systému nabývá tvaru:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (67)$$

Do systému nám vstupuje během řízení porucha s charakteristikou jednotkového skoku:

$$V(s) = \frac{1}{s} \quad (68)$$

Provedeme opět výpočet stupňů polynomů regulátoru $q(s)$, $r(s)$, $\tilde{p}(s)$ a charakteristického polynomu $d(s)$.

$$\begin{aligned}
 a(s)f(s)\tilde{p}(s) + b(s)q(s) &= d(s) \\
 (s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)s(p_2s^2 + p_1s + p_0) + (b_2s^2 + b_1s + b_0)(q_2s^2 + q_1s + q_0) &= \\
 = (s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)(s + \alpha)^3 &= \\
 p_2s^6 + p_1s^5 + p_0s^4 + a_2p_2s^5 + a_2p_1s^4 + a_2p_0s^3 + a_1p_2s^4 + a_1p_1s^3 + a_1p_0s^2 + a_0p_2s^3 + &+ \\
 + a_0p_1s^2 + a_0p_0s + b_2q_3s^5 + b_2q_2s^4 + b_2q_1s^3 + b_2q_0s^2 + b_1q_3s^4 + b_1q_2s^3 + b_1q_1s^2 + b_1q_0s + &+ \\
 + b_0q_3s^3 + b_0q_2s^2 + b_0q_1s + b_0q_0 &= \\
 = s^6 + 3\alpha s^5 + 3\alpha^2 s^4 + \alpha^3 s^3 + a_2s^5 + 3a_2\alpha s^4 + 3a_2\alpha^2 s^3 + a_2\alpha^3 s^2 + a_1s^4 + 3a_1\alpha s^3 + 3a_1\alpha^2 s^2 + &+ \\
 + a_1\alpha^3 s + a_0s^3 + 3a_0\alpha s^2 + 3a_0\alpha^2 s + a_0\alpha^3 &= \\
 p_2s^6 + (p_1 + a_2p_2 + b_2q_3)s^5 + (p_0 + a_2p_1 + a_1p_2 + b_2q_2 + b_1q_3)s^4 + (a_2p_0 + a_1p_1 + a_0p_2 + &+ \\
 + b_2q_1 + b_1q_2 + b_0q_3)s^3 + (a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1 + b_2q_0)s^2 + &+ \\
 + (a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0)s + b_0q_0 &= \\
 = s^6 + (3\alpha + a_2)s^5 + (3\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_1)s^4 + (\alpha^3 + 3a_2\alpha^2 + 3a_1\alpha + a_0)s^3 + &+ \\
 (a_2\alpha^3 + 3a_1\alpha^2 + 3a_0\alpha)s^2 + (a_1\alpha^3 + 3a_0\alpha^2)s + a_0\alpha^3 &=
 \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostaneme:

$$\begin{aligned}
 s^6 : p_2 &= 1 \\
 s^5 : p_1 + a_2p_2 + b_2q_3 &= 3\alpha + a_2 \\
 s^4 : p_0 + a_2p_1 + a_1p_2 + b_2q_2 + b_1q_3 &= 3\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_1 \\
 s^3 : a_2p_0 + a_1p_1 + a_0p_2 + b_2q_1 + b_1q_2 + b_0q_3 &= \alpha^3 + 3a_2\alpha^2 + 3a_1\alpha + a_0 \\
 s^2 : a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1 + b_2q_0 &= a_2\alpha^3 + 3a_1\alpha^2 + 3a_0\alpha \\
 s^1 : a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0 &= a_1\alpha^3 + 3a_0\alpha^2 \\
 s^0 : b_0q_0 &= \alpha^3 a_0 \Rightarrow q_0 = \frac{\alpha^3 a_0}{b_0}
 \end{aligned}$$

Řešením tří rovnic o třech neznámých získáme chybějící parametry regulátoru:

$$p_2=1 ; p_1=3\alpha - b_2 \frac{\alpha^3}{b_0} ; p_0=3\alpha^2 - b_1 \frac{\alpha^3}{b_0} ; q_3=\frac{\alpha^3}{b_0} ; q_2=a_2 \frac{\alpha^3}{b_0} ; q_1=a_1 \frac{\alpha^3}{b_0} ; q_0=a_0 \frac{\alpha^3}{b_0}$$

$$t(s) \cdot f_w(s) + b(s) \cdot r(s) = d(s)$$

$$(t_5 s^5 + t_4 s^4 + t_3 s^3 + t_2 s^2 + t_1 s + t_0)s + (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)r_0 = (s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)(s + \alpha)^3$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostaneme:

$$s^0 : b_0 r_0 = \alpha^3 a_0 \Rightarrow r_0 = \frac{\alpha^3 a_0}{b_0}$$

Výsledné regulátory pak budou :

$$Q(s) = \frac{\frac{\alpha^3}{b_0}(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}{s \left[s^2 + \left(3\alpha - b_2 \frac{\alpha^3}{b_0} \right) s + \left(3\alpha^2 - b_1 \frac{\alpha^3}{b_0} \right) \right]} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{\tau_1 T_d^2}{12k} s^3 + \frac{6\tau_1 T_d + T_d^2}{12k} s^2 + \frac{2\tau_1 + T_d}{2k} s + \frac{1}{k} \right)}{s \left[s^2 + \left(3\alpha - \alpha^3 \frac{T_d^2}{12} \right) s + \left(3\alpha^2 - \alpha^3 \frac{T_d}{2} \right) \right]} \quad (68)$$

$$R(s) = \frac{\frac{\alpha^3}{b_0} a_0}{s \left[s^2 + \left(3\alpha - b_2 \frac{\alpha^3}{b_0} \right) s + \left(3\alpha^2 - b_1 \frac{\alpha^3}{b_0} \right) \right]} = \frac{\frac{\alpha^3}{k}}{s \left[s^2 + \left(3\alpha - \alpha^3 \frac{T_d^2}{12} \right) s + \left(3\alpha^2 - \alpha^3 \frac{T_d}{2} \right) \right]} \quad (69)$$

3.4 Soustava číslo 4

$$G(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1)}{\tau_2 s + 1} \cdot \frac{12 - 6T_d s + T_d^2 s^2}{12 + 6T_d s + T_d^2 s^2} \quad (70)$$

Vztah roznásobíme a po úpravách provádíme substituci vzniklých proměnných, kde dostáváme polynomy:

$$b_3 = \frac{k\tau_1}{\tau_2} ; b_2 = \frac{kT_d^2 - 6\tau_1 T_d}{\tau_2 T_d^2} ; b_1 = \frac{12k\tau_1 - 6kT_d}{\tau_2 T_d^2} ; b_0 = \frac{12k}{\tau_2 T_d^2} \quad (71)$$

$$a_3 = 1 ; a_2 = \frac{6\tau_2 + T_d}{\tau_2 T_d} ; a_1 = \frac{12\tau_2 + 6T_d}{\tau_2 T_d^2} ; a_0 = \frac{12}{\tau_2 T_d^2} \quad (72)$$

Pak aproximovaný přenos systému nabývá tvaru:

