

Konstrukce přípravku pro demonstraci ohybu

Milan Ovsík

Bakalářská práce
2005



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta technologická

Oficiální zadání bakalářské práce - viz. tištěná verze

Chtěl bych poděkovat vedoucímu bakalářské práce panu doc. Ing. Oldřichu Šubovi, CSc. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které mi poskytoval při řešení bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat panu Ing. Jiřímu Šálkovi za pomoc při výrobě přípravku.

Souhlasím s tím, že s výsledky mé práce může být naloženo podle uvážení vedoucího bakalářské práce a ředitele ústavu. V případě publikace budu uveden jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 05. 06. 2005

.....

podpis

RESUMÉ

Bakalářská práce se zabývá návrhem a konstrukcí přípravku pro demonstraci ohybu. Teoretická část je zaměřena především na problematiku ohybu. V této části je obsažena technická teorie o ohybovém napětí a deformaci.

Praktická a experimentální část se zabývá návrhem různých konstrukčních alternativ a uspořádáním přípravku pro demonstraci ohybu.

Závěr bakalářské práce je zaměřen na sestavení vzorových úloh z oblasti ohybové napjatosti a deformace.

SUMMARY

The Bachelor's dissertation deals with the submission and construction of the device for bend demonstration. The theoretical part is directed mainly to the matter of bending. The technical theory about the bend tension and deformation is comprised in this part.

The practical and experimental part deals with the submission of various construction alternatives and arrangement of the device for bend demonstration.

The conclusion of my bachelor's dissertation is directed to the composing of model assignments in the field of bend tension and deformation.

OBSAH

ÚVOD.....	6
1 STUDIJNÍ A TEORETICKÁ ČÁST.....	7
1.1 Základní teorie.....	7
1.1.1 Vnější síly.....	7
1.1.2 Vnitřní statické účinky.....	7
1.1.3 Definice napětí.....	9
1.1.4 Napjatost v bodě tělesa.....	11
1.1.5 Deformace (přetvoření) tělesa.....	13
1.2 Teorie ohybu.....	14
1.2.1 Uložení nosníků a vnější statická určitost.....	14
1.2.2 Vnitřní statické účinky.....	16
1.3 Ohybové napětí.....	18
1.4 Deformace.....	23
1.4.1 Mohrova metoda (výpočet deformací).....	23
1.4.2 Věta Castiglianova (výpočet deformací).....	26
1.5 Věta Maxwellova (věta o vzájemnosti posuvů).....	29
2 EXPERIMENTÁLNÍ A PRAKTICKÁ ČÁST.....	31
2.1 Návrh přípravku pro demonstraci ohybu.....	31
2.1.1 Základní části přípravku.....	31
2.1.2 Příklady uložení nosníků.....	34
2.1.3 Měřicí zařízení.....	38
2.1.4 Závaží.....	39
2.1.5 Stanovení zatěžující síly.....	39
2.2 Materiály zkoušených vzorků.....	40
2.3 Vzorové úlohy z oblasti ohybové napjatosti a deformace.....	41
2.3.1 Úkol č.1.....	41
2.3.2 Úkol č.2.....	44
2.3.3 Úkol č.3.....	47
2.3.4 Úkol č.4.....	49
2.3.5 Naměřená úloha.....	52
2.4 Diskuze výsledků.....	57
ZÁVĚR.....	58
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	59
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	60
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	61
SEZNAM TABULEK.....	63
SEZNAM PŘÍLOH.....	64

ÚVOD

Bakalářská práce je zaměřena na konstrukci přípravku pro demonstraci ohybu. Základem této práce je navrhnout jednoduché zařízení pro demonstraci ohybu, které bude určeno pro laboratorní cvičení studentům vysokých škol. Úkolem je, abychom za pomoci tohoto přípravku zjistili, jaké má zkoušený vzorek ohybové vlastnosti. V tělese, které je namáháno na ohyb, vznikají napětí a deformace. Hlavním úkolem při měření je stanovit průhyb, který vznikne v měřeném vzorku. Na tomto přípravku lze demonstrovat ohyby nosníků, které jsou různě uloženy. Tím vzniká statická určitost nebo statická neurčitost. Zkoušené vzorky mohou být zatíženy jednou silou nebo dvojicí sil.

Studijní a teoretická část je zaměřena na problematiku ohybu. V této části je obsažena technická teorie o ohybovém napětí a deformaci. V experimentální a praktické části jsou podrobně popsány jednotlivé části přípravku. Dále jsou zde zobrazeny pomocí schémat různé typy uložení a zatížení nosníků.

Cílem bakalářské práce je v první části navrhnout přípravek pro měření ohybu plastových a kovových vzorků. Po návrhu přípravku je potřeba stanovit jaké maximální zatížení je možné na tomto zařízení provádět a tím se stanoví přesně pro jaké maximální rozměry jednotlivých vzorků je tento přípravek vhodný. V závěru bakalářské práce jsou navrženy úlohy pro měření v laboratorních cvičeních z předmětu Pružnost pevnost.

1 STUDIJNÍ A TEORETICKÁ ČÁST

1.1 Základní teorie

1.1.1 Vnější síly

Vnější zatěžující síly jsou síly hmotové a síly působící na povrchu tělesa. Síly hmotové jsou např. síly setrvačné, magnetické a jiné, které působí na příslušný objem částic tělesa a jsou úměrné velikosti hmotnosti.

Mezi povrchové síly, které působí v různých místech na povrchu tělesa se počítají primární síly a momenty, tj. síly akční a síly a momenty sekundární ve vazbách tělesa k jiným tělesům, tj. síly reakční.

Síly mohou působit osaměle nebo spojitě na určité délce nebo ploše tělesa. Přitom může být působení vnějších sil v čase neproměnné nebo také funkcí času. V této souvislosti se hovoří o statickém nebo dynamickém zatížení.

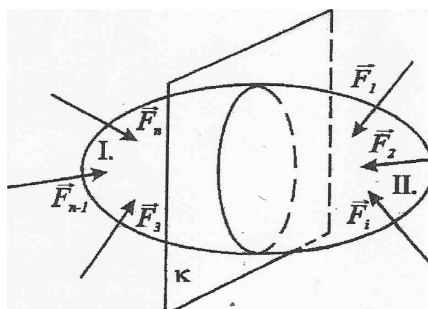
1.1.2 Vnitřní statické účinky

Části konstrukcí se při působení vnějších sil deformují, tj. mění působením vnějších sil své rozměry a tvar. Pro vyšetřování vnitřních statických účinků silového působení používáme "metodu myšleného řezu", pomocí níž stanovíme tzv. vnitřní síly a momenty. Ze zjištěných vnitřních sil a momentů se pak určí napětí a deformace.

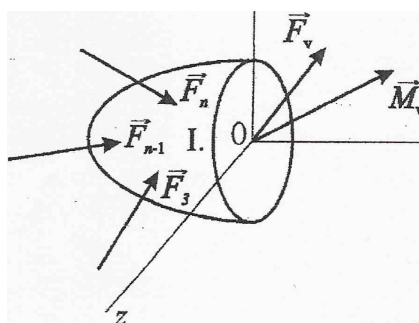
Osvětlíme si princip metody myšleného řezu. Uvažujeme, že na těleso působí obecně v prostoru akční a reakční síly, které spolu tvoří rovnovážnou soustavu sil. Vedeme-li ve vyšetřovaném místě myšlený řez, rozdělíme těleso na dvě části I. a II. Jednu část, např. I., "uvolníme" a druhou část II. myšleně "odstraníme". Účinek "odstraněné" části II. tělesa nahradíme v místě řezu silovou výslednicí $\vec{F}_v$ a momentovou výslednicí $\vec{M}_v$ všech sil působících na "odstraněné" části II. tělesa. Na "uvolněné" části jsou v rovnováze zbývající síly vnější s těmito výslednicemi. Silovou výslednicí $\vec{F}_v$ nazýváme vektorem vnitřní síly a momentovou výslednicí $\vec{M}_v$ nazýváme vektorem vnitřního momentu.

Místo vektoru vnitřní síly a vnitřního momentu lze uvažovat dvě mimoběžné síly $\vec{F}_{v,1}$ a $\vec{F}_{v,2}$ (vektorový kříž). Vnitřní silová výslednice $\vec{F}_v$ je dána vektorovým součtem

všech zbývajících vektorů vnějších sil akčních a reakčních na "odstraněné" části. Vnitřní momentová výslednice $\vec{M}_v$ je dána vektorovým součtem všech zbývajících vektorů momentů sil akčních a reakčních na odstraněné části k bodu O . Bod O je zpravidla totožný s těžištěm T průřezu. Rovina κ je rovinou myšleného řezu (obr. 1). I. - "uvolněná" část tělesa, II. - "odstraněná" část tělesa.

Obr. 1. Rovina κ

$\vec{F}_v$ - vnitřní silová výslednice a $\vec{M}_v$ - vnitřní momentová výslednice (obr.2)

Obr. 2. Znárodnění $\vec{F}_v$ a $\vec{M}_v$

Složky účinků silové a momentové výslednice.

