

Přípravek k demonstraci tahu - tlaku

Petr Chrobák

Bakalářská práce
2005



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta Technologická

Chtěl bych poděkovat panu doc. Ing. Oldřichu Šubovi, CSc. za odborné vedení a cenné připomínky, které mi pomohly při psaní této práce. Dále bych rád poděkoval panu Ing. Jiřímu Šálkovi za pomoc při výrobě samotného přípravku.

Souhlasím s tím, že s výsledky mé bakalářské práce může být naloženo podle uvážení vedoucího bakalářské práce a vedoucího ústavu. V případě publikace budu uveden jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 06. 06. 2005

.....

jméno diplomanta

Resumé

Anotace česky

Bakalářská práce je zaměřena na návrh a konstrukci přípravku pro demonstraci tahu a tlaku resp. vzpěru. V teoretické části je obsažena základní teorie o deformaci těles a namáhání v tahu a tlaku respektive vzpěru.

Ve druhé části jsou navrženy jednotlivé konstrukční alternativy uspořádání přípravku pro demonstraci a měření napětí - deformačních stavů vzorků namáhaných tahem, tlakem resp. vzpěrem.

Ve třetí části bakalářské práce jsou navrženy soubory vzorových metodických návrhů úloh z dané oblasti.

Ve čtvrté části jsou prakticky zhodnoceny jednotlivé typy úloh pro zvolená tělesa.

Anotace ve světovém jazyce

This bachelor's thesis deals with the design and construction of the device for tensile and stress demonstration and buckling demonstration. The theoretical part contains basic theories of body deformation and basic theories of tensile load, stress load and buckling load.

The second part contains individual design alternatives of the device for demonstration and measurement of tension-deformation states in samples that have been exposed to tensile, stress or buckling load.

The third part focuses on sets of systematic sample problems from the given area.

The fourth part offers an evaluation of particular problem types for selected bodies.

OBSAH

ÚVOD.....	6
1 TEORETICKÁ ČÁST.....	7
1.1 Pružná tělesa	7
1.1.1 Vnější síly	7
1.1.2 Vnitřní statické účinky	7
1.1.3 Hookeův zákon	10
1.2 Tah a tlak.....	11
1.2.1 Napětí a deformace při prostém tahu (tlaku)	12
1.2.2 Deformační práce a potenciální energie napjatosti u prostého tahu (tlaku)	14
1.2.3 Graf závislosti napětí na poměrném prodloužení (zkrácení) u tahu (tlaku).....	16
1.3 Vzpěr.....	17
1.3.1 Prut na jednom konci vetknutý – první případ vzpěru	18
1.3.2 Prut na obou koncích kloubově uložený – druhý případ vzpěru	20
1.3.3 Prut na jednom konci vetknutý a na druhém kloubově uložený – třetí případ vzpěru	22
1.3.4 Prut na obou koncích vetknutý– čtvrtý případ vzpěru.....	26
1.3.5 Redukované délky prutů pro jednotlivé případy vzpěru	29
2 NAVRŽENÉ ALTERNATIVY KONSTRUKČNÍHO USPOŘÁDÁNÍ PŘÍPRVKŮ PRO DEMONSTRACI A MĚŘENÍ TAHU, TLAKU RESP. VZPĚRU.....	30
2.1 Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci tahu	30
2.2 Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci tlaku	31
2.3 Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci vzpěru	32
3 SOUBORY VZOROVÝCH METODICKÝCH ÚLOH Z DANÉ OBLASTI.....	34
3.1 Návrh úlohy pro demonstraci tahu	34
3.2 Návrh úlohy pro demonstraci tlaku	37
3.3 Návrh úlohy pro demonstraci vzpěru	40
3.4 Návrh úlohy pro demonstraci vzpěru – vliv délky.....	43
4 APLIKACE VZOROVÉ ÚLOHY SE ZKUŠEBNÍM VZORKEM.....	47
4.1 Výpočet vzorové úlohy pro tah.....	47
ZÁVĚR.....	50
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	52
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	53
SEZNAM TABULEK	54
SEZNAM PŘÍLOH.....	55

ÚVOD

Ze zkušenosti víme, že v technické praxi se vlivem působení vnějších a vnitřních sil tělesa deformují. Díky těmto deformacím vzniká v tělesech vnitřní napětí, které způsobuje změnu vnitřní struktury tělesa a tím jeho mechanické vlastnosti. Hlavní otázkou, která nás tedy v technické praxi zajímá je úplný přehled všech dějů, které mají vliv na vlastnosti namáhaných těles, aby bylo možné na základě těchto znalostí navrhnout co nejlepší a nejodolnější konstrukční uspořádání výrobků. Namáhání a deformování těles má v technické praxi velký význam a je zkoumáno mnoha vědními obory.

Jednotlivé druhy namáhání vyžadují znalost základních poznatků teorie pružnosti a pevnosti. Při studiu základních typů namáhání je nezbytné si ověřit platnost vztahů a rovnic, které jsou odvozeny z prakticky prováděných pokusů. K tomuto účelu se používají jednoduché přípravky, které mohou s určitou tolerancí simulovat zatěžování a následné přetváření různých druhů materiálů nejrůznějšího tvaru.

Při navrhování různých dílů a součástek musí konstruktér volit materiál a rozměry takovým způsobem, aby navrhl takové řešení, které bude mít co nejlepší odolnost proti různým druhům namáháním a zároveň být co nejlevnější, což je při dnešních nárocích na technologické součástky velmi složité.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Pružná tělesa

1.1.1 Vnější síly

Na jednotlivé části konstrukcí působí celá řada sil, které můžeme rozdělit na dvě základní skupiny; a to na síly vnější a síly vnitřní. Vnější síly jsou síly hmotové (objemové), povrchové, osamělé a také statické a dynamické obtížení.

Síly hmotové (objemové) jsou například síly magnetické, elektrické, setrvačné atd., nebo-li síly, které působí na hmotu nebo objem částic tělesa a jsou úměrné velikosti příslušné hmotnosti nebo objemu.

Povrchové síly jsou takové síly, které působí na povrch bezprostředně vyšetřovaného tělesa. Mezi tyto síly patří síly akce i reakce uložení těles.

Osamělé síly jsou tlaky přenášené na vyšetřované těleso ploškou, jejíž rozměry jsou tak malé, že je můžeme zanedbat. Při výpočtu potom předpokládáme, že síla působí v bodě. Ve skutečnosti není možné tlak přenášet jen bodem. Nepřesnost vzniklá touto představou je však tak malá, že ji můžeme zanedbat.

Statické obtížení nebo statické síly jsou takové síly, které narůstají pomalu od nuly na vlastní hodnotu a po dosažení této hodnoty se mění jen velmi málo nebo vůbec. V tomto případě jsou setrvačné síly působící na těleso tak malé, že je můžeme zanedbat.

O dynamickém obtížení hovoříme v případě, jsou-li zrychlení bodů tělesa na které působí zatěžující síly tak veliké, že již nemůžeme setrvačné síly zanedbat.

Síly mohou působit na osaměle nebo spojitě na určené délce nebo ploše tělesa.

1.1.2 Vnitřní statické účinky

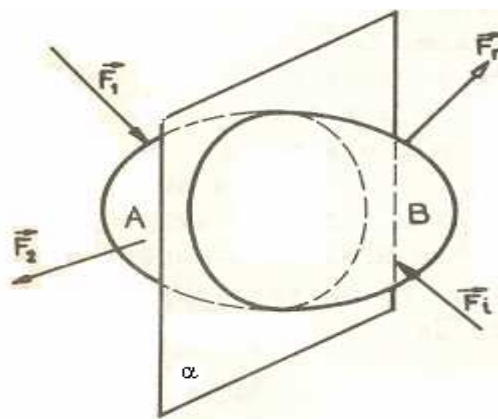
Části konstrukcí jsou vlivem působení vnějších sil deformovány, tzn. mění své rozměry a tvar. Pro zjištění vnitřních statických účinků silového působení používáme metodu myšleného řezu. Pomocí této metody můžeme stanovit vnitřní síly a momenty, ze kterých následně můžeme určit velikosti napětí a deformací.

Osvětlení postupu řešení pomocí metody myšleného řezu. Představme si těleso, na které působí rovnovážná soustava sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$. Dále si těleso rozdělme myšlenou

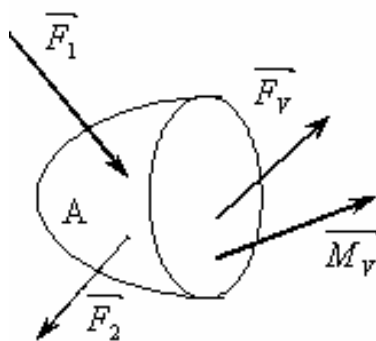
rovinou α na dvě části A a B. jednu část, například A, “ uvolníme “ a druhou část B myšleně odstraníme. Účinek myšleně odstraněné části B nahradíme v místě rozdělení rovinou α výslednicí sil $\vec{F}_v$ a momentovou výslednicí $\vec{M}_v$ všech sil působících na “ odstraněné “ části B tělesa.

Silová výslednice $\vec{F}_v$ se nazývá vektorem vnitřní síly a je dána vektorovým součtem všech sil. Momentová výslednice $\vec{M}_v$ se nazývá vektorem vnitřního momentu a je dána vektorovým součtem všech vektorů momentů sil na odstraněné části k bodu O . Bod O je zpravidla totožný s těžištěm T průřezu.

Rovina α je rovinou myšleného řezu (obr. 1). A – je myšleně uvolněná část tělesa; B – je myšleně odstraněná část tělesa.



Obr. 1 - Myšlený řez



Obr. 2 - Nahrazení myšleně odstraněné části vnitřní silovou a momentovou výslednicí

Postup určování složek účinků silové a momentové výslednice. Nejprve musíme určit počátek O souřadnicového systému, který obvykle volíme v těžišti T , plochy myšleného řezu a osu x vedeme kolmo k průřezu. Osou x a nositelkou síly $\vec{F}_v$ proložíme rovinu. Tato

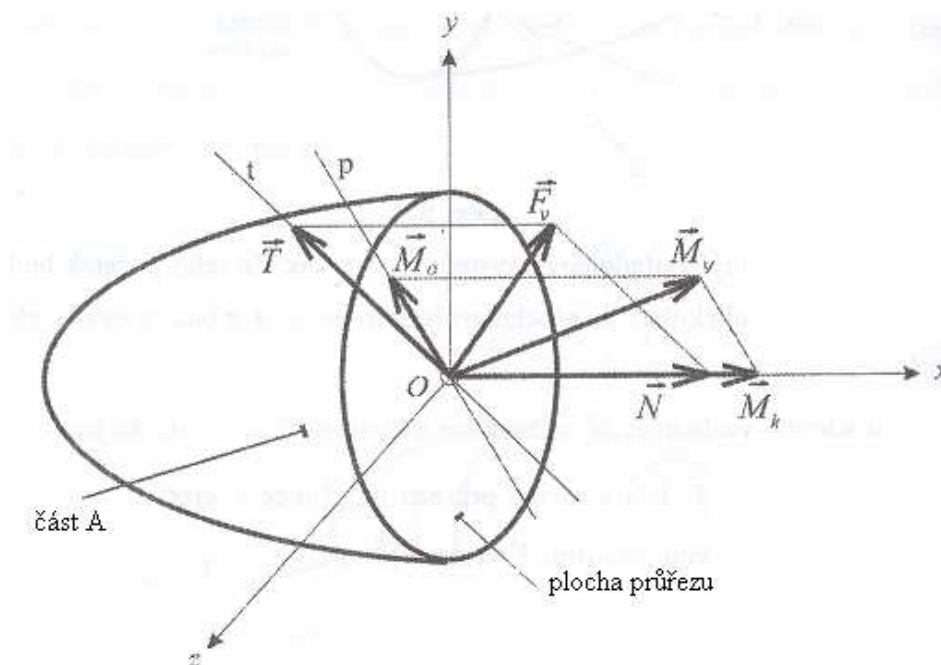
rovina protíná rovinu uvolněné části průřezu v průsečnici p . Vnitřní silová výslednice má podle zákona rovnoběžníka vektorů dvě složky. První složka se označuje písmenem $\vec{N}$, nazývá se normálová, leží na ose x kolmo k průřezu a podle svého smyslu vyjadřuje tahový respektive tlakový účinek “odstraněné” části na část “uvolněnou”. Druhá složka se označuje písmenem $\vec{T}$, nazývá se tečná, leží v rovině průřezu na přímce t a vyjadřuje smykový účinek. Platí: $\vec{F}_v = \vec{N} + \vec{T}$

Nyní proložíme rovinu osou x a nositelkou vektoru $\vec{M}_v$, která protíná rovinu řezu v průsečnici p . Rozkladem vektoru $\vec{M}_v$ na složky ve směru osy x a přímky m obdržíme vektory $\vec{M}_o$ a $\vec{M}_k$

Platí: $\vec{M}_v = \vec{M}_o + \vec{M}_k$

Složka $\vec{M}_o$ vektoru momentové výslednice se nazývá ohybový moment a vyjadřuje ohybové namáhání v daném průřezu.