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (73)$$

Do systému nám vstupuje během řízení porucha s charakteristikou jednotkového skoku:

$$V(s) = \frac{1}{s} \quad (74)$$

Provedeme opět výpočet stupňů polynomů regulátoru $q(s)$, $r(s)$, $\tilde{p}(s)$ a charakteristického polynomu $d(s)$.

$$\begin{aligned} a(s)f(s)\tilde{p}(s) + b(s)q(s) &= d(s) \\ (s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)s(p_2s^2 + p_1s + p_0) + (b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0)(q_2s^2 + q_1s + q_0) &= \\ = (s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)(s + \alpha)^3 & \\ p_2s^6 + p_1s^5 + p_0s^4 + a_2p_2s^5 + a_2p_1s^4 + a_2p_0s^3 + a_1p_2s^4 + a_1p_1s^3 + a_1p_0s^2 + a_0p_2s^3 + & \\ + a_0p_1s^2 + a_0p_0s + b_3q_3s^6 + b_3q_2s^5 + b_3q_1s^4 + b_3q_0s^3 + b_2q_3s^5 + b_2q_2s^4 + b_2q_1s^3 + b_2q_0s^2 + & \\ b_1q_3s^4 + b_1q_2s^3 + b_1q_1s^2 + b_1q_0s + b_0q_3s^3 + b_0q_2s^2 + b_0q_1s + b_0q_0 = & \\ = s^6 + 3\alpha s^5 + 3\alpha^2 s^4 + \alpha^3 s^3 + a_2s^5 + 3a_2\alpha s^4 + 3a_2\alpha^2 s^3 + a_2\alpha^3 s^2 + a_1s^4 + 3a_1\alpha s^3 + 3a_1\alpha^2 s^2 + & \\ a_1\alpha^3 s + a_0s^3 + 3a_0\alpha s^2 + 3a_0\alpha^2 s + a_0\alpha^3 & \\ (p_2 + b_3q_3)s^6 + (p_1 + a_2p_2 + b_3q_2 + b_2q_3)s^5 + (p_0 + a_2p_1 + a_1p_2 + b_3q_1 + b_2q_2 + b_1q_3)s^4 + & \\ (a_2p_0 + a_1p_1 + a_0p_2 + b_3q_0 + b_2q_1 + b_1q_2 + b_0q_3)s^3 + (a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1 + b_2q_0)s^2 + & \\ + (a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0)s + b_0q_0 = & \\ = s^6 + (3\alpha + a_2)s^5 + (3\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_1)s^4 + (\alpha^3 + 3a_2\alpha^2 + 3a_1\alpha + a_0)s^3 + & \\ (a_2\alpha^3 + 3a_1\alpha^2 + 3a_0\alpha)s^2 + (a_1\alpha^3 + 3a_0\alpha^2)s + a_0\alpha^3 & \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostaneme:

$$\begin{aligned} s^6 : p_2 &= 1 \\ s^5 : p_1 + a_2p_2 + b_3q_2 + b_2q_3 &= 3\alpha + a_2 \\ s^4 : p_0 + a_2p_1 + a_1p_2 + b_3q_1 + b_2q_2 + b_1q_3 &= 3\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_1 \\ s^3 : a_2p_0 + a_1p_1 + a_0p_2 + b_3q_0 + b_2q_1 + b_1q_2 + b_0q_3 &= \alpha^3 + 3a_2\alpha^2 + 3a_1\alpha + a_0 \\ s^2 : a_0p_1 + a_1p_0 + b_0q_2 + b_1q_1 + b_2q_0 &= a_2\alpha^3 + 3a_1\alpha^2 + 3a_0\alpha \\ s^1 : a_0p_0 + b_0q_1 + b_1q_0 &= a_1\alpha^3 + 3a_0\alpha^2 \\ s^0 : b_0q_0 &= \alpha^3 a_0 \Rightarrow q_0 = \frac{\alpha^3 a_0}{b_0} \end{aligned}$$

Řešením tří rovnic o třech neznámých získáme chybějící parametry regulátoru:

$$p_2=1-b_3 \frac{\alpha^3}{b_0} ; p_1=3\alpha-b_2 \frac{\alpha^3}{b_0} ; p_0=3\alpha^2-b_1 \frac{\alpha^3}{b_0} ; q_3=\frac{\alpha^3}{b_0} ; q_2=a_2 \frac{\alpha^3}{b_0} ; q_1=a_1 \frac{\alpha^3}{b_0} ; q_0=a_0 \frac{\alpha^3}{b_0}$$

$$t(s).f_w(s)+b(s).r(s)=d(s)$$

$$(t_5s^5+t_4s^4+t_3s^3+t_2s^2+t_1s+t_0)s+(b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0)r_0=(s^3+a_2s^2+a_1s+a_0)(s+\alpha)^3$$

Porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostaneme:

$$s^0 : b_0r_0 = \alpha^3 a_0 \Rightarrow r_0 = \frac{\alpha^3 a_0}{b_0}$$

Výsledné regulátory pak budou :

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{\frac{\alpha^3}{b_0}(s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)}{s \left[\left(1 - \alpha^3 \frac{b_3}{b_0} \right) s^2 + \left(3\alpha - b_2 \frac{\alpha^3}{b_0} \right) s + \left(3\alpha^2 - b_1 \frac{\alpha^3}{b_0} \right) \right]} = \\ &= \frac{\alpha^2 \left(\frac{\tau_2 T_d^2}{12k} s^3 + \frac{6\tau_2 T_d + T_d^2}{12k} s^2 + \frac{2\tau_2 + T_d}{2k} s + \frac{1}{k} \right)}{s \left[\left(1 - \alpha^3 \frac{\tau_1 T_d^2}{12} \right) s^2 + \left(3\alpha - \alpha^3 \frac{T_d^2 - 6\tau_1 T_d}{12} \right) s + \left(3\alpha^2 - \alpha^3 \frac{2\tau_1 - T_d}{2} \right) \right]} \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{\frac{\alpha^3}{b_0} a_0}{s \left[\left(1 - \alpha^3 \frac{b_3}{b_0} \right) s^2 + \left(3\alpha - b_2 \frac{\alpha^3}{b_0} \right) s + \left(3\alpha^2 - b_1 \frac{\alpha^3}{b_0} \right) \right]} = \\ &= \frac{\frac{\alpha^3}{k}}{s \left[\left(1 - \alpha^3 \frac{\tau_1 T_d^2}{12} \right) s^2 + \left(3\alpha - \alpha^3 \frac{T_d^2 - 6\tau_1 T_d}{12} \right) s + \left(3\alpha^2 - \alpha^3 \frac{2\tau_1 - T_d}{2} \right) \right]} \end{aligned} \quad (76)$$