Počátek O souřadnicového systému je volen zpravidla v těžišti T plochy myšleného řezu a osu x vedeme kolmo k průřezu. Proložíme rovinu osou x a nositelkou vektoru síly $\vec{F}_v$. Tato rovina protíná rovinu průřezu v průsečnici t . Vnitřní silová výslednice má podle zákona rovnoběžníka vektorů dvě složky a to složku $\vec{N}$ na ose x a složku $\vec{T}$ na přímce t v rovině průřezu. Platí:

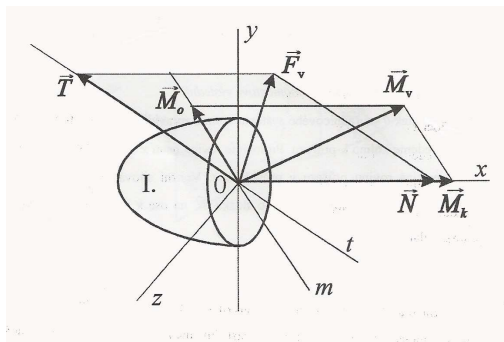
$$\vec{F}_v = \vec{N} + \vec{T} \quad (1)$$

Složka $\vec{N}$ působí kolmo k průřezu a podle svého smyslu vyjadřuje tahový resp. tlakový účinek "odstraněné" části na část "uvolněnou". Složka $\vec{T}$ leží v ploše průřezu a vyjadřuje smykový účinek. Síla $\vec{N}$ se nazývá normálová síla, síla $\vec{T}$ příčná síla.

Nyní proložíme rovinu osou x a nositelkou vektoru $\vec{M}_v$ která protíná rovinu řezu v průsečnici m . Rozkladem vektoru $\vec{M}_v$ na složky ve směru osy x a přímky m obdržíme vektory $\vec{M}_k$ a $\vec{M}_o$. Platí:

$$\vec{M}_v = \vec{M}_k + \vec{M}_o \quad (2)$$

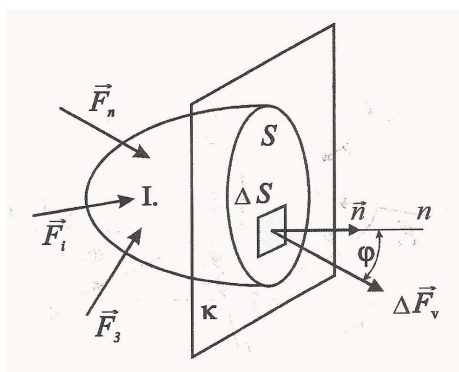
Složka $\vec{M}_k$ vektoru momentové výslednice vystihuje otáčivý účinek kolem osy x a nazývá se kroutící moment. Složka $\vec{M}_o$ vektoru momentové výslednice vystihuje ohybový účinek v daném průřezu a nazývá se ohybový moment.



Obr. 3. Rovnoběžníky příslušných vektorů.

1.1.3 Definice napětí

V myšleném řezu κ s průřezem S se zavádí velmi malé dílčí části plochy ΔS a v těchto ploškách dílčí vnitřní síly $\Delta \vec{F}_v$. Obecně tato elementární vnitřní síla svírá s vnější normálou plošky ΔS úhel φ (obr. 4).



Obr. 4. Myšlený řez κ .

Napětím se rozumí vnitřní síla připadající na jednotku průřezové plochy. Matematicky je napětí definováno jako limita poměru elementární vnitřní síly $\Delta \vec{F}_v$ k ploše

ΔS , když $\Delta S \rightarrow 0$. Toto napětí se označuje $\vec{p}$. Je tedy

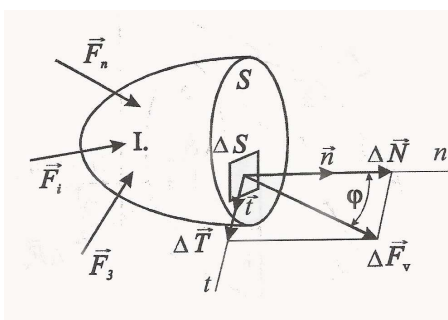
$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_v}{\Delta S} = \frac{d \vec{F}_v}{dS} (Pa) \quad (3)$$

Normálové a tečné napětí

Rozloží-li se elementární vnitřní síla $\Delta \vec{F}_v$ na složky ve směru normály a tečny k ploše S , jsou velikosti složek:

$$\Delta N = \Delta F_v \cos \varphi \quad \text{a} \quad \Delta T = \Delta F_v \sin \varphi \quad (4)$$

jak je vidět na obr. 5.



Obr. 5. Rozklad síly $\Delta \vec{F}_v$

Normálové napětí

Je definováno jako limita podílu $\frac{\Delta N}{\Delta S}$, když $\Delta S \rightarrow 0$, tj.

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} = \frac{dN}{dS} \quad (5)$$

Toto napětí je kolmé k plošce ΔS a je kladné tehdy, směřuje-li síla $\Delta \vec{N}$ ven z průřezu. Takové napětí se nazývá napětím v tahu. Záporné napětí - napětí v tlaku - směřuje do průřezu, tj. směrem do uvolněné části I.

Tečná napětí

Je definováno jako limita podílu $\frac{\Delta T}{\Delta S}$, když $\Delta S \rightarrow 0$, tj.

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = \frac{dT}{dS} \quad (6)$$

Toto napětí leží v rovině průřezu. Obě napětí $\sigma \vec{n}$ a $\tau \vec{t}$ lze graficky znázornit a zakreslit ve směru normály a tečny k plošce jako složky napětí $\vec{p}$.

Napětí $\vec{\tau} t$ lze nahradit v rovině plošky ΔS dvěma napětími např. ve směrech t_1 a t_2 , kdy oba směry lze libovolně volit. Jsou-li ve směrech n, t, t_1, t_2 jednotkové vektory $\vec{n}, \vec{t}, \vec{t}_1, \vec{t}_2$ je

$$\vec{p} = \vec{n} \sigma + \vec{t}_1 \tau_1 + \vec{t}_2 \tau_2 \quad (7)$$

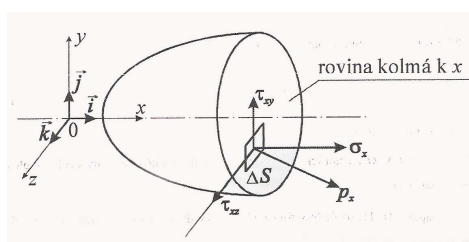
Napětí $\vec{p}$ lze tedy rozložit do normály a dvou zvolených směru, které leží v rovině řezu. Musíme si uvědomit, že všechna uvažovaná napětí působí na tutéž elementární plošku - jinak je jako nesourodá napětí nelze vektorově sčítat.

1.1.4 Napjatost v bodě tělesa

Všechny síly působící na těleso vyvolávají mechanický stav nazvaný napjatost. Napjatost v určitém bodě tělesa je určena, jsou-li známa napětí ve třech rovinách k sobě kolmých.

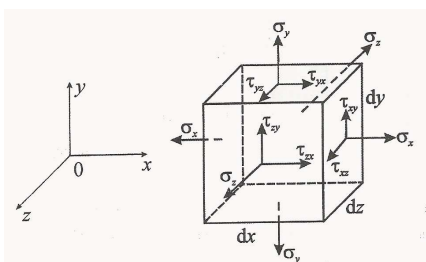
Označení napětí:

V rovině kolmé k ose x je napětí σ a p označeno indexem x , tj. σ_x a p_x . Smyková napětí mají dva indexy. Např. smykové napětí v rovině kolmé k ose x a rovnoběžné s osou y je označeno indexem xy , tj. τ_{xy} . Napětí τ_{xz} je smykové napětí v rovině kolmé k ose x a rovnoběžné s osou z . Napětí jsou kladná, jsou-li jejich smysly shodné s kladnými smysly souřadnicových os (obr. 6).



Obr. 6. Zobrazení napětí

Zobrazení napětí na elementárním hranolku s hranami dx, dy, dz s tím, že předpokládáme velikosti $dx = dy = dz = 0$ (obr. 7):



Obr. 7. Napětí na elementárním hranolku.

Podle zákona sdružených smykových napětí platí:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \tau_z \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \tau_y \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \tau_x\end{aligned}\quad (8)$$

Složky smykových napětí ležících, ve dvou k sobě kolmých rovinách a směřujících k průsečnici rovin jsou stejně velké.

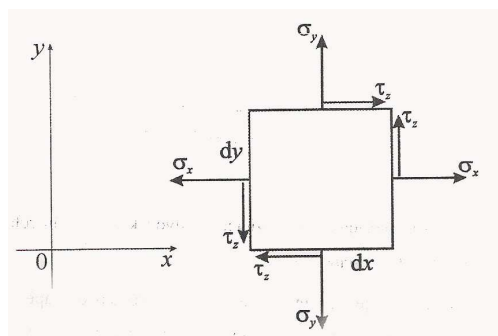
Ve třech navzájem kolmých rovinách je devět složek napětí: tři složky normálových napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ a šest složek smykových napětí $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$. S ohledem na zákon sdružených smykových napětí charakterizuje napjatost tělesa v bodě M šest složek napětí z nich lze stanovit napětí v libovolné rovině procházející daným bodem.