Složka $\vec{M}_k$ vektoru momentové výslednice se nazývá krutící moment a vyjadřuje otáčivý účinek kolem osy x .



Obr. 3 - Rovnoběžníky vektorů sil a momentů

1.1.3 Hookeův zákon

Zobecněný Hookeův zákon pro izotropní těleso v prostoru je vyjádřen vztahy

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3)$$

Hookeův zákon pro jednoosou napjatost je dán vztahy

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (4)$$

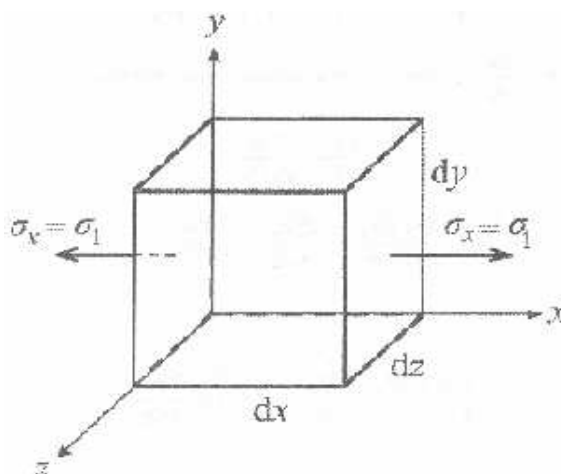
$$\varepsilon_y = \frac{\mu\sigma_y}{E} \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\mu\sigma_z}{E} \quad (6)$$

Poissonovo číslo μ je poměr podélné příčné změny délky a poměrného prodloužení

$$\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (7)$$

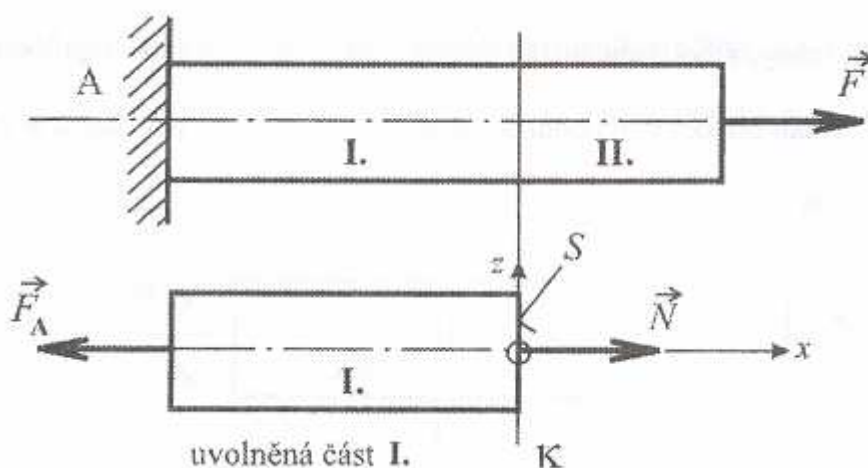
V prostém tahu (tlaku) se jedná o jednoosou napjatost (obr. 4) danou napětím σ_x , když



Obr. 4 – Jednoosá napjatost

1.2 Tah a tlak

Prostý tah nebo tlak je nejjednodušší druh namáhání tělesa. Podmínkou pro prostý tah (tlak) je, aby ve vyšetřovaném průřezu působila jen normálová vnitřní síla, tj. síla kolmá k ploše průřezu ve směru osy x (obr. 5). V takovém případě je na elementárním hranolku jednoosové napětí, kdy podle orientace jde o napětí v tahu $\sigma_x = \sigma_t > 0$ nebo napětí v tlaku $\sigma_x = \sigma_d < 0$. Prostým tahem jsou obvykle namáhána tělesa ve tvaru prutů u nichž je rozměr ve směru osy, resp. Střednice převládající nad ostatními příčnými rozměry. Prostým tlakem jsou namáhána tělesa jejichž délka ve směru osy není příliš velká a nedochází tedy při zatěžování k současnému ohybu.



Obr. 5 – Uvolnění prutu

Při namáhání prostým tahem (tlakem) se předpokládá, že

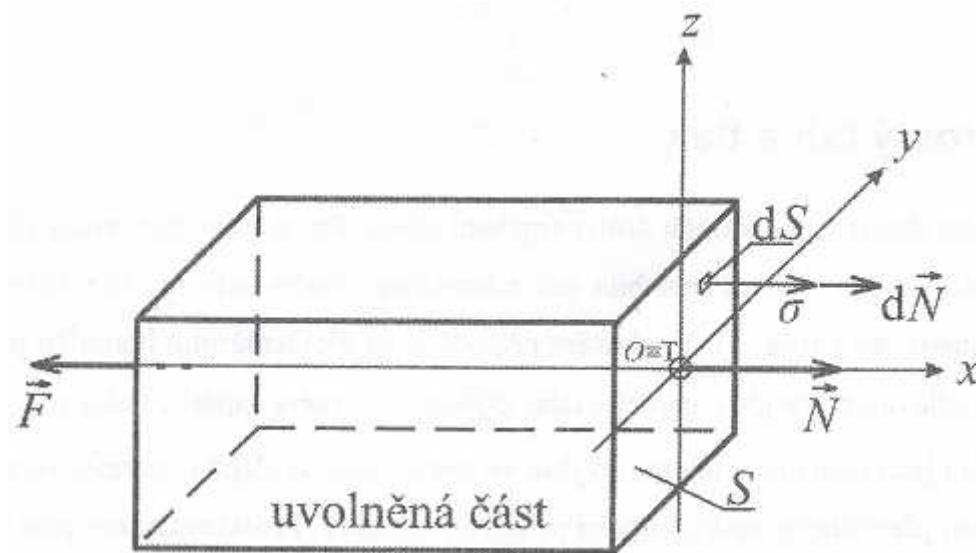
1. příčné rovinné průřezy zůstávají i po deformaci rovinné,
2. průřezy se při zatížení jen vůči sobě vzdalují nebo přibližují – nenaklání se ani se nenatáčejí,
3. tvar průřezu se nemění,
4. podélná vlákna na sebe netlačí,

Namáháním prostým tahem nebo nedochází ke změnám pravých úhlů. Pro jednoosou napjatost platí Hookeův zákon ve tvaru $\sigma_x = E\varepsilon_x$

1.2.1 Napětí a deformace při prostém tahu (tlaku)

Z druhého předpokladu vyplývá, že ve všech bodech průřezu je ε_x stejné a tudíž i napětí je ve všech bodech stejné – proto je napětí po celé ploše průřezu rovnoměrně rozložené. Tento předpoklad je splněn v dostatečné vzdálenosti od působíště vnější osově síly a mimo oblast náhlé změny tvaru.

K vyšetřování napětí použijeme metodu myšleného řezu a uvolňování tělesa. Na (obr. 6) je uvolněná část prizmatického prutu zatíženého tahem osově síly $\vec{F}$. Účinek odstraněné části tělesa na uvolněnou část, který je celkově dán vnitřní normálovou silou $\vec{N}$, se přenáší všemi body plochy průřezu.



Obr. 6 – Uvolněná část prizmatického prutu

Síla $\vec{N}$ je výslednicí elementárních sil $d\vec{N}$ na ploškách dS , její velikost je

$$N = \int_{(S)} dN$$

Součin normálového napětí $\sigma_x = \sigma$ a plošky dS je elementární normálová síla

$$dN = \sigma dS$$

Po dosazení je

$$N = \int_{(S)} \sigma dS$$

Protože předpokládáme, že napětí σ je ve všech bodech plochy S stejné, lze σ vytknout před integrál

$$N = \sigma \int_{(S)} dS = \sigma S$$

Z toho plyne velikost napětí

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (8)$$

Z podmínky rovnováhy sil na uvolněné části je

$$N - F = 0$$

$$N = F$$

a napětí je

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{F}{S} \quad (9)$$

Normálové napětí je v tomto případě dáno podílem normálové vnitřní síly a celkové plochy průřezu.

Elementární délka dx se účinem namáhání tahem (tlakem) prodlouží (zkrátí) o $d(dx)$ a poměrná změna délky bude $\varepsilon = \frac{d(dx)}{dx}$. Odpovídající napětí je z Hookeova zákona

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{d(dx)}{dx}, \text{ přičemž také } \sigma = \frac{N}{S}, \text{ takže } E \frac{d(dx)}{dx} = \frac{N}{S}.$$

Z poslední rovnice plyne prodloužení

$$d(dx) = \frac{Ndx}{SE}$$

Celkové prodloužení délky l je

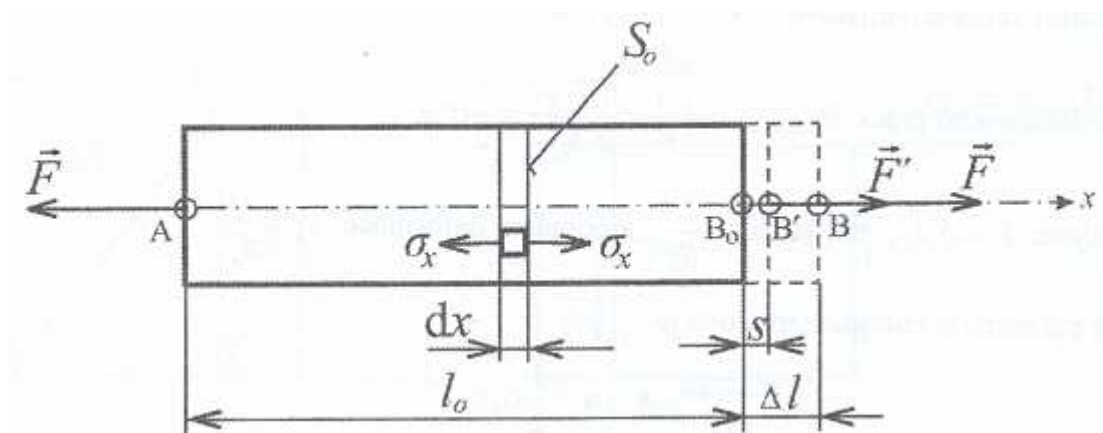
$$\Delta l = \int_{(l)} d(dx) = \int_{(l)} \frac{Ndx}{SE} \quad (10)$$

Je – li v rozsahu celé délky konstantní vnitřní normálová síla $N = F$ a konstantní plocha S , je

$$\Delta l = \frac{F}{SE} \int_0^l dx = \frac{Fl}{SE} \quad (11)$$

1.2.2 Deformační práce a potenciální energie napjatosti u prostého tahu (tlaku)

Pro odvození vztahu pro deformační práci a potenciální energii napjatosti budeme nyní uvažovat tyč osově zatíženou silami $\vec{F}$ podle (obr. 7), kdy v příčném průřezu působí pouze napětí σ_x ve směru podélné osy tyče.

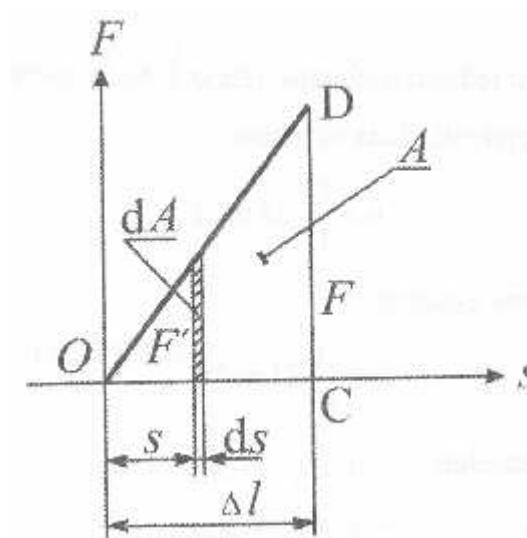


Obr. 7 – Zatížení prutu prostým tahem

Vnější zatížení $\vec{F}$ narůstá pomalu od 0 do maxima lineárně a působíště síly se přemísťuje na deformační dráze s . Při přemístění na elementární dráze ds vykoná síla $\vec{F}$ elementární deformační práci.

$$dA = F' ds$$

Na grafu (obr. 8) je tato práce vyjádřena plochou proužku pod přímkou $F = f(s)$.