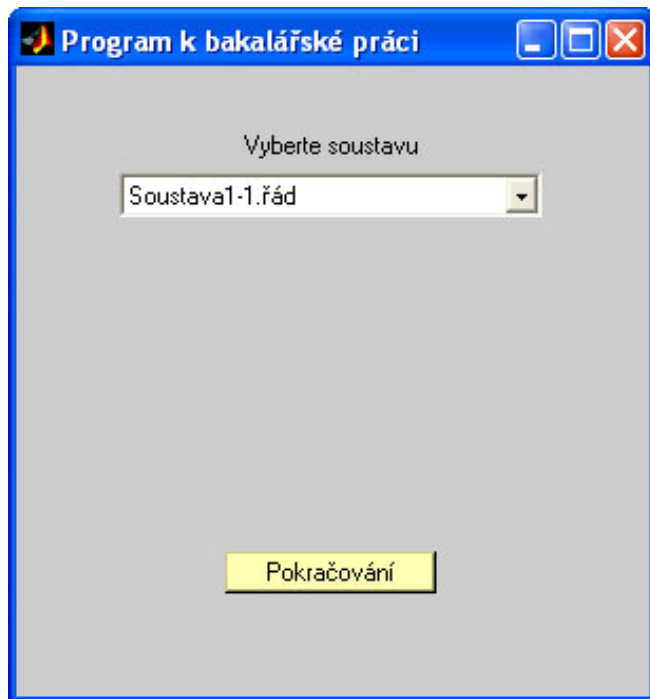
4 SIMULAČNÍ ČÁST

Cílem této kapitoly je simulačně ověřit použitelnost polynomiální metody pro řízení zadaných soustav. Simulacemi je třeba zjistit vliv volitelného parametru (pólu α) a velikosti hodnoty dopravního zpoždění T_d na chování jednotlivých soustav a nalézt nejvhodnější hodnoty těchto parametrů. Ve všech simulacích byl použit referenční signál ve tvaru skokové funkce v čase $t=0$. Zvolené pevné parametry jednotlivých soustav jsou uvedeny v každém bodě a hodnoty měněných parametrů jsou přiřazeny k jednotlivým průběhům.

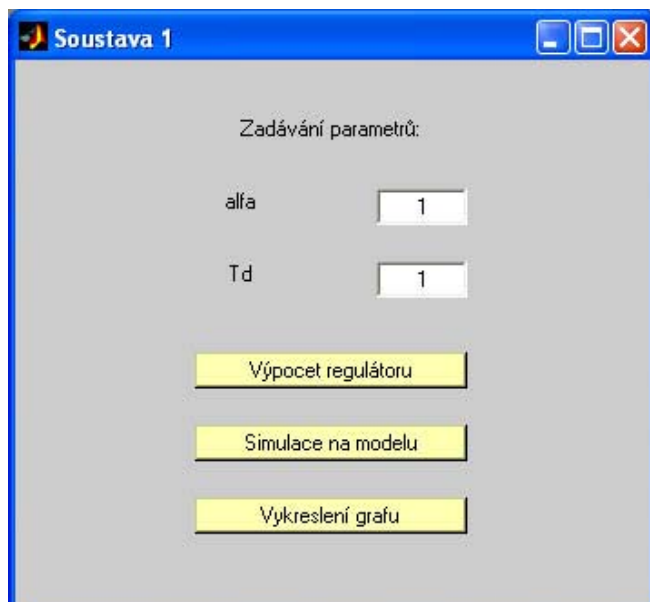
4.1 Tvorba programů pro simulační experimenty

S provedením simulačních experimentů samozřejmě souvisí také tvorba příslušných programů, které jsou součástí bakalářské práce. Jako základ bylo použito programové prostředí MATLAB. Výchozím krokem při provádění simulací bylo dialogové okno (soubor `zacatek.m`), které je zobrazeno na Obr. 2. V tomto okně se provádí výběr typu soustavy. Po ukončení tohoto výběru a kliknutí na tlačítko „Pokračovat“ se zobrazí dialogové okno z Obr. 3. Pomocí tohoto okna jsou zadávány všechny volitelné parametry pro každou soustavu a pomocí tlačítek následně prováděny výpočty regulátorů, vlastní simulace na modelech. Ke každé soustavě bylo vytvořeno samostatné okno (např. `okno1` pro 1.soustavu), aby mohly být měněny specifické parametry každé soustavy a zobrazeny konkrétní podmínky pro zadávání parametrů. Tvorba okna proběhla v editační části programového prostředí MATLAB. Při editaci vybraných parametrů v dialogovém okně se jejich nové hodnoty ukládají jako zvolené proměnné do paměti programu. Po kliknutí na tlačítko „Výpočet regulátoru“ je proveden soubor `regulator.m` (např. `regulator1.m` pro 1.soustavu), ve kterém jsou definovány konstanty soustav a který následně provede výpočet parametrů soustavy a regulátorů. Výsledné přenosy soustavy a regulátorů jsou zobrazeny v MATLAB – Command Window. Hodnoty parametrů jsou opět uloženy v paměti programu jako proměnné s příslušnými názvy. Poté už můžeme kliknutím na tlačítko „Simulace na modelu“ otevřít model příslušné soustavy pod názvem `model.mdl` (např. `model1.mdl` pro 1.soustavu). Modely byly vytvořeny v prostředí MATLAB-Simulink a jejich ukázka je na Obr. 4. Parametry soustavy a regulátorů si model načte přímo z paměti programu a výsledky simulace (tedy vektory jednotlivých proměnných) jsou opět

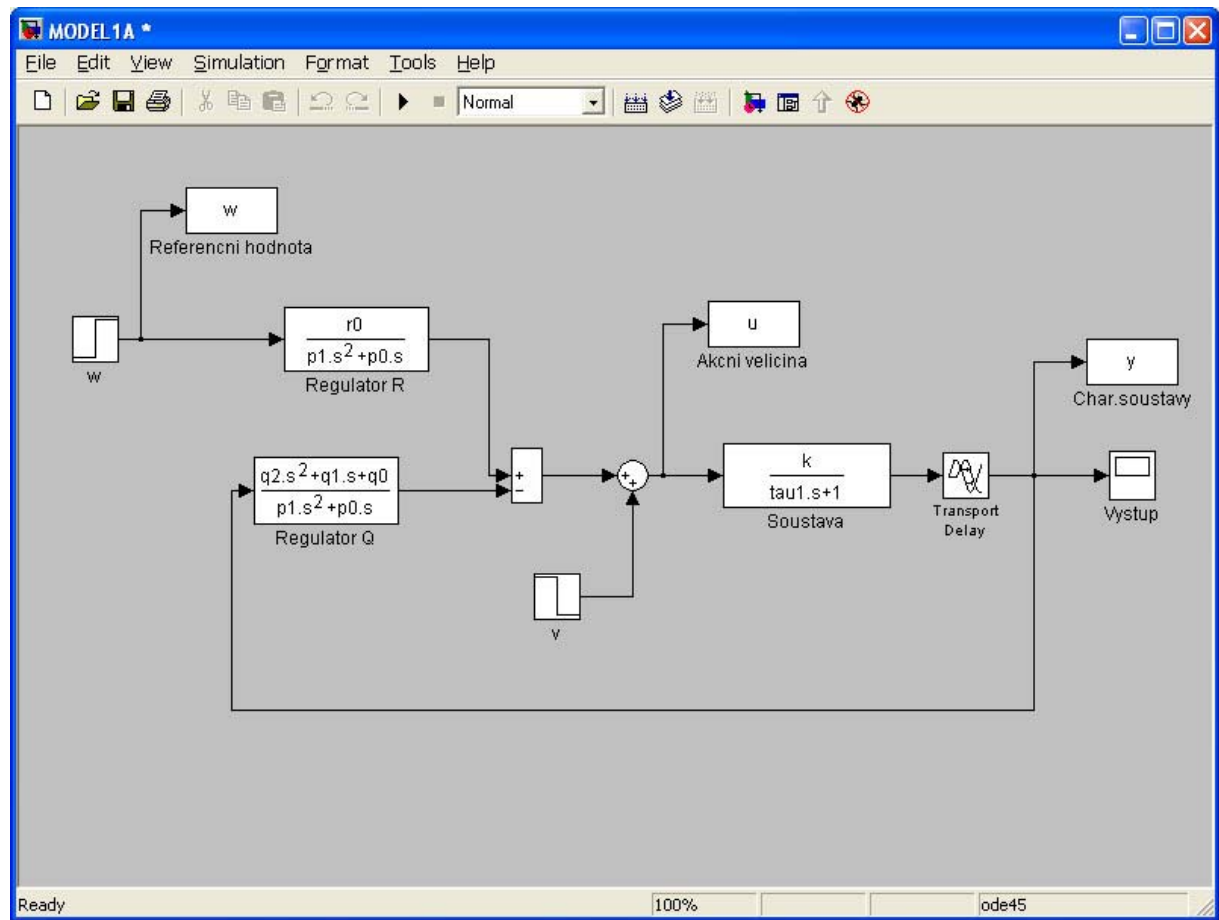
uloženy do paměti. Zde můžeme spustit simulaci a pomocí výstupu neboli scope zobrazit průběh řízeného výstupu.