Napětí uspořádané do řádků a sloupců určitým způsobem tvoří tenzor napjatosti:

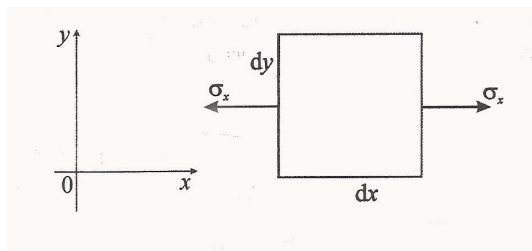
$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (9)$$

Definice prostorové, rovinné a přímkové napjatosti:

1. Prostorová napjatost je charakterizována tím, že na všechny stěny elementárního hranolku působí alespoň jedno napětí
2. Rovinnou napjatostí se označuje stav, kdy na dvou rovnoběžných stěnách elementárního hranolku nepůsobí žádné napětí a v každé zbývajících stěně působí alespoň jedno napětí (σ, τ) .
3. Přímková napjatost je takový stav, kdy napětí (σ) působí jen ve dvou spolu rovnoběžných rovinách elementárního hranolku.



Obr. 8. Příklad rovinné napjatosti.



Obr. 9. Příklad přímkové napjatosti.

Prostorová napjatost se také nazývá tříosová, rovinná je dvouosová a přímková je jednoosová napjatost. Působí-li na stěny elementárního hranolku jen normálová napětí, nazývají se tato napětí hlavní napětí a označují se $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Roviny ve kterých tato napětí působí se nazývají rovinami hlavních napětí. Na těchto rovinách nepůsobí žádné smykové napětí.

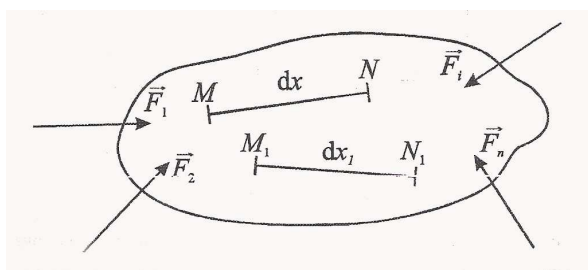
Při jednoosové napjatosti jsou všechny roviny elementárního hranolku rovinami hlavních napětí, kdy $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$

V každém bodě tělesa lze určit takovou polohu elementárního hranolku, kdy na jeho stěnách působí jen hlavní napětí. Tzv. izostatické čáry jsou křivky, které se v každém bodě dotýkají os hlavních napětí.

1.1.5 Deformace (přetvoření) tělesa

Vlivem zatížení dochází u tělesa k jeho deformaci, tj. ke změně vzdálenosti mezi body a ke změně pravého úhlu.

Označíme dx vzdálenost mezi dvěma body M a N před zatížením. Při zatížení se body M a N přemístí do polohy M_1 a N_1 a vzdálenost mezi nimi je dx_1 . Dochází tedy k prosté změně délky ve směru MN o Δdx (m), (obr. 10):



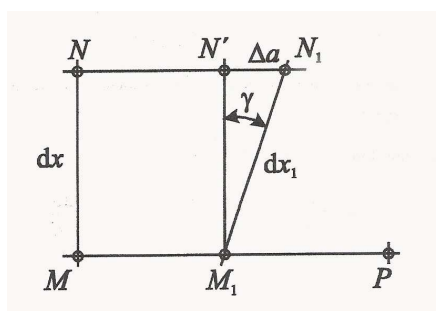
Obr. 10. Deformace tělesa

Rozdíl $\Delta dx = dx_1 - dx$ je tzv. prosté prodloužení nebo zkrácení délky. Podíl změny délky a původní délky je poměrné prodloužení nebo poměrné zkrácení ve směru spojnice MN . Poměrná změna délky je tedy dána vztahem

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (10)$$

Při deformaci tělesa se také změní pravý úhel mezi dvěma původně kolmými směry MN a MP . Tato změna pravého úhlu se nazývá zkos a označuje se γ . Podle obr. 11 je poměrné posunutí dáno podílem prostého posunutí Δa a vzdálenosti dx , tj. $\operatorname{tg} \gamma$ (obr. 11). Pro velmi malé úhly je $\operatorname{tg} \gamma = \sin \gamma = \gamma$. Pro velmi malé deformace je poměrné posunutí rovno zkosu γ . Poměrné posunutí je:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{N'N_1}{MN} = \frac{\Delta a}{dx} \quad (11)$$



Obr. 11. Poměrné posunutí

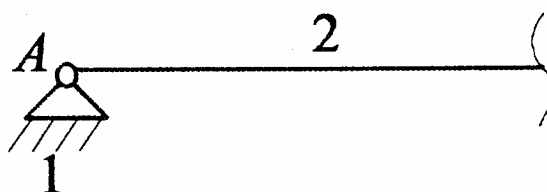
Předpokládáme-li, že poměrná prodloužení ε a zkosity γ jsou veličiny velmi malé, lze psát rovnice rovnováhy tělesa pro nedeformovaný stav. V tomto případě jde o lineární deformaci nebo o deformaci 1. řádu.

1.2 Teorie ohybu

1.2.1 Uložení nosníků a vnější statická určitost

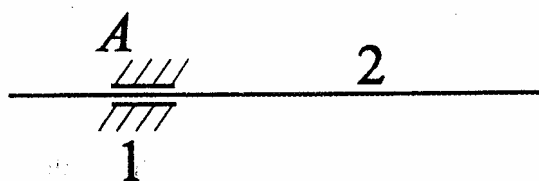
Volnému tělesu v rovině přísluší maximální počet stupňů volnosti $i = 3$ (vzájemně nezávislé dva pohyby posuvné a jedna rotace). Je-li zabráněno některému z možných pohybů vazbou tělesa na rám, je počet stupňů volnosti $i = 3 - m$, kde m je počet vazeb.

Rotační uložení (kloub) tělesu odebírá dva stupně volnosti (zabraňuje dvěma posuvným pohybům) Toto uložení (obr. 12) umožňuje pouze otáčivý pohyb tělesa 2 vzhledem k rámu 1 okolo bodu A, čili $m = 2$ a těleso 2 má $i = 3 - 2 = 1$, tj. jeden stupeň volnosti.



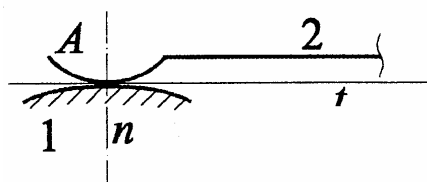
Obr. 12. Rotační uložení

Posuvné uložení tělesu odebírá dva stupně volnosti (zabraňuje jednomu posuvnému pohybu a rotaci). Takové uložení (obr. 13) umožňuje tělesu 2 pouze jeden posuvný pohyb ve směru vedení, čili $m = 2$ a těleso 2 má, $i = 3 - 2 = 1$, tj. jeden stupeň volnosti.

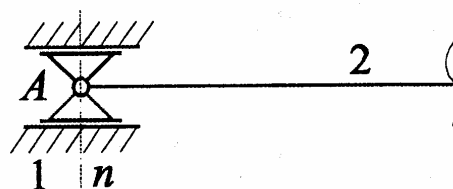


Obr. 13. Posuvné uložení

Obecné uložení tělesu odebírá jeden stupeň volnosti (zabraňuje jednomu posuvnému pohybu). Toto uložení (obr. 14) umožňuje posuv ve směru společné tečny k dotykovým křivkám a rotaci kolem dotykového bodu, čili počet vazeb $m = 1$ a počet stupňů volnosti $i = 3 - 1 = 2$. Stejný efekt má uložení pomocí posuvného kloubu (obr. 15).

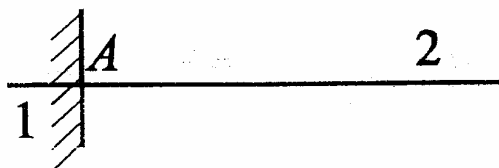


Obr. 14. Obecné uložení



Obr. 15. Uložení pomocí posuvného kloubu

Pevné uložení tzv. vetknutí odebírá tělesu tři stupně volnosti (zabraňuje dvěma posuvným pohybům a rotaci). Toto uložení neumožňuje žádný pohyb tělesa 2 vzhledem k rámu 1, čili počet vazeb $m = 3$ a počet stupňů volnosti $i = 3 - 3 = 0$ (obr. 16).



Obr. 16. Pevné uložení

Těleso, které má $i \leq 0$ může plnit funkci nosného prvku. V případě, že je nosník - tj. těleso 2 uložen na rámu 1 pomocí několika podpěr a celkový počet stupňů volnosti $i = 0$, je nosník staticky určitý tehdy, nemůže-li soustava konat ani virtuální pohyb (podmínka tvarové určitosti).