Obr. 8 – Grafické vyjádření deformační práce v závislosti síly $\vec{F}$ na deformační dráze s

Z podobnosti trojúhelníků je $\frac{F'}{F} = \frac{s}{\Delta l}$ a $F' = \frac{s}{\Delta l} F$

Celková deformační práce

$$A = \int_0^{\Delta l} F' ds = \int_0^{\Delta l} \frac{F}{\Delta l} s ds = \frac{F}{\Delta l} \frac{(\Delta l)^2}{2} = \frac{1}{2} F \Delta l \quad [J] \quad (12)$$

Potenciální energie napjatosti

$$U = A = \frac{1}{2} F \Delta l \quad (13)$$

Měrná deformační práce je

$$a = \frac{A}{V} = \frac{1}{2} \frac{F \Delta l}{S_0 l_0} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad (14)$$

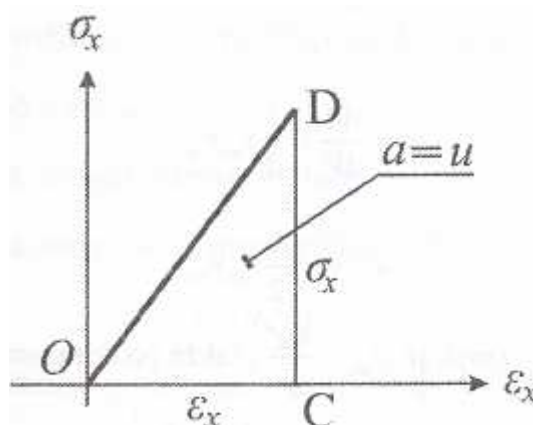
Kde objem $V = S_0 l_0$, napětí $\sigma_x = \frac{F}{S_0}$ a poměrná deformace $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}$

Měrná potenciální energie napjatosti je

$$u = a = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad (15)$$

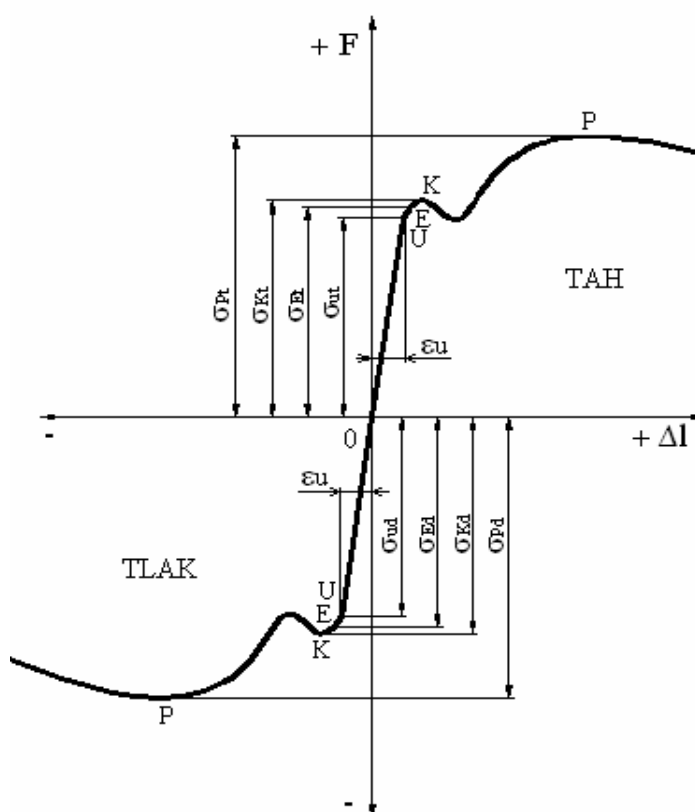
Z Hookeova zákona pro čistý tah je $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$, takže po dosazení je také

$$u = \frac{1}{2} \sigma_x \frac{\sigma_x}{E} = \frac{(\sigma_x)^2}{2E} \quad (16)$$



Obr. 9 – V grafu závislosti $\sigma_x = f(\varepsilon_x)$ je u vyjádřena plochou trojúhelníka OCD

1.2.3 Graf závislosti napětí na poměrném prodloužení (zkrácení) u tahu (tlaku)



Obr. 10 – Průběh natahování (stlačování) kovového materiálu v závislosti na zatížení

Na (obr. 10) je znázorněn tzv. smluvní diagram pro namáhání v tahu a tlaku. Tento diagram znázorňuje závislost zatěžující síly na poměrném prodloužení (zkrácení).

Popis obr. 10

F – Zatěžující síla

Δl – prodloužení (zkrácení)

σ_{ut} – Napětí na mezi úměrnosti v tahu

σ_{Et} – Napětí na mezi elasticity v tahu

σ_{Kt} – Napětí na mezi kluzu v tahu

σ_{Pt} – Napětí na mezi pevnosti v tahu

σ_{ud} – Napětí na mezi úměrnosti v tlaku

σ_{Ed} – Napětí na mezi elasticity v tlaku

σ_{Kd} – Napětí na mezi kluzu v tlaku

σ_{Pd} – Napětí na mezi pevnosti v tlaku

Na ose x jsou vyznačeny hodnoty poměrného prodloužení (zkrácení) ϵ_u (hodnoty ϵ_E a ϵ_K) nejsou vyznačeny.

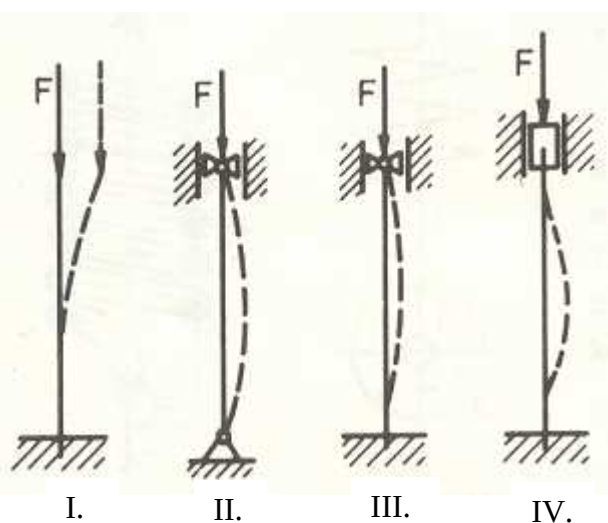
1.3 Vzpěr

Stlačujeme-li přímý prut podélnou silou, která působí v ose prutu a délka prutu je oproti příčným rozměrům velká, zjišťujeme, že prut si zachovává svůj přímý tvar jen do té doby, pokud je síla $\vec{F}$ dostatečně malá.

Vychýlíme-li prut pomalu z přímočarého tvaru krátkodobou příčnou silou, zjišťujeme, že po odstranění krátkodobě působící příčné síly se prut opět vrátí do původního přímého tvaru. V takovém případě říkáme, že prut je ve stabilní rovnováze. Při postupném zvětšování podélné síly $\vec{F}$ se bude prut stále pomaleji vracet do původní polohy. Dosáhne-li síla F určité mezní hodnoty, potom se prut po nevelkém vybočení, již nevrátí do původního přímého tvaru a zůstane již ohnutý. Prut se ustálí v nové, kvalitativně úplně odlišné rovnovážné poloze.

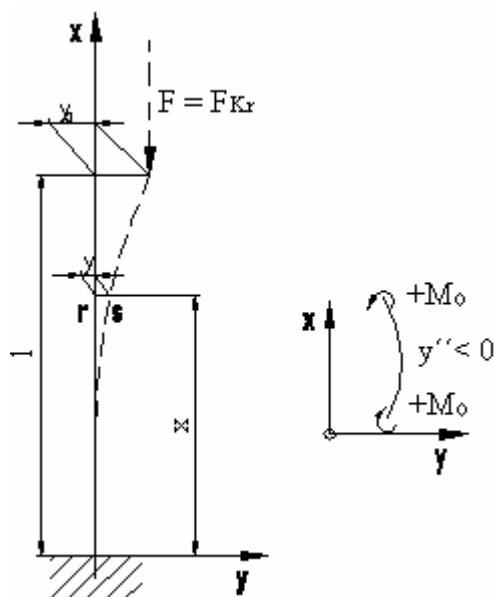
Tuto mezní hodnotu síly nazýváme kritickou silou (F_{Kr}) nebo také Eulerovou vzpěrnou silou (F_E). Kritické hodnoty dosahuje síla $\vec{F}$ náhle. Stačí jen velmi málo zmenšit tlakovou sílu vzhledem k její kritické hodnotě, aby prut znovu dosáhl stabilní rovnováhy. V opačném případě, převýší-li tlaková síla F kritickou hodnotu, potom průhyb prutu rychle roste, až dosáhne tzv. labilní polohy což je vlastně porušení.

Můžeme tedy sílu F_{Kr} považovat za hodnotu mezního stavu stability, tj. za kritickou hodnotu, kterou zatěžující síla $\vec{F}$ nesmí dosáhnout. Obecně můžeme říci, že úkazy nestability se vyskytují při každém druhu namáhání, kde se vyskytuje tlakové napětí. U prutů namáhaných tlakem závisí velikost kritické síly na způsobu upevnění konce prutu (tyče). Podle toho rozeznáváme čtyři základní druhy vzpěru.



Obr. 11 - Čtyři základní druhy vzpěru

1.3.1 Prut na jednom konci vetknutý – první případ vzpěru



Obr. 12 – První případ vzpěru

Předpokládejme, že přímý prizmatický prut zanedbatelné tíhy, na jednom konci vetknutý, je zatížen Osovou silou $F = F_{Kr}$. Vyhne-li jej mírně z původní polohy, potom prut zůstane i nadále prohnutý pokud ovšem $F = F_{Kr}$ (obr. 12). Libovolný průřez $r - s$ prutu je přitom namáhán tlakem a ohybem. Protože napětí příslušející tlaku mají jen malý vliv na deformaci, proto je nebudeme při výpočtu uvažovat.

Předpokládáme-li dále jen malé průhyby, můžeme k řešení úlohy použít jen přibližné diferenciální rovnice průhybové čáry prutu. Pro zvolený souřadnicový systém a smysl kladného ohybového momentu podle (obr. 12) bude diferenciální rovnice průhybové čáry

$$y'' = -\frac{M_o}{EJ_z} \quad (17)$$

Ohybový moment síly F k řezu $r - s$ je

$$M_o = -F(y_0 - y) \quad (18)$$

Po dosazení do diferenciální rovnice průhybové čáry dostaneme

$$y'' + k^2 y = k^2 y_0$$

$$\text{kde: } k^2 = \frac{F}{EJ_z}$$

E – je modul pružnosti materiálu prutu v tahu

J_z – je menší z hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu

Řešení diferenciální rovnice (č. 17) je

$$y = A \sin kx + B \cos kx + y_0 \quad (19)$$

kde A a B jsou integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Jak je z (obr. 12) vidět, jsou pro vyšetřovaný případ okrajové podmínky :

Po dosazení rovnice (č.19) a její derivace do okrajových podmínek obdržíme

$$0 = B + y_0; 0 = Ak$$

a odtud

$$A = 0 ; B = -y_0$$

Rovnice (č.19) potom nabude tvaru

$$y = y_0(1 - \cos kx)$$

Další okrajová podmínka, které musí průhybová čára vyhovovat , je pro místo $x = l$, kde