Obr. 2. Ukázka dialogového okna pro výběr soustavy



Obr. 3. Ukázka dialogového okna pro zadávání parametrů

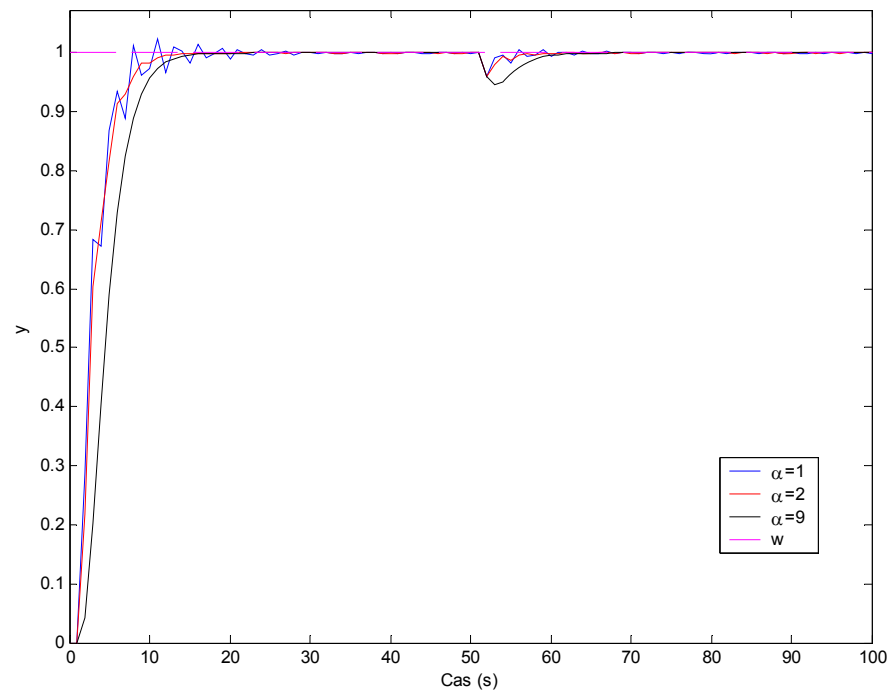
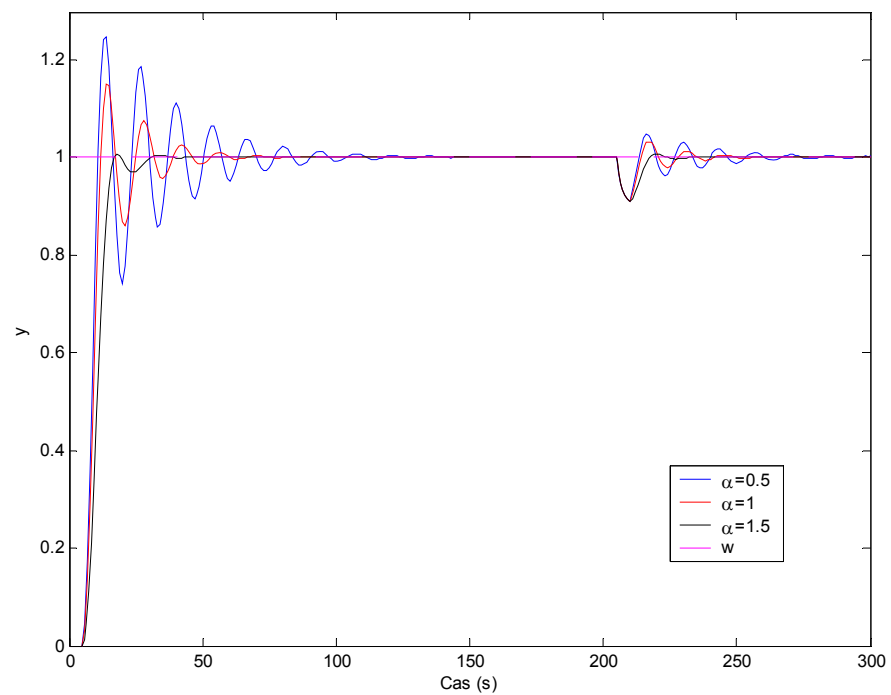


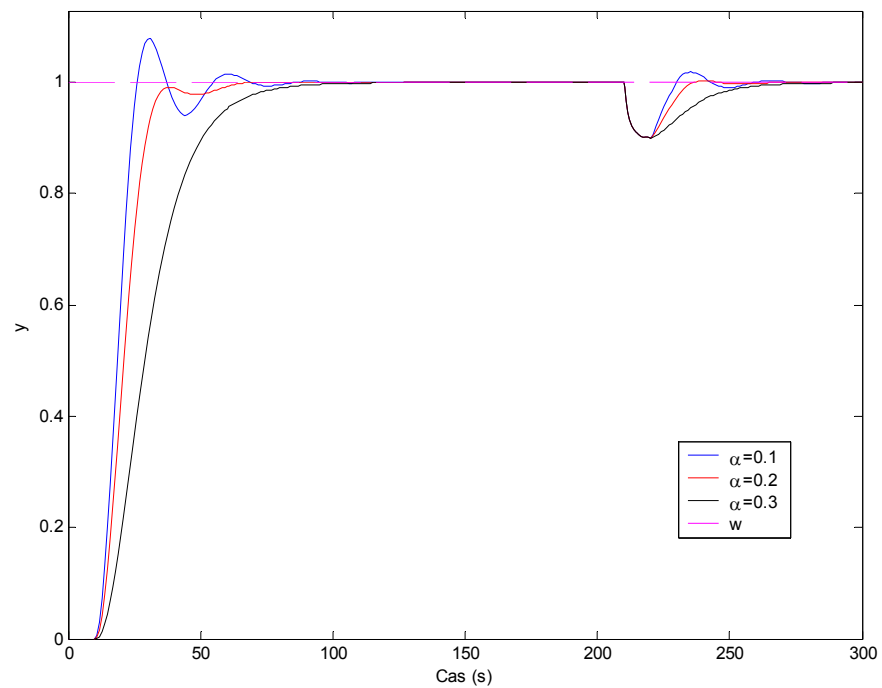
Obr. 4. Ukázka modelu soustavy v programovém prostředí MATLAB-Simulink