Je-li $i = 0$ jde o soustavu staticky určitou,

je-li $i < 0$ jde o soustavu staticky neurčitou,

je-li $i > 0$ jde o soustavu staticky přeuročenu

Jsou-li deformace velmi malé, lze zanedbat změnu poloh nositelek vnějších sil a při rovnováze uvolněného tělesa lze vazbové síly určovat z početních podmínek rovnováhy sil akčních a reakčních.

Pro rovinné případy platí tři početní podmínky rovnováhy:

$$\sum_1^n F_{i,x} = 0 \quad \sum_1^n F_{i,y} = 0 \quad \sum_1^n M_{i,A} = 0 \quad (12)$$

1.2.2 Vnitřní statické účinky

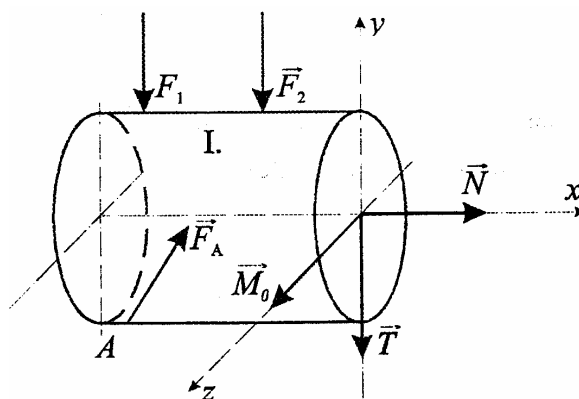
Metodou myšleného řezu, který je veden ve vyšetřovaném místě, oddělíme a myšleně odstraníme jednu část tělesa (nosníku). Účinek odstraněné části, na kterou působily zbývající vnější síly akční a reakce, nahradíme vnitřní silovou výslednicí a vnitřní momentovou výslednicí. Souřadnicový systém je volen tak, aby byl počátek v těžišti plochy příčného řezu. Vnitřní silová výslednice má složky ve směru osy x a ve směru osy y . Vektor momentové výslednice má kolmý směr na rovinu os x,y .

Složka vnitřní síly ve směru osy y se nazývá příčná síla (posouvající síla) a označuje se T . Tato síla leží v ploše průřezu a má smykový účinek. Velikost této síly je dána algebraickým součtem všech velikostí složek sil ve směru osy y po jedné straně průřezu na odstraněné části tělesa nosníku.

Složka vnitřní síly ve směru osy x se nazývá normálová síla a označuje se N . Tato síla je kolmá k ploše průřezu a má tahový nebo tlakový účinek. Velikost této síly je dána algebraickým součtem všech velikostí složek sil ve směru osy x po jedné straně průřezu na odstraněné části tělesa nosníku.

Vnitřní momentová výslednice se nazývá ohybový moment označuje se M_o . Tento moment má otočný účinek kolem osy kolmé na rovinu os x,y a způsobuje vzájemné

naklání průřezů. Velikost ohybového momentu je dána algebraickým součtem všech momentů sil po jedné straně průřezu na odstraněné části tělesa nosníku. Uvolněná část tělesa se složkami vnitřních sil je na obr. 17.

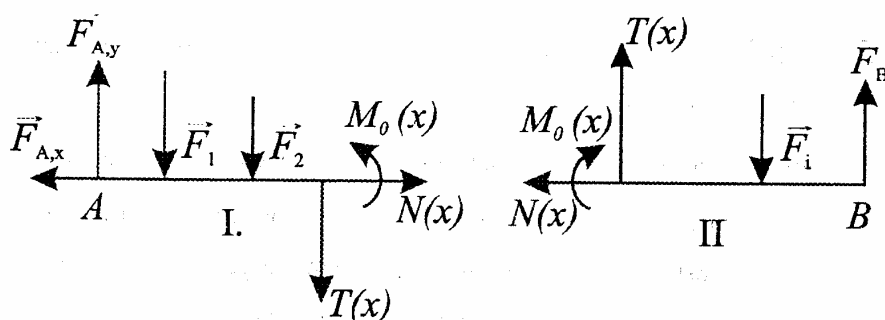


Obr. 17. Uvolněná část

Znaménkové pravidlo pro určení smyslu složek vnitřních sil je podle obr. 18. Kladný smysl síly $N(x)$ je shodný se smyslem vnější normály příčného řezu uvolněné části nosníku.

Kladný smysl síly $T(x)$ je shodný se smyslem otočené kladné síly $N(x)$ ve směru pohybu hodinových ručiček o 90° .

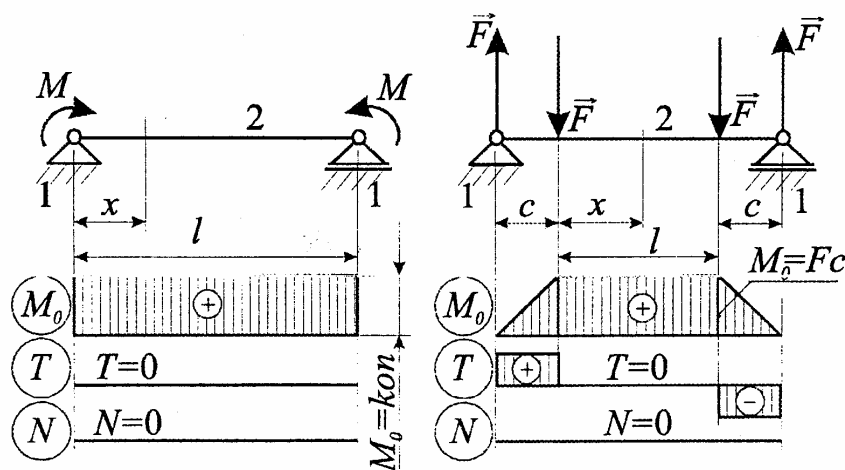
Kladný ohybový moment $Mo(x)$ je takový, který působí na levou část nosníku proti smyslu pohybu hodinových ručiček a na pravou část ve směru pohybu hodinových ručiček.



Obr. 18. Znaménkové pravidlo

K určování extrémních hodnot ohybových momentů, příčných sil a normálových sil řešíme jejich závislost na souřadnici x polohy průřezu.

Příklad průběhů $Mo(x)$, $T(x)$, $N(x)$ nosníku zatíženého podle obr. 19 v intervalu $x \in < 0, l >$ prostým ohybem.

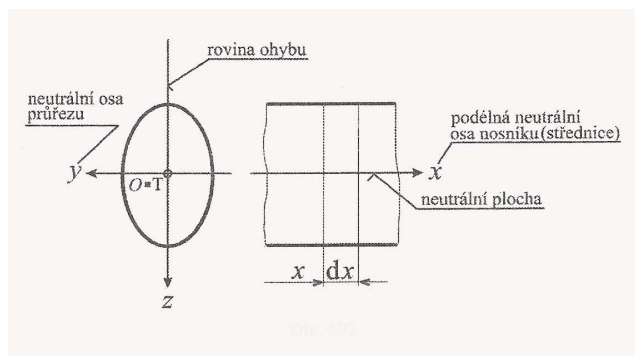
Obr. 19. Příklad průběhů $M_0(x)$, $T(x)$, $N(x)$

1.3 Ohybové napětí

Pro vyšetřování napjatosti a deformace jsou přijaty tyto předpoklady:

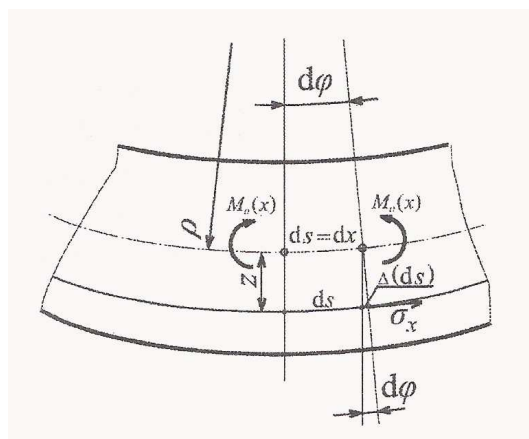
1. Příčné průřezy prutu zůstávají i při zatížení rovinné, účinek silové dvojice o momentu M_0 je otáčivý kolem osy y a průřezy se navzájem tímto momentem jen vzájemně naklánějí.
2. V jednotlivých bodech průřezu prutu vzniká účinkem silové dvojice ohybového momentu jednoosá napjatost ve směru osy x a podélná vlákna se účinkem normálových napětí jen prodlouží nebo zkrátí.
3. Normálová napětí se mění jen po výšce průřezu a po šířce zůstávají stejná.
4. Pro materiál platí Hookeův zákon.

Podélná vlákna, u nichž je $\sigma_x = 0$ tvoří "neutrální plochu" (neutrální vrstvu). Průsečnice roviny vnějšího zatížení s neutrální plochou je průhybová čára nosníku. Toto vlákno v nezatížené přímé poloze nazýváme podélnou neutrální osou nosníku. Průsečnice neutrální plochy s rovinou příčného průřezu se nazývá neutrální osa příčného průřezu (obr. 20).