Je průhyb y roven průhybu y_0 . Musí tedy platit

$$y_0 = y_0(1 - \cos kl)$$

Tato rovnice při $y_0 \neq 0$ splněna pouze tehdy když

$$\cos kl = 0$$

nebo-li

$$kl = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

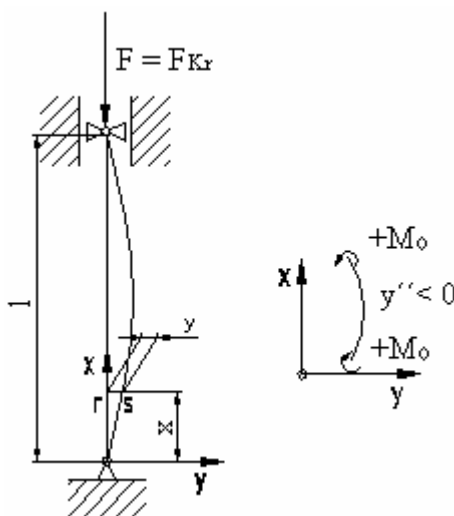
Dosadíme-li za $k = \sqrt{\frac{F}{EJ_z}}$ dostaneme po úpravě

$$F = \frac{\pi^2 EJ_z}{4l^2} (2n + 1)^2$$

Z praktického hlediska nás zajímá nejmenší hodnota tlakové síly F , která může udržet prohnutý prut v rovnováze. Získáme ji z předchozí rovnice, jestliže v ní položíme $n = 0$. takovouto sílu nazýváme Kritickou nebo Eulerovou a je dána vztahem

$$F_{Kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(2l)^2} \quad (20)$$

1.3.2 Prut na obou koncích kloubově uložený – druhý případ vzpěru



Obr. 13 – Druhý případ vzpěru

I v tomto případě zatížíme prut tlakovou osovou silou $F = F_{Kr}$ a mírně jej prohne. Zanedbáme – li účinek tlaku a zvolíme – li souřadnicový systém a kladný ohybový moment podle (obr. 13) je diferenciální rovnice průhybové čáry

$$y'' = -\frac{M_0}{EJ_z}$$

Ohybový moment síly F k řezu $r - s$ je

$$M_0 = F y$$

Po dosazení do diferenciální rovnic průhybové čáry dostaneme

$$y'' + k^2 y = 0$$

$$\text{kde: } k^2 = \frac{F}{EJ_z}$$

E – je modul pružnosti materiálu prutu v tahu

J_z – je menší z hlavních centrálních kvadratických momentů průřezu

Po dosazení do lineární diferenciální rovnice a jejím řešení dostaneme

$$y = A \sin kx + B \cos kx \quad (21)$$

kde A a B jsou integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Jak je z (obr. 13) vidět, jsou pro vyšetřovaný případ okrajové podmínky :

Podmínka číslo 1

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } y = 0$$

Podmínka číslo 2

$$\text{pro } x = 1 \text{ je } y = 0$$

Z první podmínky plyne, že

$$B = 0$$

Průhybová čára je zde tedy sinusovka a je dána rovnicí

$$y = A \sin kx \quad (22)$$

Použijeme – li druhou okrajovou podmínku dostaneme

$$0 = A \sin kl \quad (23)$$

Jak je vidět z rovnice (č. 22) , má-li nastat průhyb prutu, musí být $A \neq 0$. Rovnice (č. 23) může být splněna jen tehdy pokud

$$\sin kl = 0$$

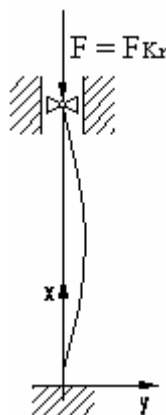
a také

$$kl = n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Z toho po umocnění a dosazení za $k^2 = \frac{F}{EJ_z}$ dostaneme

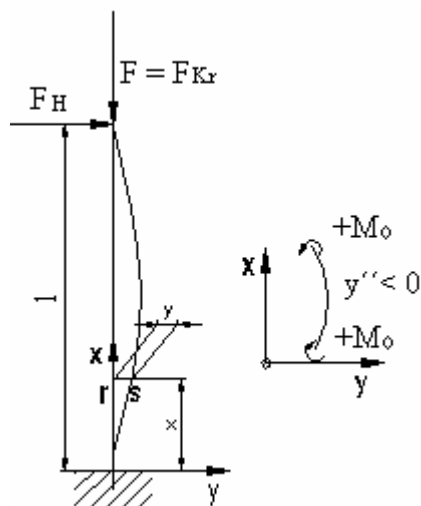
$$F = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2} n^2 \quad (24)$$

1.3.3 Prut na jednom konci vetknutý a na druhém kloubově uložený – třetí případ vzpěru



Obr. 14 – Třetí případ vzpěru

Je-li jedna část prutu vetknutá a druhá část prutu opřená v posuvně vedeném kloubu vedeném ve směru síly $\vec{F}$ (obr. 14), potom tento případ uložení označujeme jako třetí případ vzpěrné pevnosti. Uvážíme – li, že kloub se může pohybovat jen ve svislém směru, pak musí nutně působit vedení na prut při jeho vybočení horizontální silou F_H (obr. 15).



Obr. 15 – Zatěžující síly u třetího případu vzpěru

Diferenciální rovnice průhybové čáry pro zvolený souřadnicový systém a kladný ohybový moment je

$$y'' = -\frac{M_o}{EJ_z}$$

Ohybový moment k libovolnému průřezu $r - s$ bude

$$M_o = -F_y - F_H(1 - x)$$

Po jeho dosazení do rovnice (č. 17) dostaneme po úpravě

$$y'' + k^2 y = \frac{F_H}{EJ_z}(1 - x) \quad (25)$$

Řešení rovnice lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou je

$$y = y_h + y_p$$

kde

$$y_h = A \sin kx + B \cos kx \quad (26)$$

rovnice (č. 26) je řešením lineární diferenciální rovnice bez pravé strany

y_p – je partikulární integrál diferenciální rovnice s pravou stranou

Protože pravá strana diferenciální rovnice (č. 25) je polynom prvního stupně, proto musíme najít partikulární integrál také ve tvaru prvního stupně

$$y_p = C_1 x + C_2 \quad (27)$$

Má – li být y_p partikulární řešení rovnice (č. 25) , musí ji identicky splňovat. Z této podmínky také vypočteme neznámé konstanty C_1 a C_2 . Dosadíme – li tedy rovnici vztah (č. 27) do rovnice (č. 25), dostaneme

$$k^2 C_1 x + k^2 C_2 = \frac{F_H}{EJ_z} l - \frac{F_H}{EJ_z} x$$

odtud získáme

$$C_1 = -\frac{F_H}{k^2 EJ_z} = -\frac{F_H}{F}$$

$$C_2 = \frac{F_H}{k^2 EJ_z} l = \frac{F_H}{F} l$$

Partikulární integrál (č. 27) pak bude

$$y_p = \frac{F_H}{F}(l - x)$$

Obecné řešení rovnice (č. 25) a její derivace potom je

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{F_H}{F}(l - x)$$

(28)

$$y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx - \frac{F_H}{F}$$

K určení třech neznámých tj. dvou integračních konstant A, B a neznámé síly F_H , sestavíme tři okrajové podmínky

Podmínka číslo 1

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } y = 0$$

Podmínka číslo 2

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } y' = 0$$

Podmínka číslo 3

$$\text{pro } x = l \text{ je } y = 0$$

Po dosazení rovnic (č. 28) do těchto podmínek dostáváme

$$0 = B + \frac{F_H}{F}l; \quad 0 = Ak - \frac{F_H}{F}; \quad 0 = A \sin kl + B \cos kl$$

Z první a druhé rovnice získáme

$$B = -\frac{F_H}{F}l; \quad A = \frac{F_H}{Fk}$$

a ze třetí rovnice pak po dosazení za A a B pak

$$\frac{F_H}{F} \left(\frac{1}{k} \sin kl - l \cos kl \right) = 0 \quad (29)$$

Vzhledem k tomu, že A a B jsou lineárními homogenními funkcemi F_H , proto má – li y

(viz rovnice č. 28) v libovolném místě daném souřadnicí x nenulové, musí být splněna podmínka $F_H \neq 0$. rovnice (č. 29) bude tedy splněna přitom splněna jen tehdy, jestli – že

$$\frac{1}{k} \sin kl = l \cos kl$$

nebo – li

$$\tan kl = kl \quad (30)$$

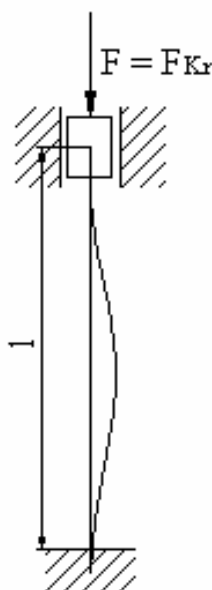
Rovnice (č. 30) má nekonečně mnoho řešení. Nejmenší možný nenulový kořen je

$$kl \cong 4,493$$

Odtud po umocnění a dosazení za k^2 obdržíme

$$F_{Kr} = \frac{20,16EJ_z}{l^2} \cong \frac{2\pi^2 EJ_z}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ_z}{\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad (31)$$

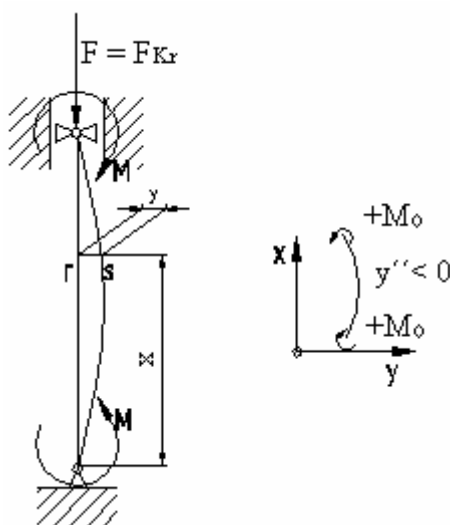
1.3.4 Prut na obou koncích vetknutý– čtvrtý případ vzpěru



Obr. 16 – Čtvrtý případ vzpěru

Pro odvození kritické vzpěrné síly nahradíme vetknutí dvěma klouby a dvěma momenty, které jsou z důvodu symetrie co do absolutní hodnoty stejně velké. Na (obr. 17) jsou označeny momenty M_o . Pro zvolený souřadnicový systém a kladný moment bude diferenciální rovnice průhybové čáry

$$y'' = -\frac{M_o}{EJ_z}$$



Obr. 17 – Vyznačení sil a momentů u čtvrtého případu vzpěru

Ohybový moment k řezu $r-s$ je

$$M_o = F_y - M$$

Po dosazení do diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme

$$y'' + k^2 y = \frac{M}{EJ_z} \quad (32)$$

kde

$$k^2 = \frac{F}{EJ_z}$$

Řešení této diferenciální rovnice a jeho derivace je

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M}{F} \quad (33)$$

$$y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx$$

K určení třech neznámých tj. dvou integračních konstant A, B a neznámého momentu M, sestavíme tři okrajové podmínky

Podmínka číslo 1

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } y = 0$$

Podmínka číslo 2

$$\text{pro } x = 0 \text{ je } y' = 0$$

Podmínka číslo 3

$$\text{pro } x = l \text{ je } y = 0$$

Po dosazení rovnic (č. 33) do těchto podmínek dostaneme

$$0 = B + \frac{M}{F}; \quad 0 = Ak; \quad 0 = A \sin kl + B \cos kl + \frac{M}{F}$$

Z první a druhé rovnice dostaneme

$$A = 0; \quad B = -\frac{M}{F}$$

Po jejich dosazení do třetí rovnice dostaneme

$$\frac{M}{F}(1 - \cos kl) = 0 \quad (34)$$

Vzhledem k tomu, že A a B jsou homogenními funkcemi M, proto má – li být y

(viz rovnice č. 33) v libovolném místě daném souřadnicí x nenulové, musí být $M \neq 0$. Za této podmínky bude řešení rovnice (č.34)

$$\cos kl = 1$$

odtud získáme vztah

$$kl = 2n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Odtud po umocnění a dosazení za k^2 obdržíme

$$F_{Kr} = \frac{4\pi EJ_z}{l^2} n^2 = \frac{\pi^2 EJ_z}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} n^2$$

Z praktického hlediska nás zajímá nejmenší od nuly různá hodnota tlakové síly F, která může udržet prut v indiferentní rovnováze. Tuto hodnotu získáme z rovnice č. 34 , dosadíme – li za $n = 1$. Je tedy