4.2 Soustava číslo 1

$$G(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1} \cdot \frac{2 - T_d s}{2 + T_d s}, \text{ kde } k = 1; \tau_1 = 2 \text{ a } T_d \text{ volíme.}$$

Odezva systému řízení na skokovou změnu referenčního signálu je zobrazena na Obr. 5 ,6 , 7. Jak je z obrázků zřejmé, hodnota parametru dopravního zpoždění T_d má velký vliv na dobu regulace. Tedy čím větší hodnota zpoždění, tím delší doba regulace. Hodnota dopravního zpoždění je odsimulována na třech příkladech, větší doba dopravního zpoždění už je špatně regulovatelná. Dále je zřejmé, že hodnota parametru α při vyšších hodnotách se pomaleji zreguluje, nedosahuje však takových velkých překmitů, než je to u menších hodnot.

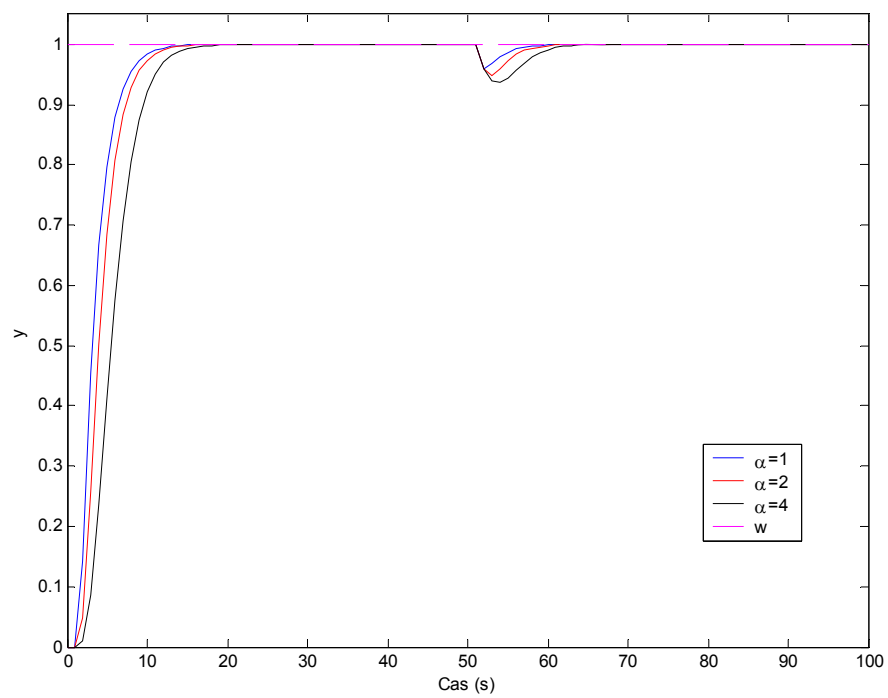
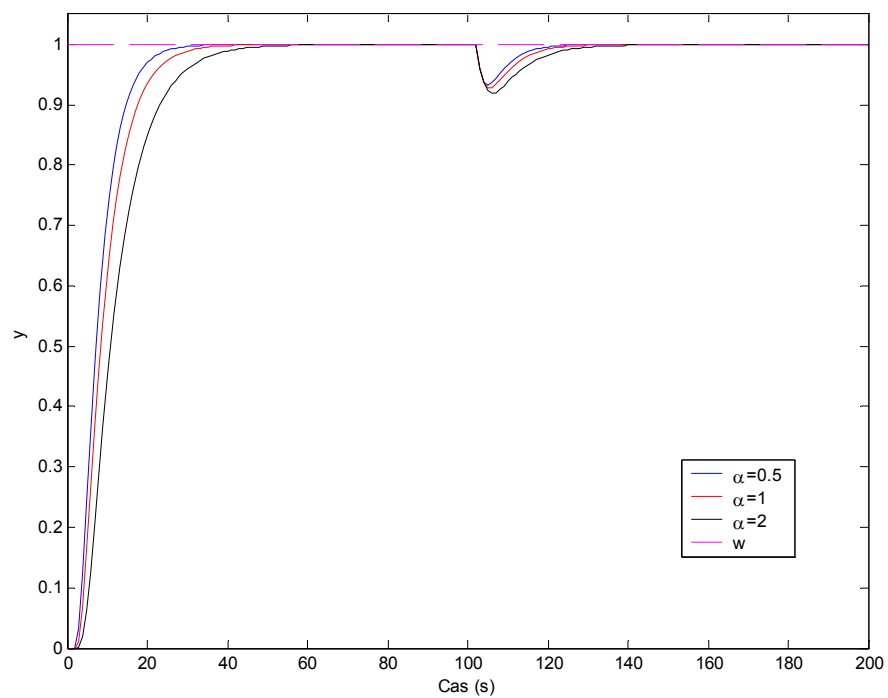
Obr. 5. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 1$, $v = -0.1$, $t_v = 50$ Obr. 6. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 5$, $v = -0.1$, $t_v = 200$

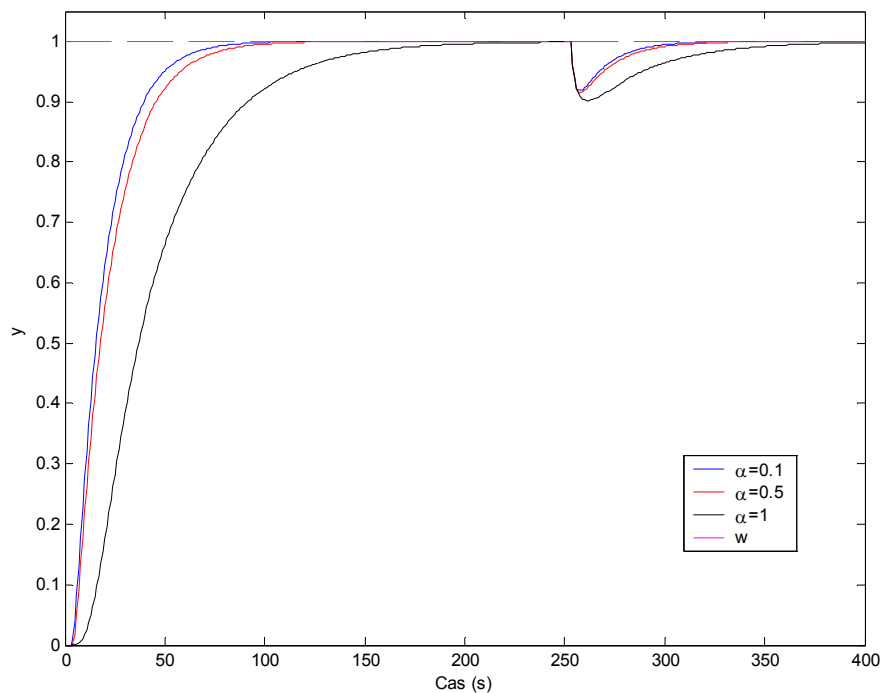
Obr. 7. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 10$, $v = -0,1$, $t_v = 200$

4.3 Soustava číslo 2

$$G(s) = \frac{k(\tau_1 + 1)}{\tau_2 s + 1} \cdot \frac{2 - T_d s}{2 + T_d s}, \text{ kde } k = 1; \tau_1 = 2 \text{ a } T_d \text{ volíme.}$$

Odezva systému řízení na skokovou změnu referenčního signálu je zobrazena na Obr. 8, 9, 10. Jak je z obrázků zřejmé, musíme volit menší hodnoty dopravního zpoždění T_d , protože při vyšších hodnotách soustava dochází k delším dobám regulace a při hodnotě $T_d > 3$ nejde prakticky stabilizovat. Proto je nejlepší volit co nejmenší hodnoty dopravního zpoždění. Je zde vhodné volit menší hodnoty parametru α , protože soustava se rychleji ustálí a není potřebná tak dlouhá doba na zregulování.