Obr. 20. Neutrální osa

Vycházíme-li z předpokladu zachování rovinnosti plochy průřezu při ohybu, nakloní se dva sousední souměrné průřezy, které mají vzájemnou vzdálenost od sebe $dx = ds = 0$, o úhel $d\varphi$ a vlákno délky ds ve vzdálenosti z se prodlouží o $\Delta(ds)$ - obr. 21.

Obr. 21. Prodloužení vlákna o $\Delta(ds)$

Z obrázku je zřejmé, že prodloužení $\Delta(ds) = z d\varphi$. Uvažujeme-li v daném místě ve vzdálenosti x poloměr křivosti $\rho(x)$ průhybové čáry, je elementární velikost

$ds = \rho(x) d\varphi$, odkud je $d\varphi = \frac{ds}{\rho(x)}$. Pak je prodloužení $\Delta(ds) = z \frac{(ds)}{\rho(x)}$ a poměrné

prodloužení vlákna je

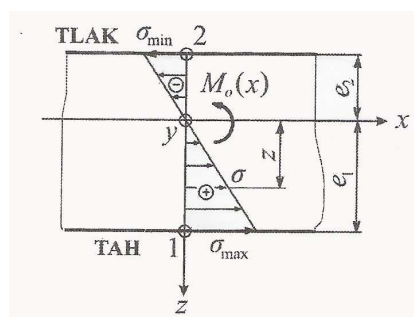
$$\varepsilon = \frac{\Delta(ds)}{ds} = z \frac{ds}{\rho(x)} \frac{1}{ds} = \frac{z}{\rho(x)} \quad (13)$$

U jednoosé napjatosti platí podle Hookeova zákona

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{z}{\rho(x)} \quad (14)$$

Z odvození vyplývá, že napětí je přímo úměrné vzdálenosti z od neutrální vrstvy (pro daný průřez je $E = \text{konst.}$, a $\rho(x)$ nezávisí na souřadnici z). Průběh napětí ve směru výšky

průřezu je lineární (obr. 22).



Obr. 22. Průběh napětí

Největší napětí je v bodě průřezu, který je v největší vzdálenosti od neutrální plochy. Je-li vzdálenost $e_1 \geq e_2$, je to bod 1, u něhož je $z_{\max} = e_1$ a napětí

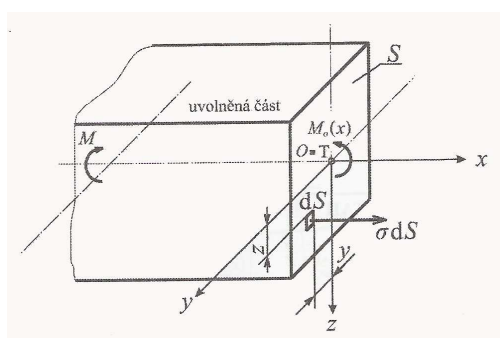
$$\sigma_{\max} = \frac{E}{\rho(x)} z_{\max} = \frac{E}{\rho(x)} e_1 \quad (15)$$

Napětí σ ve vzdálenosti z je z podobnosti trojúhelníků (obr. 22)

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{e_1} z \quad (16)$$

Na uvolněné části tělesa prutu (obr. 23) platí obecně pro rovnováhu prostorové silové soustavy šest podmínek rovnováhy. Elementární vnitřní síla je vyjádřena součinem σds . Statické podmínky rovnováhy jsou:

$$\begin{aligned} 1. \sum_i F_{i,x} &= 0 \dots \int_{(S)} \sigma ds = 0 \\ 2. \sum_i F_{i,y} &= 0 \dots 0 = 0 \\ 3. \sum_i F_{i,z} &= 0 \dots 0 = 0 \\ 4. \sum_i M_{i,x} &= 0 \dots 0 = 0 \\ 5. \sum_i M_{i,y} &= 0 \dots \int_{(S)} \sigma ds z - M = 0 \\ 6. \sum_i M_{i,z} &= 0 \dots \int_{(S)} \sigma ds y = 0 \end{aligned} \quad (17)$$



Obr. 23. Uvolněná část prutu

Nyní provedeme rozbor uvedených rozepsaných podmínek a vyslovíme důležité závěry.

Z 1. statické podmínky vyplývá, kde leží neutrální osa y

Platí:

$$\begin{aligned}\int_{(S)} \sigma dS &= 0 \\ \int_{(S)} \frac{\sigma_{\max}}{e_1} z dS &= 0 \\ \frac{\sigma_{\max}}{e_1} \int_{(S)} z dS &= 0, \int_{(S)} z dS = z_T S = 0 \Rightarrow z_{T=0}\end{aligned}\quad (18)$$

Z výsledku plyne, že neutrální osa y prochází těžištěm T plochy průřezu.

Z 5. statické podmínky vyplývá vztah pro maximální napětí $\sigma_{\max}$

$$\begin{aligned}\int \sigma dS z - M &= 0, \text{ kde je } M = M_o(x) \\ \frac{\sigma_{\max}}{e_1} \int_{(S)} z dS &= M_o(x) \\ \frac{\sigma_{\max}}{e_1} \int_{(S)} z^2 dS &= M_o(x), \text{ kde integrál } \int_{(S)} z^2 dS = I_y\end{aligned}\quad (19)$$

je moment setrvačnosti plochy průřezu k ose y . Vychází vztah:

$$\frac{\sigma_{\max}}{e_1} I_y = M_o(x). \quad (20)$$

Podíl momentu setrvačnosti I_y k neutrální ose y průřezu a vzdálenosti e_1 krajního bodu 1 (obr. 22) od osy y je veličina

$$W_{o,1} = \frac{I_y}{e_1} \quad (m^3), \quad (21)$$

nazvaná modul průřezu v ohybu. Po dosazení je

$$\sigma_{\max} W_{o,1} = M_o(x)$$

a ohybové napětí v krajním bodě 1 lze vyjádřit vztahem

$$\sigma_{\max} = \frac{M_o(x)}{W_{o,1}} \quad (21)$$

Napětí v libovolném bodě průřezu je

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{e_1} z = \frac{M_o(x)z}{W_{o,1} \cdot e_1} = \frac{M_o(x)z}{I_y}. \quad (22)$$

Ze 6. statické podmínky vyplývá, jaké musí být osy y a z

$$\int_{(S)} \sigma dS y = 0 \quad \text{tj.} \quad \frac{\sigma_{\max}}{e_1} \int_{(S)} y z dS = 0 \quad \text{kde integrál} \quad \int_{(S)} y z dS = D_{yz}$$

je deformační moment plochy příčného řezu k osám y, z. Aby byla podmínka splněna, musí být tento integrál roven nule, tj. $D_{yz} = 0$. Deformační moment je roven nule v případě, když jsou osy y a z hlavními osami setrvačnosti příčného průřezu, které podle první podmínky prochází těžištěm, čili jsou hlavními centrálními osami setrvačnosti. U rovinného ohybu je tato podmínka splněna.

Protože maximální ohybové napětí v uvažovaném průřezu je vyjádřeno vztahem

$$\sigma_{\max} = \frac{E}{\rho(x)} e_1$$

je poloměr křivosti

$$\rho(x) = \frac{E}{\sigma_{\max}} e_1 = \frac{E e_1}{\frac{M_o(x)}{W_{o,1}}} = \frac{E W_{o,1} e_1}{M_o(x)} = \frac{E \frac{I_y}{e_1} e_1}{M_o(x)} = \frac{E I_y}{M_o(x)} \quad (23)$$

a křivost je

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_o(x)}{E I_y} \quad (24)$$

Je-li u prizmatického prutu $I_y = \text{konst.}$, $E = \text{konst.}$, a v každém průřezu je stejný $M_o(x)$, je také v každém místě průhybové čáry stejný poloměr křivosti. Průhybovou křivkou je v takovém případě kruhový oblouk. V bodě 2 průřezu, který je ve vzdálenosti e_2 od neutrální plochy, je napětí podle obr. 22

$$\sigma_{\min} = -\frac{M_o(x) e_2}{I_y} = -\frac{M_o(x)}{W_{o,2}} \quad (25)$$

kde pro bod 2 je modul průřezu v ohybu

$$W_{o,2} = \frac{I_y}{e_2} \quad (m^3). \quad (26)$$

1.4 Deformace

1.4.1 Mohrova metoda (výpočet deformací)

Vztahy pro výpočet úhlu φ a průhybu y odvodíme na příkladu jednostranně vetknutého nosníku, zatíženého silovou dvojicí o momentu M na jeho konci. Reakce v místě vetknutí z podmínky rovnováhy momentů je $M_{1,2}^A = M$. Ohybový moment v místě x je $M_o(x) = M_{1,2}^A = M$. Uvažujeme diferenciální rovnici průhybové křivky ve tvaru