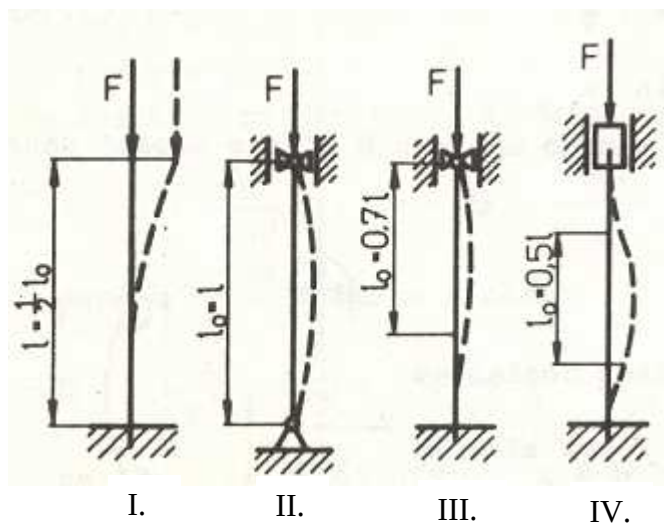
$$F_{Kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{(0,5l)^2} \quad (35)$$

Hodnoty kritické síly pro jednotlivé případy vzpěru se od sebe liší jen číselným součinitelem. Proto můžeme všechny případy vyjádřit jedinou rovnicí

$$F_{Kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} \quad (36)$$

kde l_0 je redukovaná nebo ideální vzpěrná délka prutu

1.3.5 Redukované délky prutů pro jednotlivé případy vzpěru



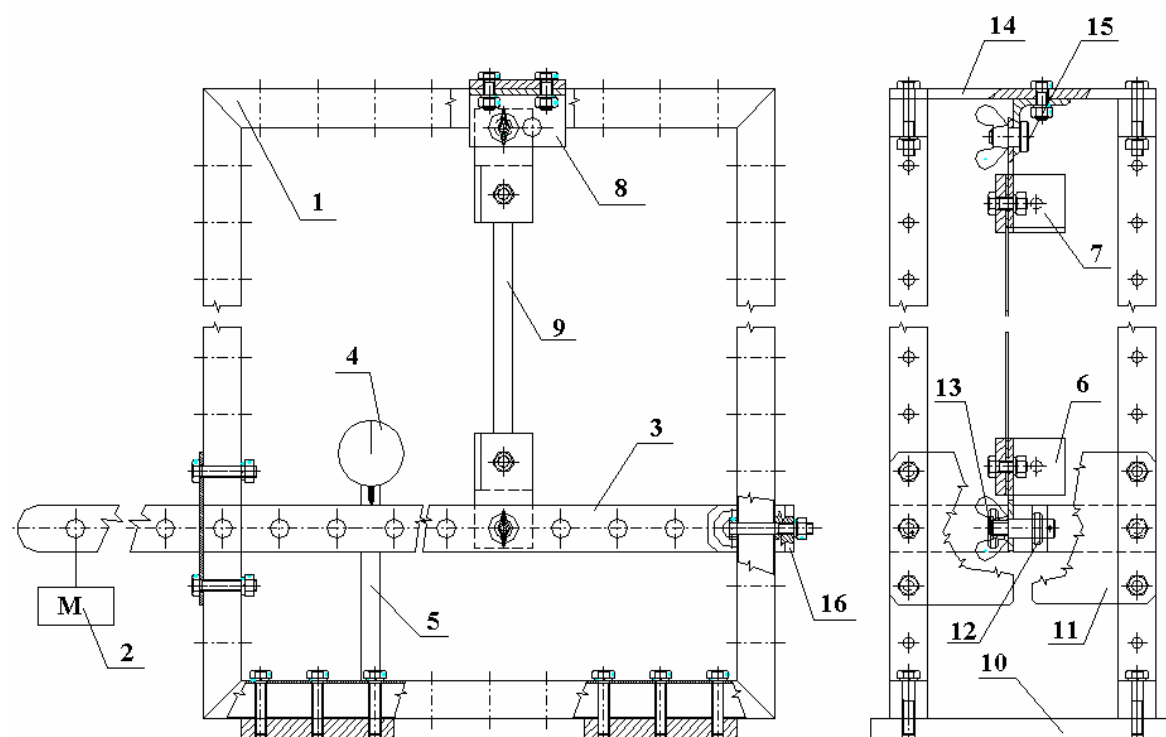
Obr. 18 – Redukované délky pro čtyři případy vzpěru

Pro jednotlivé případy vzpěru jsou redukované délky uvedené na (obr. 18). Redukovaná vzpěrná délka je tedy jen ta část délky prutu, která má po vybočení stejný tvar jako tyč na obou koncích kloubově uložená.

Jak je z rovnice (č. 36) vidět, závisí kritická síla jen od pružných vlastností materiálu a rozměrů prutu, nezávisí však na pevnosti materiálu. Odtud také vyplývá , že použití legované oceli by nepřineslo oproti uhlíkové oceli žádnou výhodu, protože jejich modul pružnosti v tahu je přibližně stejný. Dále je potřebné připomenout, že tyč vždy vybočí ve směru nejmenšího centrálního kvadratického momentu.

2 NAVRŽENÉ ALTERNATIVY KONSTRUKČNÍHO USPOŘÁDÁNÍ PŘÍPRVKŮ PRO DEMONSTRACI A MĚŘENÍ TAHU, TLAKU RESP. VZPĚRU

2.1 Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci tahu



Obr. 19 - Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci tahu

Popis jednotlivých pozic :

- 1 - Rám
- 2 - Závaží
- 3 - Rameno
- 4 – Číselníkový úchylkoměr
- 5 – Držák číselníkového úchylkoměru
- 6 – Horní držák pro připevnění vzorku na tah
- 7 – Dolní držák pro připevnění vzorku na tah
- 8 – Profil L pro kloubové uložení horního držáku
- 9 – Zkoušený vzorek
- 10 – Podstava rámu
- 11 – Vodící deska

12 – Čep

13 - Čep 2

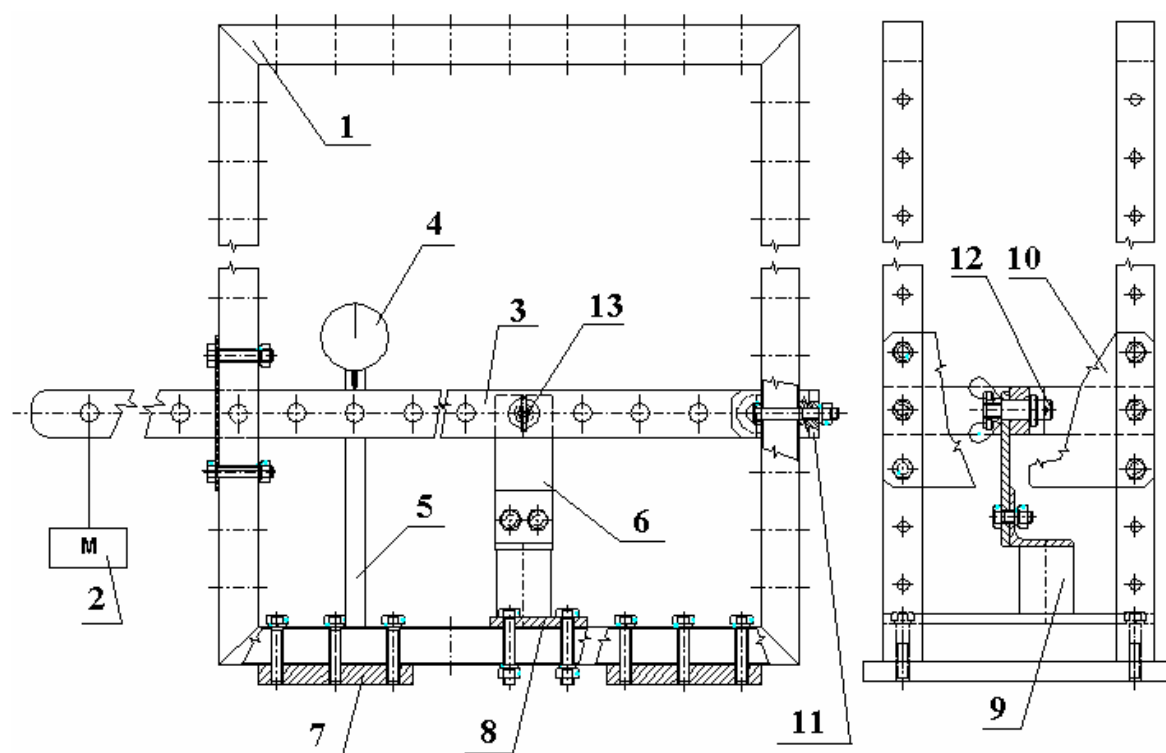
14 – Nosník pro připevnění pozice 8

15 – Podložka

16 - Vidlice

Na (obr. 19) je navrženo konstrukční uspořádání přípravku vhodného na demonstraci tahu pro vzorky čtvercového a obdélníkového průřezu. Vzorky, na kterých bude demonstrován tah mohou být různé délky a tloušťky . Pro tento jednoduchý přípravek je vhodné volit materiál vzorků z gumy a plastů. Ocelové materiály lze volit pouze pro vzorky s velmi malým průřezem, aby bylo možné naměřit výraznější deformaci.

2.2 Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci tlaku



Obr. 20 – Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci tlaku

Popis jednotlivých pozic :

1 - Rám

2 - Závaží

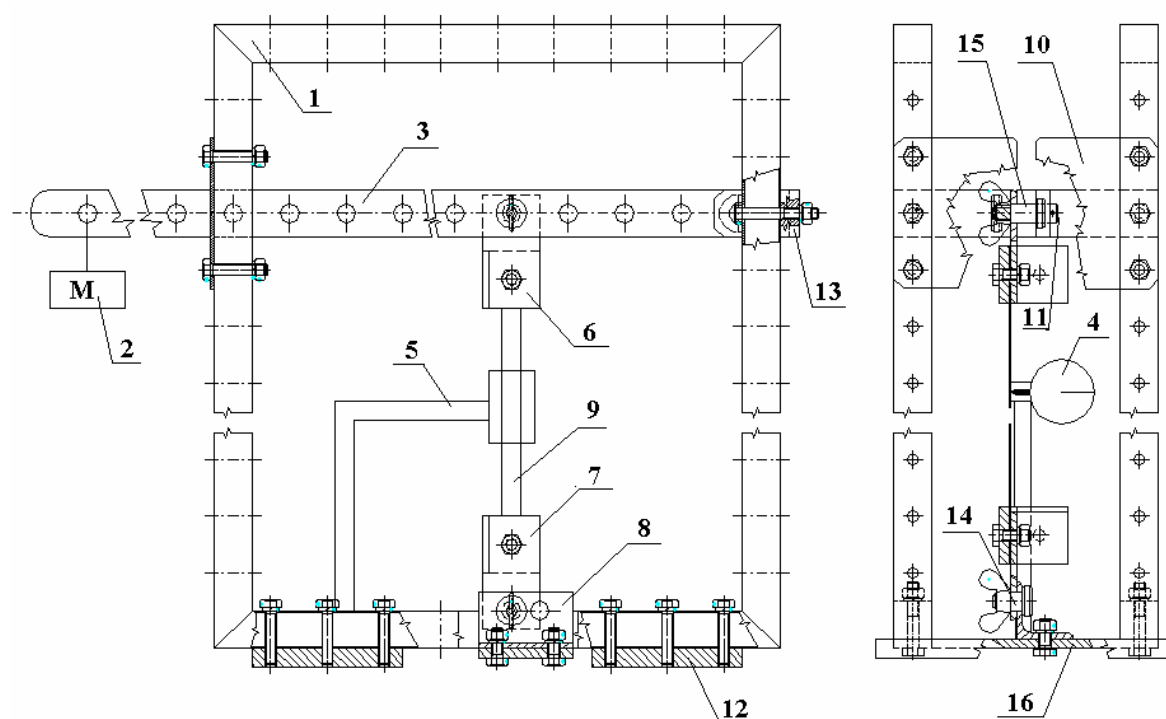
3 - Rameno

4 – Číselníkový úchylkoměr

- 5 – Držák číselníkového úchylkoměru
- 6 – Rameno s profilem L pro tlačení zkušební vzorku
- 7 – Podstava rámu
- 8 – Podstava pro zkoušený vzorek
- 9 – Zkoušený vzorek
- 10 – Vodící deska
- 11 – Vidlice
- 12 – Čep
- 13 - Čep 2

Na (obr. 20) je navrženo konstrukční uspořádání přípravku je vhodné na demonstraci tlaku pro vzorky kruhového a nekruhového průřezu. Vzorky, na kterých bude demonstrován tlak mohou být různé délky a tloušťky . Pro tento jednoduchý přípravek je vhodné volit materiál vzorků z gumy popřípadě plastů, ale ne kovové, protože nelze dosáhnout takového zatížení ,aby se dala naměřit výrazná deformace.