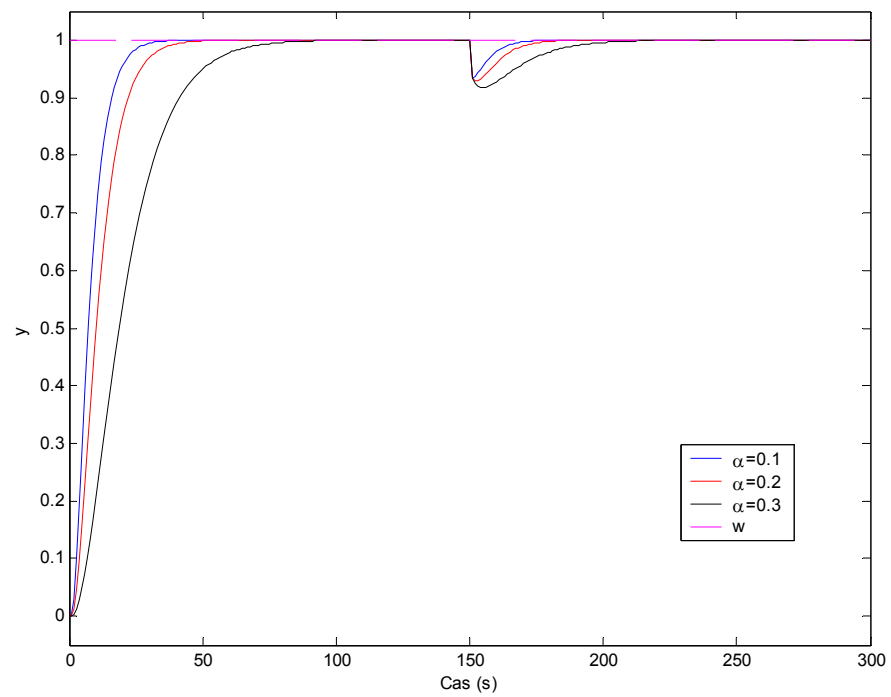
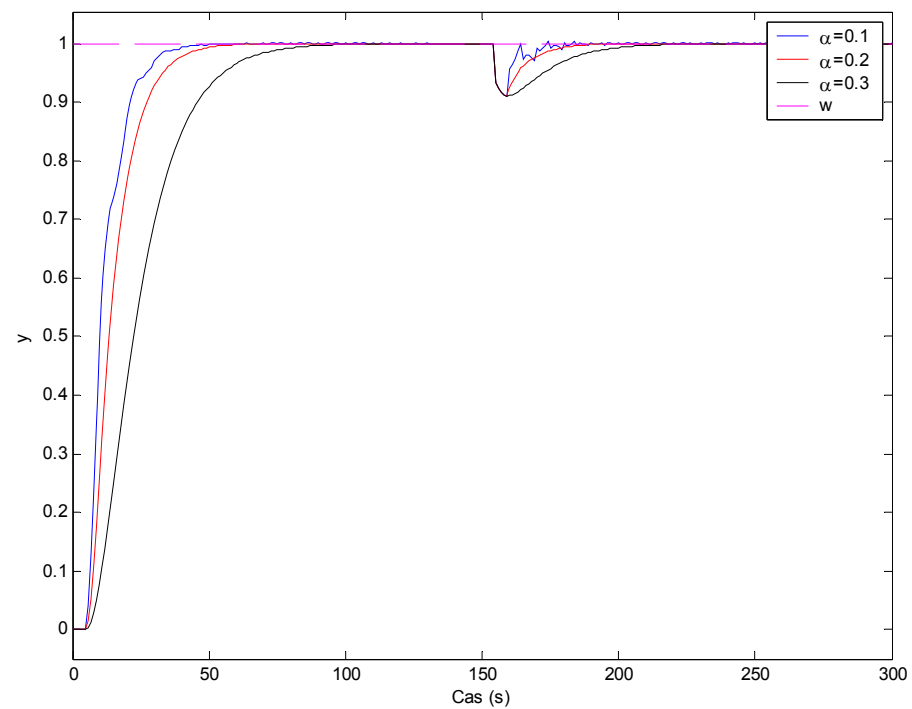
Obr.8. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 1$, $v = -0.1$, $t_v = 50$ Obr.9. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 2$, $v = -0.1$, $t_v = 100$

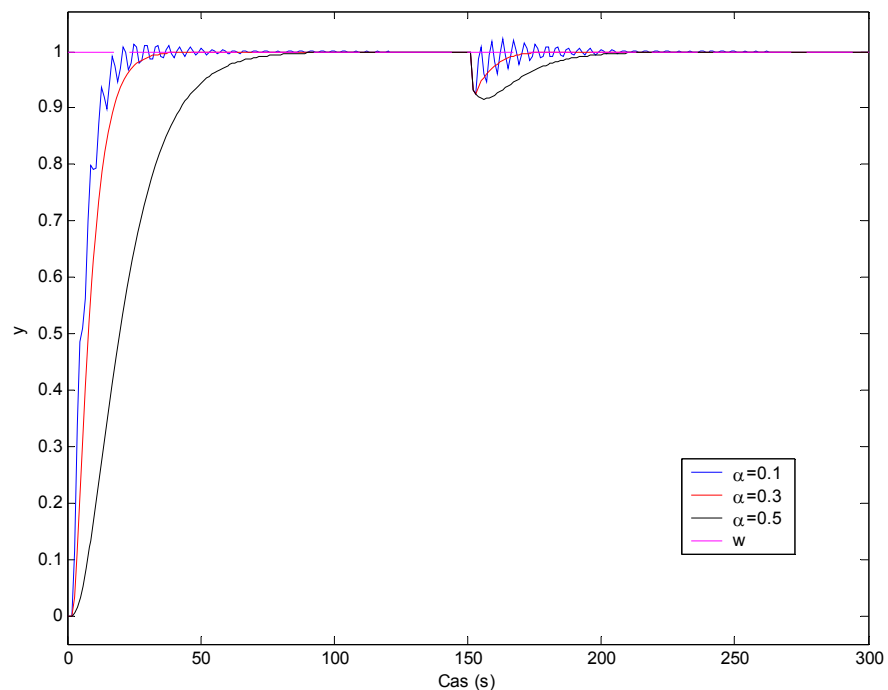
Obr.10. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 3$, $v = -0,1$, $t_v = 250$

4.4 Soustava číslo 3

$$G(s) = \frac{k(1 - \tau_3 s)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}, \text{ kde } k = 1; \tau_1 = 2; \tau_2 = 3 \text{ a } T_d \text{ volíme.}$$

Odezva systému řízení na skokovou změnu referenčního signálu je zobrazena na Obr. 11, 12, 13. Jak je z obrázků zřejmé, musíme volit menší hodnoty dopravního zpoždění T_d , protože při vyšších hodnotách u soustavy dochází k delším dobám regulace a při hodnotě $T_d > 5$ nejde prakticky stabilizovat. Proto je nejlepší volit co nejmenší hodnoty dopravního zpoždění. Dále je zřejmé, že hodnota parametru α při vyšších hodnotách se pomaleji zreguluje, nedosahuje však takových velkých překmitů, než je to u menších hodnot.