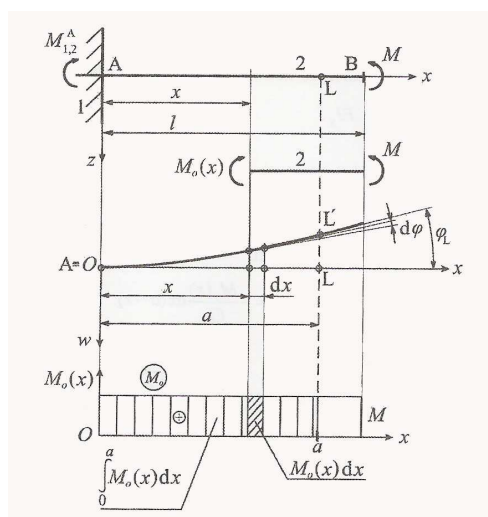
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M_o(x)}{EI_y} \quad (27)$$

Elementární úhel mezi tečnami soumězných bodů na průhybové křivce je

$$d\varphi = -\frac{M_o(x)}{EI_y} dx \quad (28)$$

Úhel sklonu tečny v místě L průhybové křivky je

$$\varphi_L = \int_0^{\varphi_L} d\varphi = -\int_0^a \frac{M_o(x) dx}{EI_y} = -\frac{1}{EI_y} \int_0^a M_o(x) dx \quad (29)$$



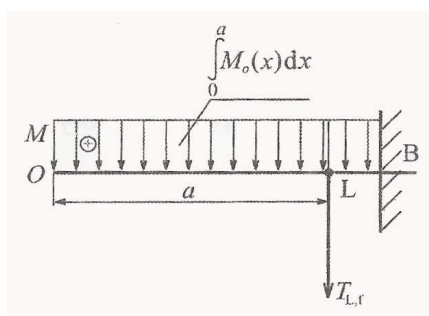
Obr. 24. Průběh skutečného momentu

Představíme-li si nosník (zvaný fiktivní nosník) vetknutý v místě B se zatížením podle průběhu skutečného ohybového momentu (obr. 25) - tedy jako spojitě zatížené momentovou plochou, bude mít integrál $-\int_0^a M_o(x) dx$ význam posouvající síly v místě L

od fiktivního zatížení. Výpočtem zleva je posouvající síla : $T_{Lf} = -\int_0^a M_o(x)dx$.

Je tedy úhel φ_L dán vztahem

$$\varphi_L = -\frac{1}{EI_y} \int_0^a M_o(x)dx = \frac{T_{Lf}}{EI_y}. \quad (30)$$

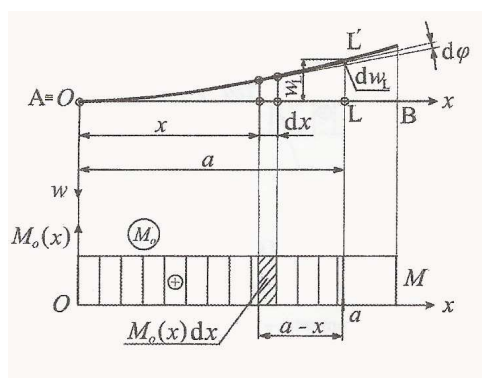


Obr. 25. Fiktivní nosník

Úhel, který svírá tečna k průhybové čáře v bodě L' s kladným smyslem osy x, je roven posouvající síle T_{Lf} v bodě L fiktivního nosníku se zatížením podle skutečného ohybového momentu dělené tuhostí v ohybu EI_y .

Obdobným způsobem lze odvodit vztah pro stanovení průhybu y_L . Podle obr. 26 je úsek mezi tečnami v krajních bodech elementu dx v místě L ve směru osy z elementární průhyb dy , který lze vyjádřit pomocí úhlu $d\varphi$ rovnicí

$$dy_L = d\varphi(a-x) = -\frac{M_o(x)}{EI_y} dx(a-x) \quad (31)$$



Obr. 26. Průhyb

Průhyb v místě L je:

$$y_L = \int_0^{v_L} dv_L = - \int_0^a \frac{M_o(x)}{EI_y} dx(a-x) = - \frac{1}{EI_y} \int_0^a M_o(x)(a-x) dx \quad (32)$$

U fiktivního nosníku má integrál $\int_0^a M_o(x)(a-x) dx$ význam ohybového momentu v místě L od zatížení podle průběhu skutečného ohybového momentu (zatížení momentovou plochou).

$$M_{L,f} = - \int_0^a M_o(x)(a-x) dx$$

Je tedy průhyb y_L dán vztahem :

$$y_L = - \frac{1}{EI_y} \int_0^a M_o(x) dx(a-x) = \frac{M_{L,f}}{EI_y} \quad (33)$$

Průhyb v libovolném místě L nosníku je roven ohybovému momentu v bodě L fiktivního nosníku s fiktivním zatížením shodným s průběhem skutečného ohybového momentu děleným tuhostí v ohybu EI_y .

Závěrem uvedme získané výsledky ve formě dvou vět:

První věta Mohrova:

Nechť L je bod osy x nosníku, ve kterém hledáme úhel sklonu průhybové čáry φ_L . Nechť $T_{L,f}$ je příčná síla v bodě L fiktivního nosníku, který je zatížen momentovou plochou. Potom je sklon průhybové čáry φ_L v bodě L roven příčné síle $T_{L,f}$ dělené součinem EI_y . Matematicky vyjádřeno potom je:

$$\varphi_L = \frac{T_{L,f}}{EI_y}$$

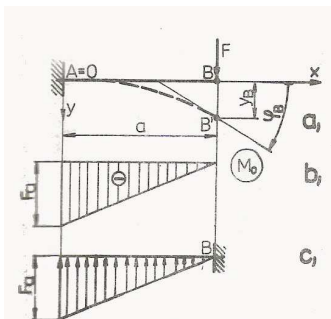
Druhá věta Mohrova:

Nechť L je bod osy x nosníku, ve kterém hledáme průhyb y_L průhybové čáry. Nechť $M_{L,f}$ je ohybový moment v bodě L fiktivního nosníku, který je zatížen momentovou plochou. Potom průhyb y_L průhybové čáry v bodě L je roven ohybovému momentu $M_{L,f}$ dělenému součinem EI_y . Matematicky vyjádřeno pak je:

$$y_L = \frac{M_{L,f}}{EI_y}$$

Příklad výpočtu průhybu prizmatického nosníku pomocí Mohrovy věty

Přímý prizmatický nosník v bodě A dokonale vetknutý a v bodě B zatížený osamělou silou F . Úkolem je určit úhel sklonu tečny k průhybové čáře v bodě B a průhyb v bodě B. Zadané hodnoty jsou F , a , E , J_z .



Obr. 27. Přímý prizmatický nosník

Průhyb ohybových momentů, jakož i fiktivní nosník včetně zatížení momentovou plochou je znázorněn na obr. 27. Smysl jeho zatížení je nahoru, protože momentová plocha je záporná. Příčná síla a ohybový moment v bodě B fiktivního nosníku potom je:

$$\begin{aligned} T_{Bf} &= \frac{1}{2} a \cdot F a = \frac{1}{2} F a^2 \\ M_{Bf} &= \frac{1}{2} a \cdot F a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{1}{3} F a^3 \end{aligned} \quad (34)$$

Po dosazení těchto vztahů do Mohrových vět, obdržíme úhel natočení tečny k průhybové čáře v bodě B' a průhyb nosníku v bodě B ve tvaru:

$$\varphi_B = \frac{F a^2}{2 E J_z} \quad \text{a} \quad y_B = \frac{F a^3}{3 E J_z} \quad (35)$$

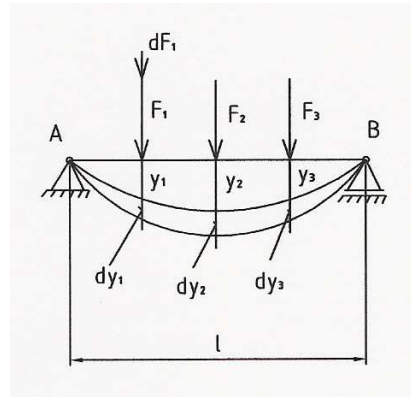
1.4.2 Věta Castiglianova (výpočet deformací)

Věta Castiglianova dává v určitých případech jedno z nejvýhodnějších řešení průhybu a natočení průřezu nosníku. Určuje tyto veličiny přímo pod působícím břemenem, avšak lze ji použít i v těch místech nosníku, kde žádné břemeno nepůsobí a to proto, že universálně platí pro jakékoliv břemeno, tedy i pro břemeno nulové, které v uvažovaném místě je předpokládáno. S výhodou je také používána při řešení staticky neurčitých případů, např. při určování reakcí u nosníků staticky neurčitých (věta o minimu přetvárné práce). Z uvedeného je patrna velká použitelnost Castiglianovy věty, jejíž použití v řešení úloh vyžaduje velmi malé duševní námahy.

Odvození Castiglianovy věty provedeme pro prostý nosník, uložený na jednom kloubově pevně, na druhém konci posouvatelně po vodorovné přímce. Nosník je zatížen soustavou vnějších sil, např. F_1, F_2, F_3 . Úkolem je, určit průhyb pod břemenem F_1 .