2.3 Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci vzpěru



Obr. 21 - Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci vzpěru

Popis jednotlivých pozic :

- 1 - Rám
- 2 - Závaží
- 3 - Rameno
- 4 – Číselníkový úchylkoměr
- 5 – Držák číselníkového úchylkoměru
- 6 – Horní držák pro připevnění vzorku na vzpěr
- 7 – Dolní držák pro připevnění vzorku na tah
- 8 – Profil L pro kloubové uložení dolního držáku
- 9 – Zkoušený vzorek
- 10 – Vodící deska
- 11 – Čep
- 12 – Podstava rámu
- 13 – Vidlice
- 14 – Čep 2
- 15 – Čep 3
- 16 – Nosník pro připevnění pozice 8

Na (obr. 21) je navrženo konstrukční uspořádání přípravku, které je vhodné k demonstraci vzpěru pro vzorky čtvercového a obdélníkového průřezu. Vzorky, na kterých bude demonstrován vzpěr mohou být různé délky a tloušťky . Pro tento jednoduchý přípravek je vhodné volit materiál vzorků z gumy, plastů popřípadě tenkých kovových pásků.

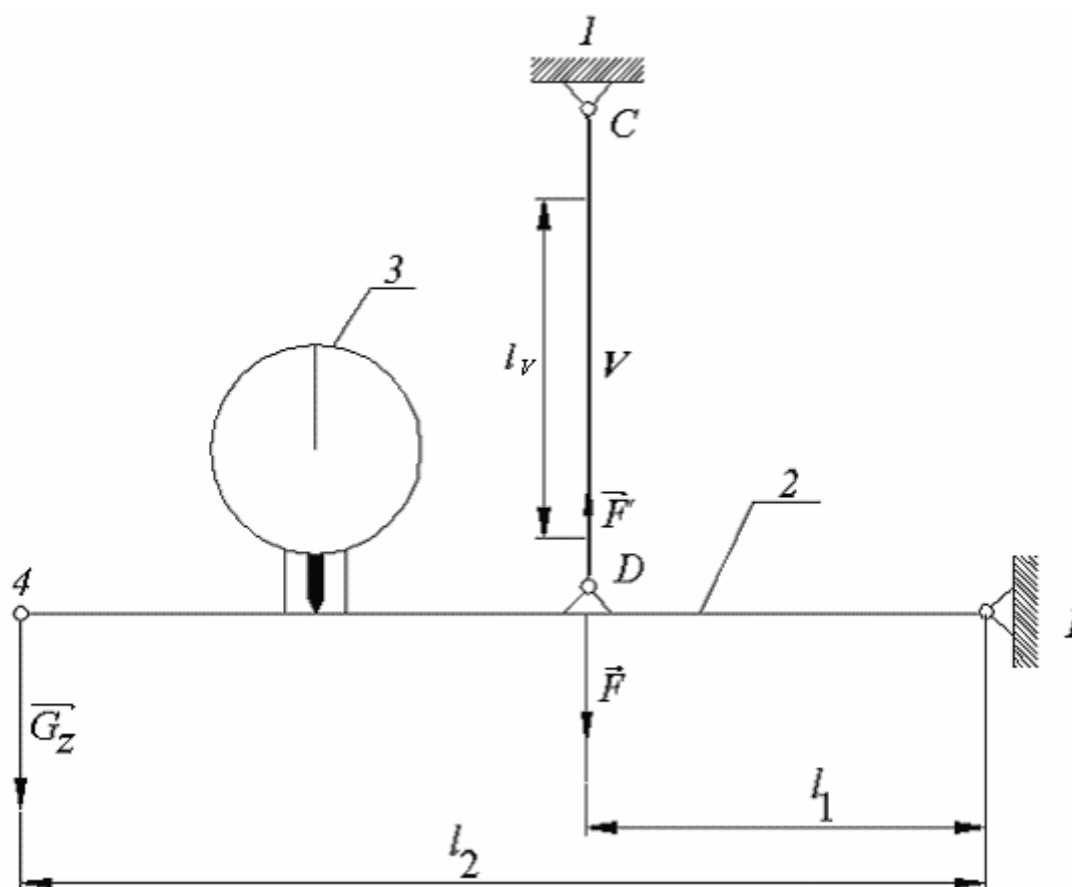
3 SOUBORY VZOROVÝCH METODICKÝCH ÚLOH Z DANÉ OBLASTI

3.1 Návrh úlohy pro demonstraci tahu

Zadání:

Stanovte modul pružnosti v tahu u vzorku z daného materiálu (pryž, plast, ocel).
Modul určete vyhodnocením grafické závislosti napětí na poměrném prodloužení.

Schéma tahového zařízení :



Obr. 22 – Schéma zařízení pro demonstraci tahu

1 – Rám

2 – Rameno

3 – Setinové hodinky

4 – Místo pro upevnění závaží

C – Místo pro upevnění vzorku

D - Místo pro upevnění vzorku

V – Vzorek

l_v – Počáteční délka vzorku

Postup :

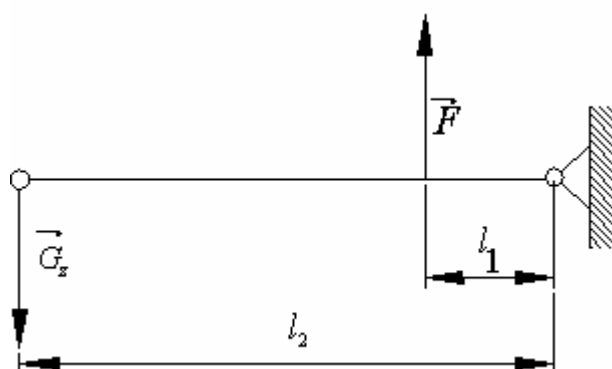
Nejprve proměříme plastový nebo pryžový vzorek. Poté vzorek upevníme na rám do bodu C a D. Vzorek upevníme pomocí šroubů a pevně jej utáhneme. K ramenu (poz. 2) přiložíme setinové hodinky (poz. 3) a vynulujeme je. Na konec ramena (poz. 4) umístíme závaží o hmotnosti m_1 . Prosté prodloužení pracovní délky Δl je poté dáno posunem ramene (poz. 2) a jeho velikost odečteme ze setinových hodinek. Tento postup opakujeme 10x pro dvě různá závaží.

Síla $\vec{F}$, která působí na vzorek ve směru jeho podélné osy je dána tíhou závaží $\vec{G}_z$ a délkami l_1 a l_2 ramene páky.

Tíha závaží $\vec{G}_z$ je dána vztahem

$$G_z = m_z g \quad (37)$$

kde $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$



Obr. 23 - Síly působící na rameni

Z podmínky rovnováhy určíme velikost síly $\vec{F}$, která působí na zatěžovaný vzorek (obr. 23)

$$F l_1 - G_z l_2 = 0 \quad (38)$$

Velikost síly

$$F = \frac{G_z l_2}{l_1} \quad (39)$$

Výpočet hodnot poměrného prodloužení je dán vztahem

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_v} \quad (40)$$

kde l_v je počáteční délka pracovní části prizmatického vzorku při nulovém zatížení

Hodnoty napětí v jednotlivých případech zatížení určíme ze vztahu

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (41)$$

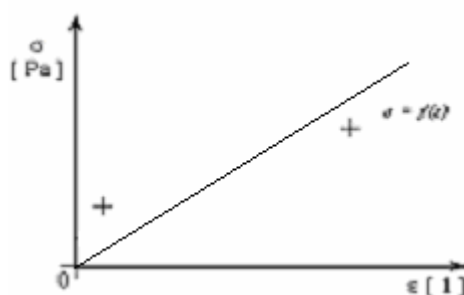
Naměřené a vypočítané hodnoty veličin zapíšeme do připravené tabulky:

Tabulka I. - Naměřené a vypočítané hodnoty pro tah

n	m_1 [kg]	G_1 [N]	F_1 [N]	Δl [m]	σ [Pa]	ε [1]
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
Průměr						
Směrodatná odchylka						

Pozn.: Stejnou tabulku použijeme pro druhé závaží, které by mělo být těžší než závaží o hmotnosti m_1

Do grafu (obr. 24) poté vyneseme průměrné hodnoty σ a ε pro závaží m_1 a m_2 . Hodnoty poměrného prodloužení považujeme za nezávisle proměnnou veličinu a k ní přiřazujeme hodnoty napětí jako závisle proměnné veličiny. Stanovíme lineární regresí empirickou regresní přímku. Směrnice této přímky nám pak určí hledanou hodnotu modulu pružnosti v tahu.



Obr. 24 – Graf závislosti napětí na poměrném prodloužení

Obsah protokolu

1. Záhlaví

3 – Setinové hodinky

4 – Místo pro upevnění závaží

C – Místo pro upevnění vzorku

D - Místo pro upevnění vzorku

V - Vzorek

Postup :

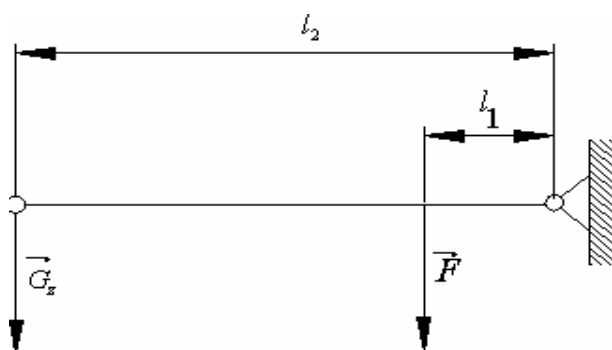
Nejprve proměříme plastový nebo pryžový vzorek. Poté vzorek položíme na rám mezi body C a D. K ramenu (poz. 2) přiložíme setinové hodinky (poz. 3) a vynulujeme je. Na konec ramena (poz. 2) umístíme závaží o hmotnosti m_1 . Prosté zkrácení pracovní délky vzorku Δl je poté dáno posunem ramene (poz. 2) a jeho velikost odečteme ze setinových hodinek. Tento postup opakujeme 10x pro dvě různá závaží.

Síla $\vec{F}$, která působí na vzorek ve směru jeho podélné osy je dána tíhou závaží $\vec{G}_z$ a délkami l_1 a l_2 ramene páky.

Tíha závaží $\vec{G}_z$ je dána vztahem

$$G_z = m_z g \quad (42)$$

kde $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$



Obr. 26 – Síly působící na rameni

Z podmínky rovnováhy určíme velikost síly $\vec{F}$, která působí na zatěžovaný vzorek (obr. 26)

$$Fl_1 - G_z l_2 = 0 \quad (43)$$

Velikost síly

$$F = \frac{G_z l_2}{l_1} \quad (44)$$

Výpočet hodnot poměrného zkrácení je dán vztahem

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_v} \quad (44)$$

kde l_v je počáteční délka pracovní části prizmatického vzorku při nulovém zatížení

Hodnoty napětí v jednotlivých případech zatížení určíme ze vztahu

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (46)$$

Naměřené a vypočítané hodnoty veličin zapíšeme do připravené tabulky:

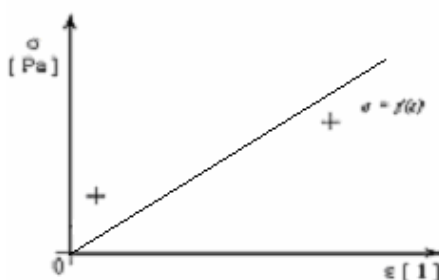
Tabulka II. – Naměřené a vypočítané hodnoty pro tlak

n	m_1 [kg]	G_1 [N]	F_1 [N]	Δl [m]	σ [Pa]	ε [1]
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
Průměr						
Směrodatná odchylka						

Pozn.: Stejnou tabulku použijeme pro druhé závaží, které by mělo být těžší než závaží o hmotnosti m_1

Do grafu (obr. 27) poté vyneseme průměrné hodnoty σ a ε pro závaží m_1 a m_2 . Hodnoty poměrného zkrácení považujeme za nezávisle proměnnou veličinu a k ní přiřazujeme hodnoty napětí jako závisle proměnné veličiny. Pak proložíme dvěma takto

získanými body přímku. Směrnice této přímky nám pak určí hledanou hodnotu modulu pružnosti v tlaku.