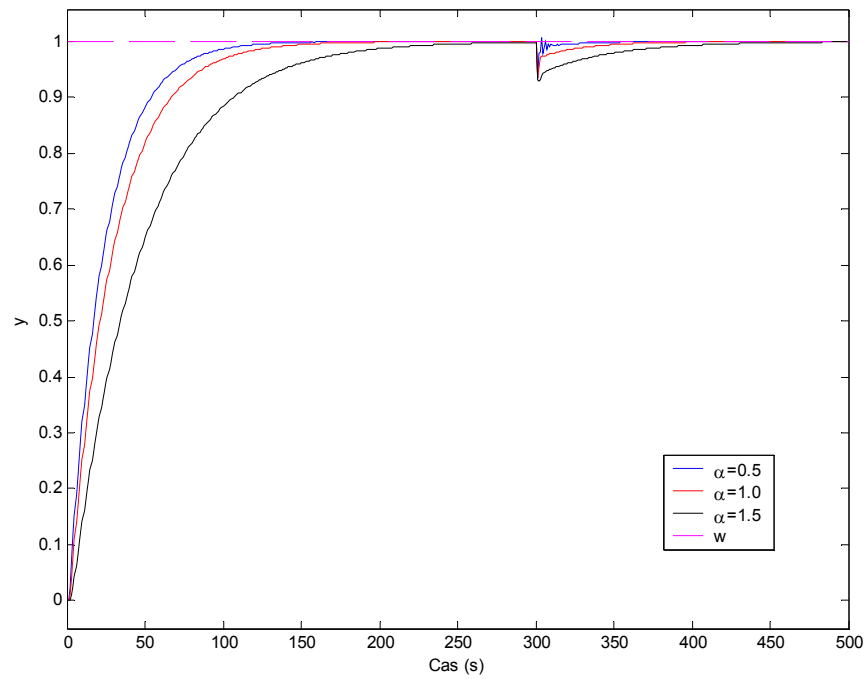
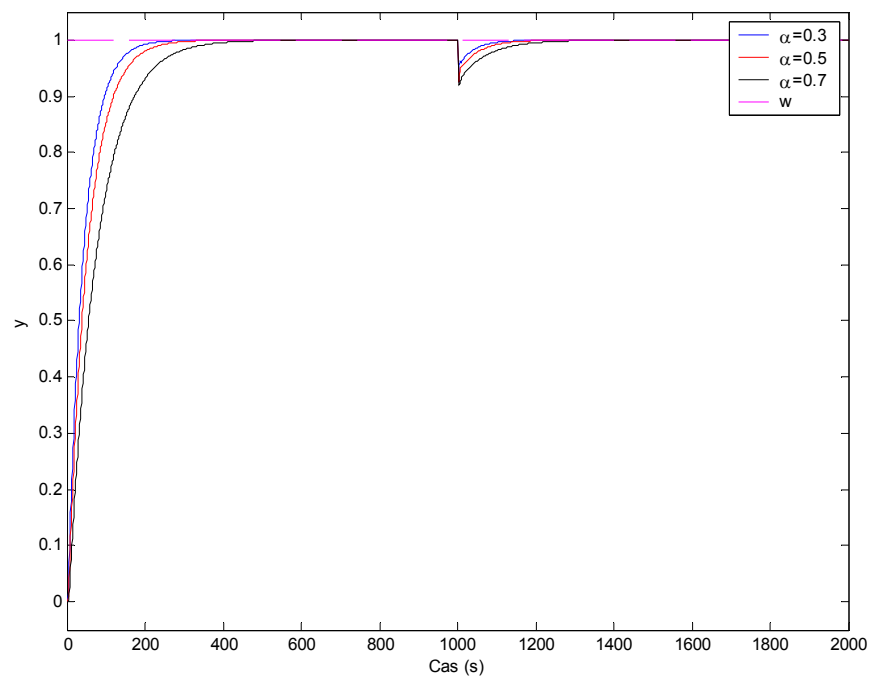
Obr.11. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 1$, $v = -0.1$, $t_v = 150$ Obr.12. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 1$, $v = -0.1$, $t_v = 150$

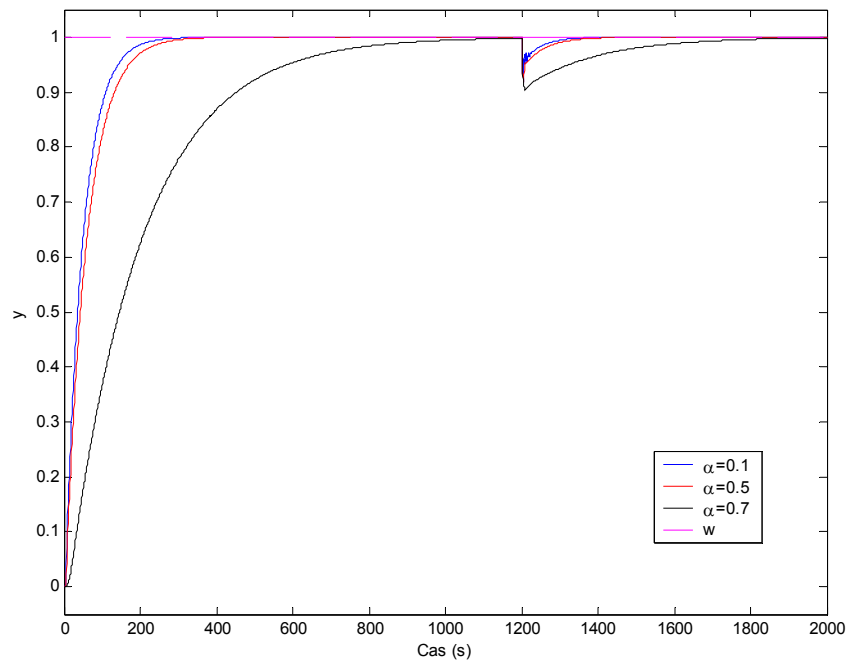
Obr.13. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 5$, $v = -0,1$, $t_v = 150$

4.5 Soustava číslo 4

$$G(s) = \frac{k}{(\tau_1 s - 1)(\tau_2 s + 1)}, \text{ kde } k = 1; \tau_1 = 2; \tau_2 = 3 \text{ a } T_d \text{ volíme.}$$

Odezva systému řízení na skokovou změnu referenčního signálu je zobrazena na Obr. 14, 15, 16. Jak je z obrázků zřejmé, musíme volit menší hodnoty dopravního zpoždění T_d , protože při vyšších hodnotách soustava dochází k delším dobám regulace a při hodnotě $T_d > 3$ nejde prakticky stabilizovat. Proto je nejlepší volit co nejmenší hodnoty dopravního zpoždění. Je zde vhodné volit i menší hodnoty parametru α , protože soustava se rychleji ustálí a není potřebná tak dlouhá doba na zregulování.