Vlivem zatížení F_1, F_2, F_3 se nosník prohne pod břemena na y_1, y_2, y_3 . Připojme nyní k břemenu F_1 staticky působící přírůstek dF_1 (tj. roste od hodnoty nulové do konečné hodnoty dF_1). Ohybová čára, která byla v poloze I., posune se nyní do polohy II. Tím klesla potenciální energie zatěžujících sil F_1, F_2, F_3 o hodnotu dU_F , pro kterou dle dřívějšího odstavce platí

$$dU_F = dU \quad \text{a} \quad dU = dA_F \quad (36)$$



Obr. 28. Průhyb nosníku

Protože potenciální energie deformační $U = f(F_1, F_2, F_3)$, bude její změna dU dána totálním diferenciálem této funkce, přičemž $dF_2 = dF_3 = 0$, takže

$$dU = \frac{\partial U}{\partial F_1} dF_1 \quad (37)$$

Při statickém zatížení břemena F_1, F_2, F_3 se vykonala určitá práce A_I a přírůstkem dF_1 se vykonala další práce A_{II} , takže přírůstek práce dA_F je

$$dA_F = A_{II} - A_I \quad (38)$$

Práce vykonaná statickým zatížením uvedenými silami F_1, F_2, F_3 je

$$A_I = \frac{1}{2} F_1 y_1 + \frac{1}{2} F_2 y_2 + \frac{1}{2} F_3 y_3 \quad (39)$$

Kdybychom nyní zatížili nosník pouze břemenem dF_1 , prohnul by se v místě zatížení o dy_1 a vykonala by se práce

$$dA' = \frac{1}{2} F_1 dy_1 \quad (40)$$

Statickým zatížením silami $F_1 \dots$ prohnul by se dále nosník o $y_1 \dots$, takže by se vykonala práce (při již existujícím zatížení dF_1):

$$A' = dF_1 dy_1 + \frac{1}{2} F_1 y_1 + \frac{1}{2} F_2 y_2 + \frac{1}{2} F_3 y_3 \quad (41)$$

Celková práce vnějších sil A_{II} , rovny potenciální energii U by pak byla

$$A_{II} = \frac{1}{2} dF_1 dy_1 + dF_1 y_1 + A_I \quad (42)$$

Z toho bude přírůstek práce vnějších sil

$$dA_F = A_{II} - A_I = \frac{1}{2} dF_1 dy_1 + dy_1 dF_1$$

ve výrazu můžeme první člen zanedbat, takže dostaneme

$$dA_F = dF_1 y_1 \quad (43)$$

pak dostaneme

$$dF_1 y_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1} dF_1$$

dostáváme výraz prvé věty Castiglianovy

$$y_1 = \frac{\partial U_1}{\partial F_1} \quad (44)$$

Podobným způsobem obdržíme i druhou větu Castiglianovu pro úhel natočení průřezu momentem M

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M} \quad (45)$$

První věta Castiglianova:

Průhyb nosníku v místě zatížení obdržíme, když celkovou potenciální energii nosníku, číselně rovnou práci vnějších sil, derivujeme podle tohoto zatížení.

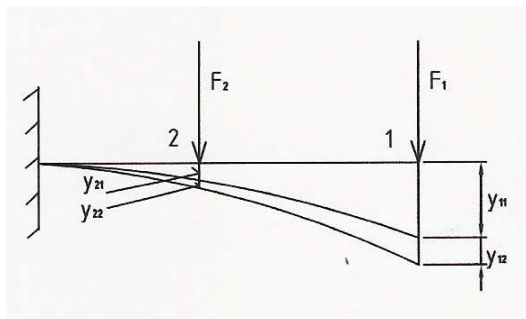
Druhá věta Castiglianova:

Úhel natočení průřezu nosníku obdržíme, když celkovou energii nosníku, rovnou práci vnějších sil, derivujeme podle momentu v tomto místě.

Castiglianova věta platí pro jakoukoli sílu, tedy i pro sílu nulovou. (třetí znění Castiglianovy věty).

1.5 Věta Maxwellova (věta o vzájemnosti posuvů)

Vztah mezi deformacemi v různých průřezích nosníku je dán Maxwellovou větou o vzájemnosti posuvů (prací). Odvození této věty provedeme na vetknutém nosníku použitím poučky o nezávislosti velikosti potenciální energie na pořadí připojení statického zatížení.

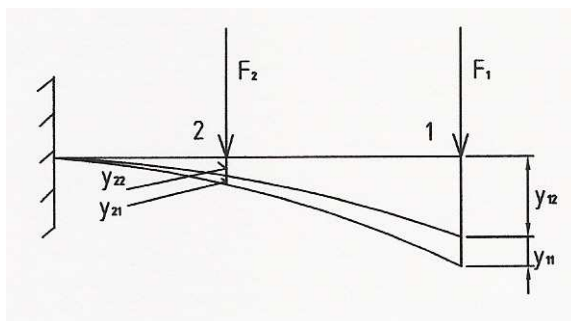


Obr. 29. Vetknutý nosník 1

Na nosník působí v řezu 1 síla F_1 , takže se nosník prohne v řezu 1 o y_{11} a v řezu 2 o y_{21} . Index 11 u průhybu y_{11} značí, že je to průhyb v řezu 1 od síly působící v místě 1, index 21 u průhybu y_{21} značí, že je to průhyb v místě 2 od síly působící v místě 1. Statickým připojením síly F_2 v místě 2 dojde k další deformaci. Protože podle vztahu $U = A_F$ nahromadí se při konečném tvaru ohybové čáry v nosníku potenciální energie deformační

$$U_a = A_{Fa} = \frac{1}{2} F_1 y_{11} + \frac{1}{2} F_2 y_{22} + F_1 y_{12} \quad (46)$$

je patrné z výrazu, že síla F_1 koná dvě práce: na průhybu y_{11} , který sama vyvolala, na průhybu y_{12} , který byl způsoben silou F_2 . Při druhé práci působí síla F_1 hned na počátku v plné velikosti.



Obr. 30. Vetknutý nosník 2

Připojíme li nejprve sílu F_2 v řezu 2 a pak teprve sílu F_1 v řezu 1, dostáváme dílčí průhyby. Konečná deformace je stejná jako v případě obr. 29. Platí tedy

$$U_b = A_{Fb} = \frac{1}{2} F_2 y_{22} + \frac{1}{2} F_1 y_{11} + F_2 y_{21} \quad (47)$$

Protože velikost U závisí jen na konečné deformaci, musí platit

$$U_a = U_b$$

Srovnáním obou výrazů obdržíme

$$U_a = A_{Fa} = \frac{1}{2} F_1 y_{11} + \frac{1}{2} F_2 y_{22} + F_1 y_{12} = U_b = A_{Fb} = \frac{1}{2} F_2 y_{22} + \frac{1}{2} F_1 y_{11} + F_2 y_{21}$$

$$F_1 y_{12} = F_2 y_{21}$$

Rovnice 48 tvoří větu Maxwellovu o vzájemnosti prací. Pro zvláštní případ, kdy $F_1 = F_2 = F$, přejde rovnice ve tvar

$$y_{12} = y_{21} \quad (48)$$

což je Maxwellova věta o vzájemnosti posuvů. V případě, že $F_1 = 1$, nazýváme příslušné průhyby – příčinkovými součiniteli a značíme je

$$\eta_{12} = \eta_{21}.$$

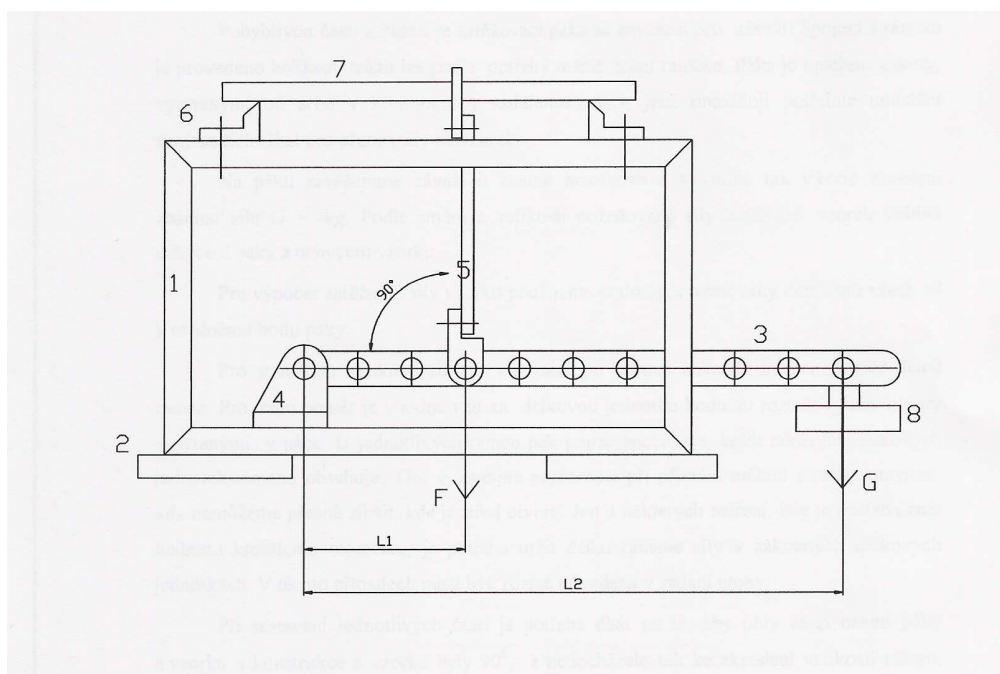
2 EXPERIMENTÁLNÍ A PRAKTICKÁ ČÁST

2.1 Návrh přípravku pro demonstraci ohybu

2.1.1 Základní části přípravku

Pro realizaci ohybových namáhání jsme vyvinuli univerzální stavebnici, která se bude používat v laboratorním cvičení z Pružnosti pevnosti.