Obr. 27 – Graf závislosti napětí na poměrném zkrácení

Obsah protokolu

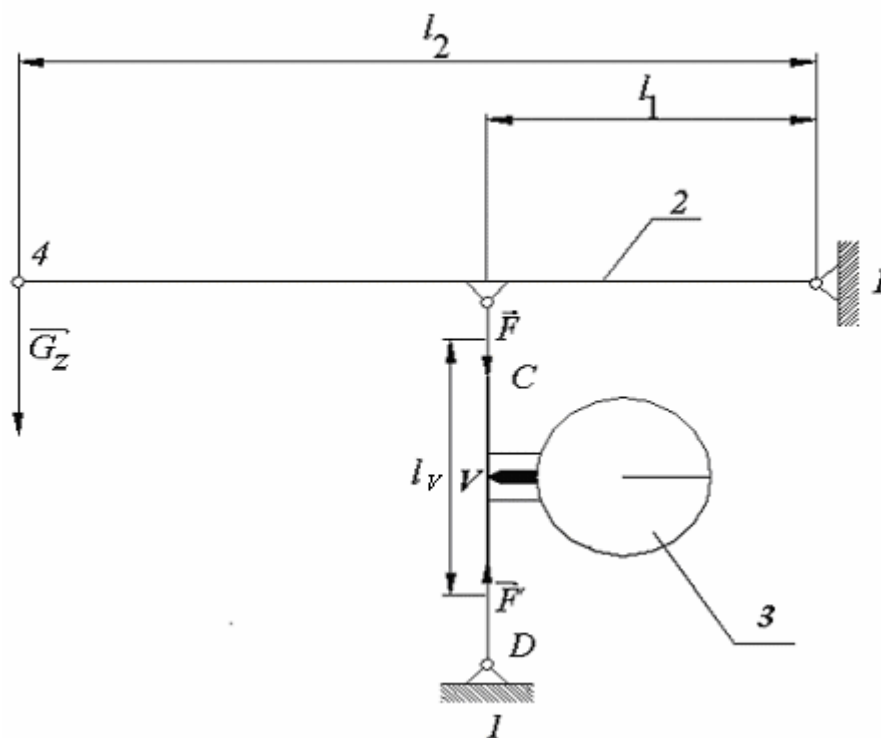
1. Záhloví
2. Zadání úkolu
3. Schéma zatěžovacího zařízení pro tlak se setinovými hodinkami
4. Postup
5. Tabulka naměřených a vypočítaných hodnot
6. Příklad výpočtu neznámých veličin pro jeden řádek tabulky
7. Výpočet směrodatné odchylky, střední kvadratické chyby a průměrných hodnot napětí a poměrného zkrácení
8. Graf závislosti napětí na poměrném zkrácení
9. Závěr s výsledkem experimentálního modulu pružnosti v tlaku a porovnáním s tabulkovou hodnotou v literatuře.

3.3 Návrh úlohy pro demonstraci vzpěru

Zadání:

Vypočítejte kritickou sílu pro čtvrtý případ vzpěru a výpočet ověřte na experimentálním zařízení.

Schéma zařízení na vzpěr :



Obr. 28 – Schéma zařízení pro demonstraci vzpěru

1 – Rám

2 – Rameno

3 – Setinové hodinky

4 – Místo pro upevnění závaží

C – Místo pro upevnění vzorku

D - Místo pro upevnění vzorku

V – Vzorek

l_v – Počáteční délka vzorku

Postup :

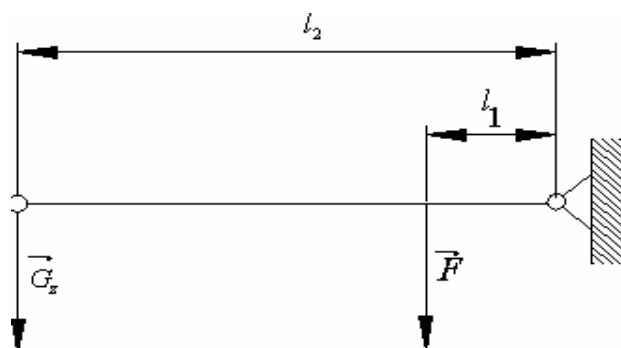
Nejprve proměříme plastový nebo pryžový vzorek. Poté vzorek upevníme na rám do bodu C a D. Vzorek upevníme pomocí šroubů a pevně jej utáhneme. K ramenu (poz. 2) přiložíme setinové hodinky (poz. 3) a vynulujeme je. Na konec ramena (poz. 4) umístíme závaží o hmotnosti m . Hmotnost m musíme volit takovou, aby účinek tíhové síly závaží $\vec{G}_z$ vyvozoval na těleso vyšší zatížení než je kritická síla. Velikost závaží poté snižujeme 10x za sebou v takovém rozsahu aby při desátém měření byl průhyb nulový. Velikost kritické síly spočítáme ze vztahu

$$F_{Kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} \quad (47)$$

kde l_0 je redukovaná délka prutu (viz kapitola 1.3.5)

Síla $\vec{F}$, která působí na vzorek ve směru jeho podélné osy je dána tíhou závaží $\vec{G}_z$ a délkami l_1 a l_2 ramene páky.

Tíha závaží $\vec{G}_z$ je dána vztahem

$$G_z = m_z g \quad (48)$$


Obr. 29 - Síly působící na rameni

Z podmínky rovnováhy určíme velikost síly $\vec{F}$, která působí na zatěžovaný vzorek (obr. 29)

$$Fl_1 - G_z l_2 = 0$$

Velikost síly

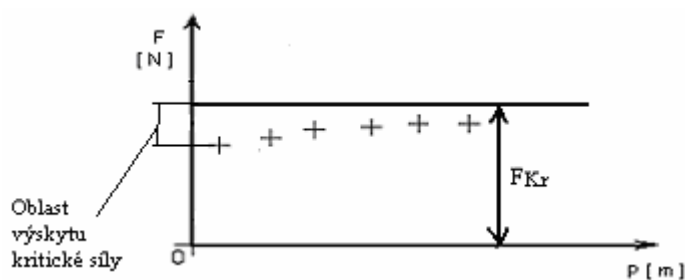
$$F = \frac{G_z l_2}{l_1} \quad (49)$$

Naměřené a vypočítané hodnoty veličin zapíšeme do připravené tabulky:

Tabulka III. – Naměřené a vypočítané hodnoty pro vzpěr

n	m [kg]	G_z [N]	F [N]	P [m]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

. Z hodnot zatěžující síly $\vec{F}$ a průhybu P a vytvoříme graf (obr. 30) a stanovíme oblast výskytu kritické síly. Do grafu poté vyneseme velikost vypočítané kritické síly a porovnáme zda byla teoretická síla v oblasti zjištěné na demonstračním zařízení.



Obr. 30 – Graf zatěžující síly na průhybu

Obsah protokolu

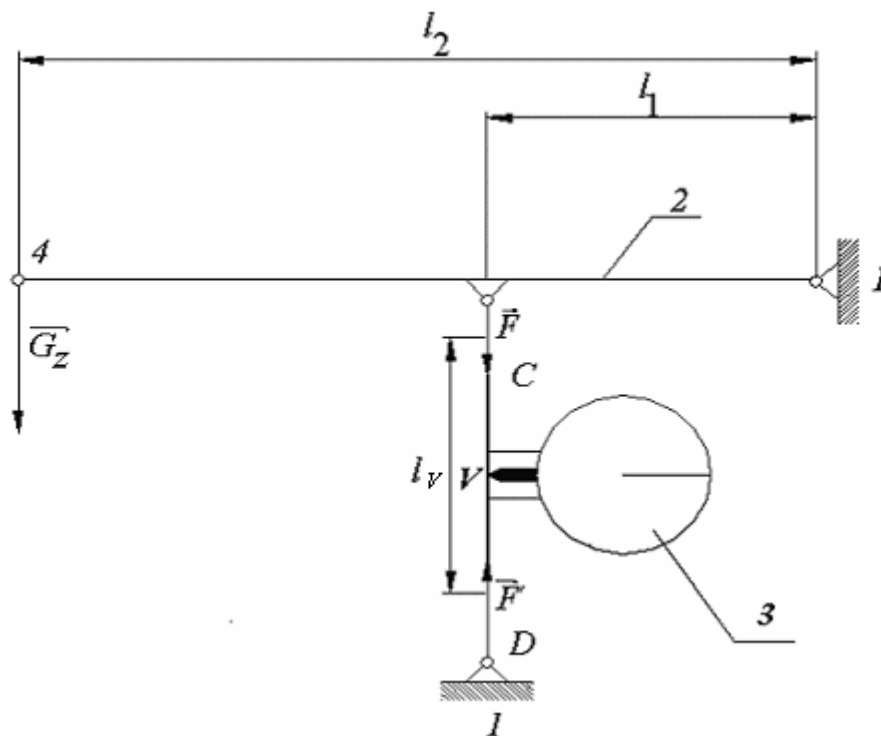
1. Záhloví
2. Zadání úkolu
3. Schéma zatěžovacího zařízení se setinovými hodinkami
4. Postup
5. Tabulka naměřených a vypočítaných hodnot
6. Příklad výpočtu neznámých veličin pro jeden řádek tabulky
7. Graf závislosti zatěžující síly na průhybu
8. V závěru proved'te diskusi naměřené a vypočítané hodnoty kritické síly

3.4 Návrh úlohy pro demonstraci vzpěru – vliv délky

Zadání:

Vypočtete kritickou sílu pro dva vzorky stejného průřezu, ale různé délky a stanovte, jaký má vliv změna délky vzorku na velikost kritické síly.

Schéma zařízení na vzpěr :



Obr. 31 – Schéma zařízení pro demonstraci vzpěru

1 – Rám

2 – Rameno

3 – Setinové hodinky

4 – Místo pro upevnění závaží

C – Místo pro upevnění vzorku

D - Místo pro upevnění vzorku

V – Vzorek

l_v – Počáteční délka vzorku

Postup :

Nejprve proměříme plastový nebo pryžový vzorek. Poté vzorek upevníme na rám do bodu C a D. Vzorek upevníme pomocí šroubů a pevně jej utáhneme. K ramenu (poz. 2) přiložíme setinové hodinky (poz. 3) a vynulujeme je. Na konec ramena (poz. 4) umístíme závaží o hmotnosti m . Hmotnost m musíme volit takovou, aby účinek tíhové síly závaží $\vec{G}_z$ vyvozoval na těleso vyšší zatížení než je kritická síla. Velikost závaží poté snižujeme v takovém rozsahu, aby při desátém měření byl průhyb nulový. Tento postup opakujeme i pro druhý vzorek, který má stejný průřez, ale jinou délku.

Velikost kritické síly spočítáme ze vztahu

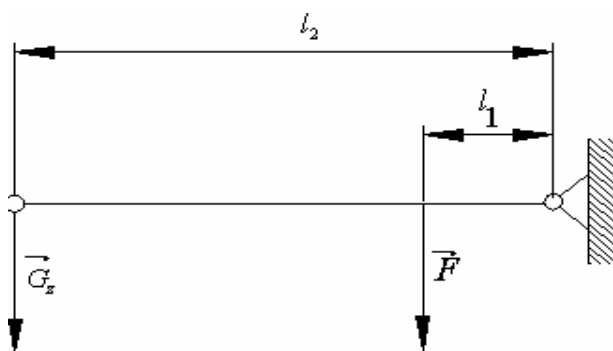
$$F_{Kr} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} \quad (50)$$

kde l_0 je redukovaná délka prutu (viz kapitola 1.3.5)

Síla $\vec{F}$, která působí na vzorek ve směru jeho podélné osy je dána tíhou závaží $\vec{G}_z$ a délkami l_1 a l_2 ramene páky.

Tíha závaží $\vec{G}_z$ je dána vztahem

$$G_z = m_z g \quad (51)$$



Obr. 32 - Síly působící na rameni

Z podmínky rovnováhy určíme velikost síly $\vec{F}$, která působí na zatěžovaný vzorek

$$Fl_1 - G_z l_2 = 0$$

Velikost síly

$$F = \frac{G_z l_2}{l_1} \quad (52)$$

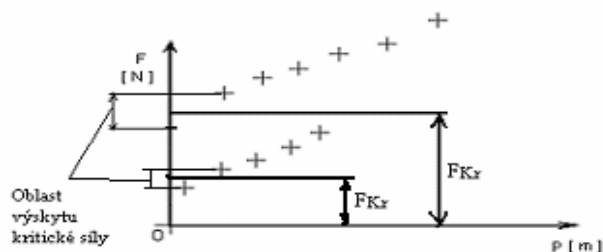
Naměřené a vypočítané hodnoty veličin zapíšeme do připravené tabulky:

Tabulka IV. – Naměřené a vypočítané hodnoty pro vzpěr

n	m [kg]	G_z [N]	F [N]	P [m]
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Pozn.: Stejnou tabulku použijeme i pro druhý vzorek

Z hodnot zatěžující síly F a průhybu P vytvoříme graf (obr. 33) a stanovíme oblast výskytu kritické síly, Do grafu poté vyneseme velikost vypočítané kritické síly a porovnáme zda byla teoretická síla v oblasti zjištěné na demonstračním zařízení. Totéž provedeme z hodnotami získanými ze zkoušení druhého vzorku a po vynesení do grafu porovnáme velikost kritické síly.