Obr.14. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 1$, $v = -0.1$, $t_v = 300$ Obr.15. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 2$, $v = -0.1$, $t_v = 1000$

Obr.16. Průběh y ve 2DOF konfiguraci $T_d = 2$, $v = -0,1$, $t_v = 1200$

ZÁVĚR

V téhle bakalářské práci jsem se zabýval problematikou náhrady dopravního zpoždění pomocí Padého aproximace pro výpočet patřičných regulátorů a obeznámení s principy a tvary. Velkou částí téhle bakalářské práce tvoří odvození polynomiálních rovnic pro návrh regulátorů v 2DOF konfiguraci systému řízení. Tyto vztahy byly odvozeny s přihlédnutím k požadavkům silné stability systému řízení a jeho vnitřní ryzosti, asymptotického sledování referenčního signálu a v neposlední řadě také vzhledem k požadavku kompenzace poruch vstupujících do systému řízení. Výsledkem této úvahy jsou obecné vztahy pro výpočet stupňů polynomů tvořících jednotlivé regulátory při uvažování obecných tvarů referenčního signálu i poruchy. Byly také odvozeny polynomiální diofantické rovnice, z nichž lze následně vypočítat parametry jednotlivých regulátorů pro příslušné náhrady dopravního zpoždění. Vzhledem k tomu, že umístění pólů lze provést mnoha způsoby (resp. různou volbou pravé strany charakteristické rovnice), jsou uvedeny některé nejpoužívanější a z hlediska výsledků řízení nejzajímavější tvary charakteristického polynomu.

Vztahy a rovnice získané v předchozí části byly následně použity pro odvození konkrétních vztahů pro výpočet parametrů regulátorů ve 2 DOF konfiguraci systému řízení

pro zvolené tvary pravých stran charakteristických rovnic. Regulátory byly odvozeny pro 4 různé soustavy. Výsledkem této části bakalářské práce tedy jsou rovnice pro výpočet parametrů regulátorů pro každý systém. Byly uvažovány tradiční, tedy skokové, tvary referenčního i poruchového signálu.

Hlavním úkolem této bakalářské práce ovšem mělo být ověření, zda je vhodnější volit Padého aproximaci 1. řádu nebo 2. řádu. Toto ověření bylo provedeno formou simulací, při kterých byly využity předchozí výsledky, tj. vztahy pro výpočet parametrů regulátorů pro jednotlivé soustavy. Pro ověření bylo třeba vytvořit programy, které by celý proces simulování zjednodušily a urychlily. Tyto programy jsou také součástí bakalářské práce. Pro vytvoření programů a ověření funkčnosti získaných algoritmů jsem použil programové prostředí MATLAB a jeho součást MATLAB-Simulink.

Výsledky řízení jsou u každé soustavy podrobně vyhodnoceny. Obecně lze konstatovat, že Padého aproximace 2. řádu nám vykazuje stabilnější průběhy, avšak za cenu delší regulace a složitějšího odvození výsledných polynomiálních diofantických rovnic, z nichž lze následně vypočítat parametry jednotlivých regulátorů pro příslušné náhrady dopravního zpoždění.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- (1) Dostál, P., Bobál, V., Gazdoš, F.: Design of controlers for unstable time delay systems using polynomial method. In: 11. IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation MED 2003, Rhodes, Greece, CD-ROM, 2003
- (2) Bobál, V., Böhm, J., Prokop, R., Fessl, J.: Praktické aspekty samočinně se nastavujících regulátorů: algoritmy a implementace. VUTIMUM, Brno, 1999.
- (3) Balátě, J.: Automatické řízení. BEN, Praha, 2003
- (4) Morávka, J.: Bodové aproximace přenosu dopravního zpoždění. In: 21. Seminář ASŘ 1948, Ostrava, Česká Republika, na internetu, 1998
- (5) Dostál, P., Bobál, V., Sysel, M.: Design of controlers for integrating and unstable time delay systems using polynomial method. In: Proc. 2002 American Control Conference, Anchorage, Alaska, USA, 2002, 2773-2778.
- (6) Tomašík, M., Využití metody přiřazení pólů v návrhu systémů řízení. UTB Zlín, 2003
- (7) Dokoupil, R.: Porovnání vybraných metod prořízení systémů s dopravním zpožděním. UTB Zlín, 2004

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

$a(s), b(s)$	polynomy jmenovatele a čitatele přenosu systému
α	kořen charakteristického polynomu $d(s)$
deg	stupeň polynomu
$d(s)$	stabilní polynom pravých stran polynomiálních diofantických rovnic
e	regulační odchylka
$f(s)$	polynom dělitelný jmenovateli referenčního signálu $f_w(s)$ a poruchy $f_v(s)$
$f_w(s), h_w(s)$	jmenovatel a čítec přenosu referenčního signálu
$f_v(s), h_v(s)$	jmenovatel a čítec přenosu poruchy
$G(s)$	přenos systému
$n(s)$	polynom obsažený v charakteristickém polynomu $d(s)$
$p(s)$	jmenovatel přenosů regulátorů
$Q(s)$	přenos regulátoru
$q(s)$	čítec přenosu regulátoru $Q(s)$
$R(s)$	přenos regulátoru
$r(s)$	čítec přenosu regulátoru $R(s)$
s	komplexní proměnná
u	akční zásah
v	porucha na vstupu do systému
w	referenční signál (žádaná hodnota)
y	řízený výstup

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. 2DOF konfigurace systému řízení	11
Obr. 2. Ukázka dialogového okna pro výběr soustavy	28
Obr. 3. Ukázka dialogového okna pro zadávání parametrů	28
Obr. 4. Ukázka modelu soustavy v programovém prostředí MATLAB-Simulink	29
Obr. 5. Průběh y ve 2DOF konfiguraci	30
Obr. 6. Průběh y ve 2DOF konfiguraci.	30
Obr. 7. Průběh y ve 2DOF konfiguraci.....	31
Obr. 8. Průběh y ve 2DOF konfiguraci.	32
Obr. 9. Průběh y ve 2DOF konfiguraci	32
Obr. 10. Průběhy y ve 2DOF konfiguraci	33
Obr. 11. Průběhy y ve 2DOF konfiguraci	34
Obr. 12. Průběh y ve 2DOF konfiguraci.	34
Obr. 13. Průběh y ve 2DOF konfiguraci	35
Obr. 14. Průběh y ve 2DOF konfiguraci.	36
Obr. 15. Průběh y ve 2DOF konfiguraci.....	36
Obr. 16. Průběh y ve 2DOF konfiguraci.	37