Obr. 33 – Graf zatěžující síly na průhybu

Obsah protokolu

1. Záhloví
2. Zadání úkolu
3. Schéma zatěžovacího zařízení se setinovými hodinkami
4. Postup
5. Tabulka naměřených a vypočítaných hodnot
6. Příklad výpočtu neznámých veličin pro jeden řádek tabulky
7. Graf závislosti zatěžující síly na průhybu
8. V závěru proveďte diskusi naměřených a vypočítaných hodnot kritické síly

4 APLIKACE VZOROVÉ ÚLOHY SE ZKUŠEBNÍM VZORKEM

4.1 Výpočet vzorové úlohy pro tah

Pro aplikaci navržené úlohy byla zvolena úloha(č. 3.1) což je vzorová úloha pro tah.

Úvod, schéma, zadání a postup pro vypočítání úlohy je zpracován v části 3.1

Výpočet:

Po proměření zkušebního vzorku jsem získal tyto hodnoty

$$l_0 = 180 \text{ mm}$$

$$t = 3 \text{ mm}$$

$$b = 9 \text{ mm}$$

Délkové poměry na páce

$$L_2 = 630 \text{ mm}$$

$$L_1 = 120 \text{ mm}$$

Tabulka V. – Naměřené a vypočítané hodnoty pro tah při zatížení m_1

n	m ₁ [kg]	G ₁ [N]	F ₁ [N]	Δl [m]	σ [Pa]	ε [1]
1	0,135	1,32435	6,952838	0,00004	257512,5	0,0002
2				0,00004		0,0002
3				0,00004		0,0002
4				0,00002		0,0001
5				0,00004		0,0002
6				0,00005		0,0003
7				0,00004		0,0002
8				0,00005		0,0003
9				0,00003		0,0002
10				0,00004		0,0002
Průměr				0,000039	257512,5	0,0002
Směrodatná odchylka				8,3066E-06		4,61479E-05

Příklad výpočtu pro první řádek

Výpočet tíhy závaží

$$G_z = m_z g = 0,135 \cdot 9,81 = 1,324 [N]$$

kde $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Výpočet síly působící na vzorek

$$F = \frac{G_z l_2}{l_1} = \frac{1,324 \cdot 630}{120} = 6,953 [N]$$

Výpočet průřezu vzorku

$$S = b \cdot t = 0,009 \cdot 0,003 = 0,000027 [m^2]$$

Výpočet poměrného prodloužení

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,00004}{0,18} = 0,0002 [1]$$

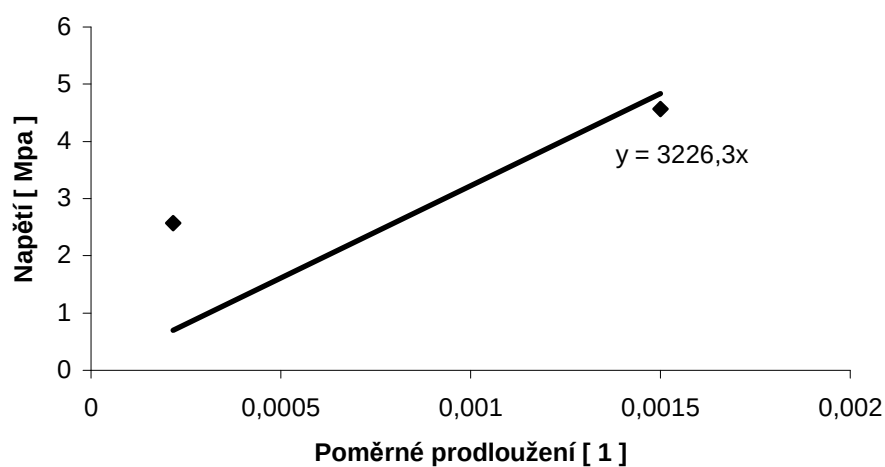
Výpočet napětí

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{6,953}{0,0002} = 257512,50 [Pa]$$

Tabulka VI. - Naměřené a vypočítané hodnoty pro tah při zatížení m_2

n	m ₂ [kg]	G ₂ [N]	F ₂ [N]	Δl [m]	σ [Pa]	ε [1]
1	2,395	23,49495	123,3485	0,00027	4568463	0,0015
2				0,00028		0,0016
3				0,00029		0,0016
4				0,00026		0,0014
5				0,00027		0,0015
6				0,00027		0,0015
7				0,00025		0,0014
8				0,00026		0,0014
9				0,00028		0,0016
10				0,00027		0,0015
Průměr				0,00027	257512,5	0,0015
Směrodatná odchylka				1,0954E-05		6,08581E-05

Graf závislosti napětí na poměrném prodloužení



Obr. 34 – Závislost napětí na poměrném prodloužení

Závěr:

V zobrazené rovnici přímky $y = kx$ je konstanta $k = 3226,3 \text{ [MPa]}$ modul pružnosti v tahu.

ZÁVĚR

Bakalářská práce je zaměřena na návrh a konstrukci přípravku pro demonstraci tahu, tlaku a vzpěru.

Bakalářská práce je rozdělena na čtyři části. V první části, která je rozdělena na tři hlavní podkapitoly, ve kterých je teoreticky rozebráno působení vnějších a vnitřních sil na těleso a Hookeův zákon. Ve druhé podkapitole je teoreticky rozebráno působení tahu a tlaku na zkušební těleso. Ve třetí podkapitole jsou podrobně popsány jednotlivé druhy vzpěru s odvozením kritické síly.

Ve druhé části bakalářské práce jsou navržena jednotlivá konstrukční uspořádání přípravků pro demonstraci tahu, tlaku a vzpěru.

Ve třetí části mé bakalářské práce jsou navrženy metodické vzorové úlohy, podle kterých se bude postupovat při demonstraci tahu, tlaku a vzpěru.

Ve čtvrté části byla zvolena metodická úloha pro měření tahu a podle ní byl prakticky naměřen a spočítán modul pružnosti v tahu.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- (1) Oliva, J. Technická mechanika II. VUT v Brně, 1978.
- (2) Šuba, O. Mechanické chování těles. UTB ve Zlíně, 2002. ISBN 80-7318-101-0.
- (3) Oliva, J. Pružnost a pevnost. VUT v Brně, 1980.
- (4) Valendin, M. Mechanické chování těles II. VUT v Brně, FT ve Zlíně, 2002. ISBN 80-7318-101-0.
- (5) Kuba, F. Teorie pružnosti a vybrané aplikace. SNTL, Brno, 1977.
- (6) Leinveber, J., Řasa, J. a Vávra, P. Strojnické tabulky. Scientia, Praha, 2000. ISBN 80-7183-164-6

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

b	–	šířka
E	–	modul pružnosti v tahu (tlaku)
$\vec{F}$	–	síla
F_E	–	síla Eulerova
F_H	–	síla orizontální
F_{Kr}	–	síla kritická
g	–	gravitační konstanta
$\vec{G}_z$	–	tíha závaží
J_z	–	kvadratický moment průřezu
l_0	–	redukovaná délka prutu
l_v	–	počáteční délka vzorku
m	–	hmotnost
M_o	–	ohybový moment
M_k	–	krouticí moment
m_z	–	hmotnost závaží
$\vec{N}$	–	normálová síla
P	–	průhyb
S	–	průřez
Δl	–	prodloužení
ε_x	–	poměrné prodloužení (zkrácení) v ose x
ε_y	–	poměrné prodloužení (zkrácení) v ose y
ε_z	–	poměrné prodloužení (zkrácení) v ose z
μ	–	Poissonovo číslo
σ_{ut}	–	napětí na mezi úměrnosti v tahu
σ_{Et}	–	napětí na mezi elasticity v tahu
σ_{Pt}	–	napětí na mezi pevnosti v tahu
σ_{ud}	–	napětí na mezi úměrnosti v tlaku
σ_{Ed}	–	napětí na mezi elasticity v tlaku
σ_{Pd}	–	napětí na mezi pevnosti v tlaku

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 - Myšlený řez	8
Obr. 2 - Nahrazení myšleně odstraněné části vnitřní silovou a momentovou výslednicí.....	8
Obr. 3 - Rovnoběžníky vektorů sil a momentů.....	9
Obr. 4 – Jednoosá napjatost	10
Obr. 5 – Uvolnění prutu.....	11
Obr. 6 – Uvolněná část prizmatického prutu	12
Obr. 7 – Zatížení prutu prostým tahem.....	14
Obr. 8 – Grafické vyjádření deformační práce v závislosti síly $\vec{F}$ na deformační dráze s. 14	
Obr. 9 – V grafu závislosti $\sigma_x = f(\varepsilon_x)$ je u vyjádřena plochou trojúhelníka OCD	15
Obr. 10 – Průběh natahování (stlačování) kovového materiálu v závislosti na zatížení	16
Obr. 11 - Čtyři základní druhy vzpěru.....	17
Obr. 12 – První případ vzpěru	18
Obr. 13 – Druhý případ vzpěru.....	20
Obr. 14 – Třetí případ vzpěru	22
Obr. 15 – Zatěžující síly u třetího případu vzpěru.....	22
Obr. 16 – Čtvrtý případ vzpěru.....	26
Obr. 17 – Vyznačení sil a momentů u čtvrtého případu vzpěru	26
Obr. 18 – Redukované délky pro čtyři případy vzpěru	29
Obr. 19 - Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci tahu	30
Obr. 20 – Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci tlaku	31
Obr. 21 - Konstrukční uspořádání přípravku pro demonstraci vzpěru	32
Obr. 22 – Schéma zařízení pro demonstraci tahu	34
Obr. 23 - Síly působící na rameni	35
Obr. 24 – Graf závislosti napětí na poměrném prodloužení	36
Obr. 25 - Schéma zařízení pro demonstraci tlaku.....	37
Obr. 26 – Síly působící na rameni	38
Obr. 27 – Graf závislosti napětí na poměrném zkrácení.....	40
Obr. 28 – Schéma zařízení pro demonstraci vzpěru	41
Obr. 29 – Graf zatěžující síly na průhybu.....	43
Obr. 30 – Závislost napětí na poměrném prodloužení.....	48

SEZNAM TABULEK

Tabulka I. - Naměřené a vypočítané hodnoty pro tah	36
Tabulka II. – Naměřené a vypočítané hodnoty pro tlak	39
Tabulka III. – Naměřené a vypočítané hodnoty pro vzpěr	43
Tabulka III. – Naměřené a vypočítané hodnoty pro vzpěr	46
Tabulka IV. – Naměřené a vypočítané hodnoty pro tah při zatížení m_1	47
Tabulka V. - Naměřené a vypočítané hodnoty pro tah při zatížení m_2	48

SEZNAM PŘÍLOH

- P 1 : ÚVI – 03 – 01 - CH
- P 2 : ÚVI – 03 – 02 - CH
- P 3 : ÚVI – 04 – 03 - CH
- P 4 : ÚVI – 04 – 04 - CH
- P 5 : ÚVI – 03 – 05 - CH
- P 6 : ÚVI – 04 – 06 - CH
- P 7 : ÚVI – 04 – 07 - CH
- P 8 : ÚVI – 04 – 08 - CH
- P 9 : ÚVI – 04 – 09 - CH
- P 10 : ÚVI – 04 – 10 - CH
- P 11 : ÚVI – 04 – 11 - CH
- P 12 : ÚVI – 04 – 12 - CH
- P 13 : ÚVI – 04 – 13 - CH
- P 14 : ÚVI – 02 – S2 - CH
- P 15 : ÚVI – 04 – 14 - CH
- P 16 : ÚVI – 04 – 15 - CH
- P 17 : ÚVI – 04 – 16 - CH
- P 18 : ÚVI – 02 – S3 - CH