Stavebnice se skládá z rozebíratelných částí (obr. 31), které se dají libovolně podle požadavku druhu uložení vzorku kompletovat a spolu spojovat šrouby tak, aby byl zajištěn stupeň statické určitosti úlohy.



Obr. 31. Schéma přípravku pro demonstraci ohybu

- 1 - rám
- 2 - podstavec
- 3 - páka
- 4 - uložení páky
- 5 - táhlo
- 6 - podpora
- 7 - vzorek
- 8 - závaží

Rám:

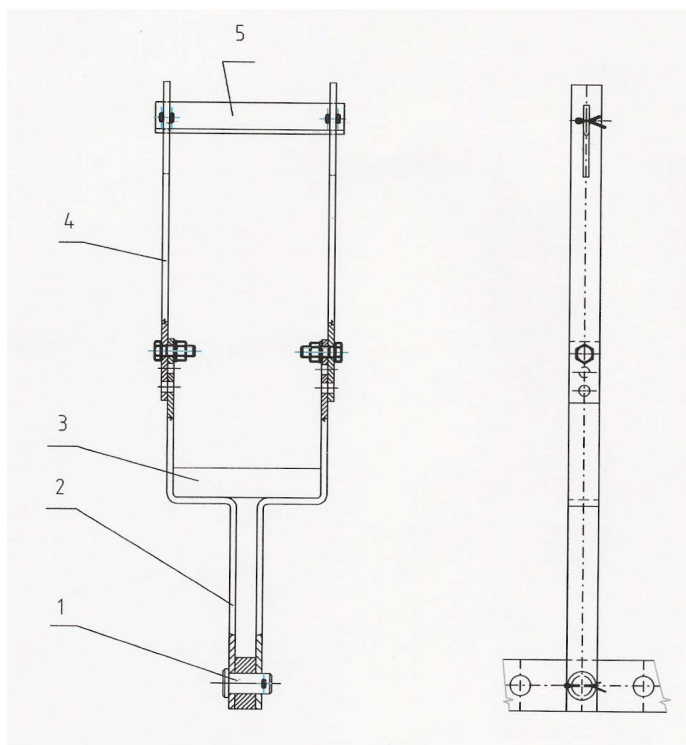
Základní část tvoří rám. Ten je navržen tak, aby se dal použít nejen pro ohybové zkoušky, ale i zkoušky krutu, tahové nebo tlakové. Rám je konstruován tak, aby umožňoval připevnění dalších částí přípravku (páky, uchycení pro měřící zařízení, prvků pro uložení nosníků $\Rightarrow$ vetknutí, jednoduché podpěry atd.). Rám je svařen z ocelových trubek čtvercového profilu. Po obvodu rámu jsou vyvrtány otvory ve vzdálenosti 30mm, tím vzniká široká univerzálnost rámu.

Páka:

Další část zařízení tvoří páka. Ta slouží k přenosu zatěžující síly. Síla je vyvozena pomocí závaží, které je umístěno na jednom konci páky. Na druhém konci je páka uchycena pomocí čepu k rámu. Na páce jsou vyvrtány otvory po 30mm, takže lze libovolně měnit vzdálenost zatěžující síly a tím i velikost síly $\Rightarrow G.L_2 = F.L_1$.

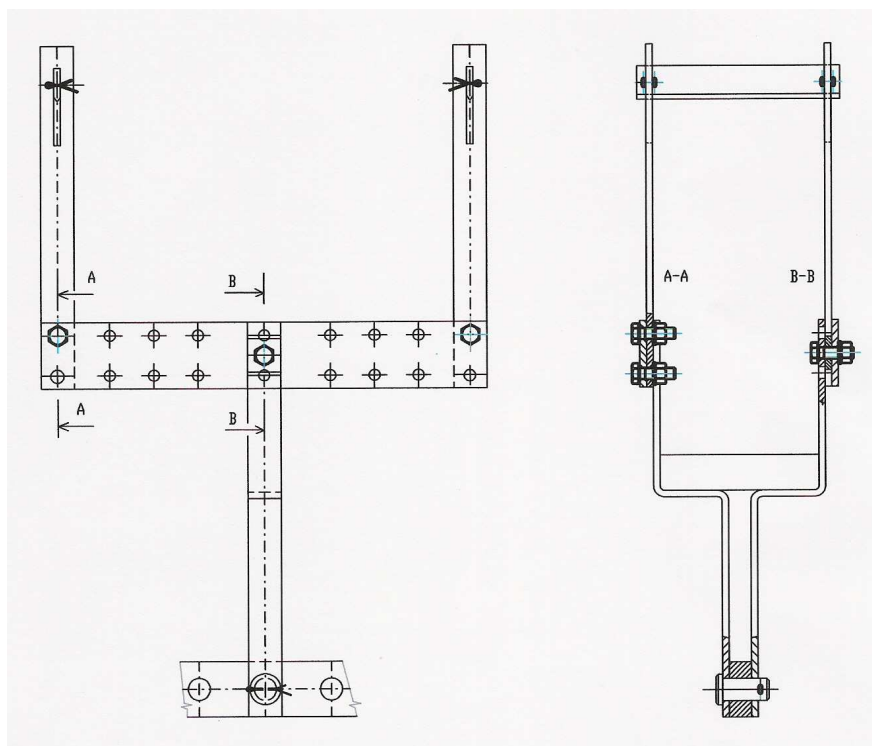
Táhlo:

Táhlo slouží k přenosu zatěžující síly z páky na zkoušený materiál a tvoří spojnicí mezi pákou a zkoušeným vzorkem (nosníkem). Pomocí táhla je možné vyvodit jednu nebo dvě síly. Táhlo je vyrobeno z ocelového plechu o tloušťce 2mm.



Obr. 32. Táhlo vyvozující 1 sílu

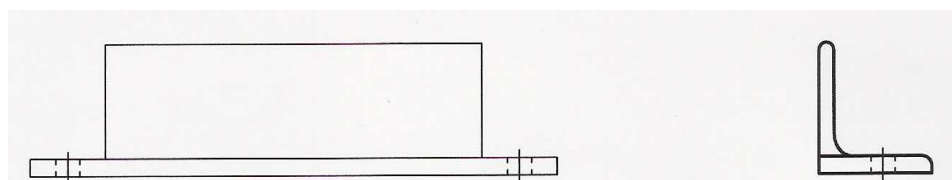
V obrázku 32 je: 1-čep spojující táhlo s pákou, 2-vidlice, 3-výztuha, 4-uložení břitu, 5- břit .



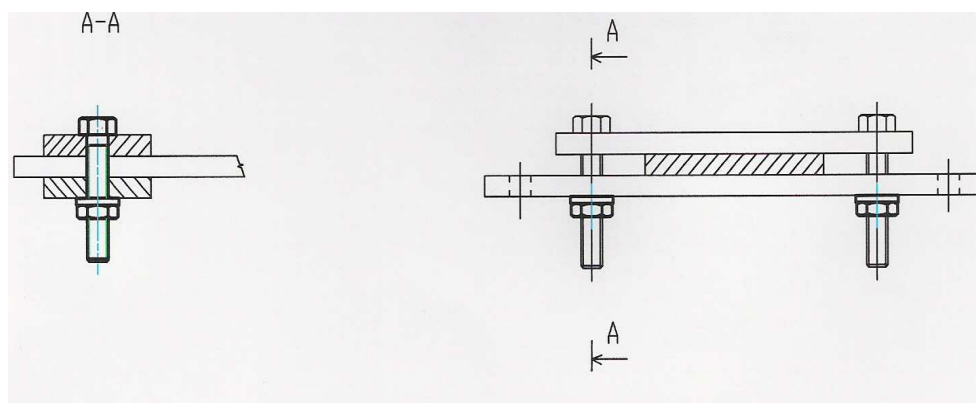
Obr. 33. Táhlo vyvozující 2 síly

Uložení nosníků:

Další část přípravku tvoří uložení nosníků, to může být pomocí podpěry (obr. 34) nebo pomocí pevného uložení – vetknutí (obr. 35). Podpěra je vyrobená z normalizované tyče o průřezu rovnoramenného L. Vetknutí je vyrobeno z ocelového pásu o tloušťce 5mm.



Obr. 34. Podpěra

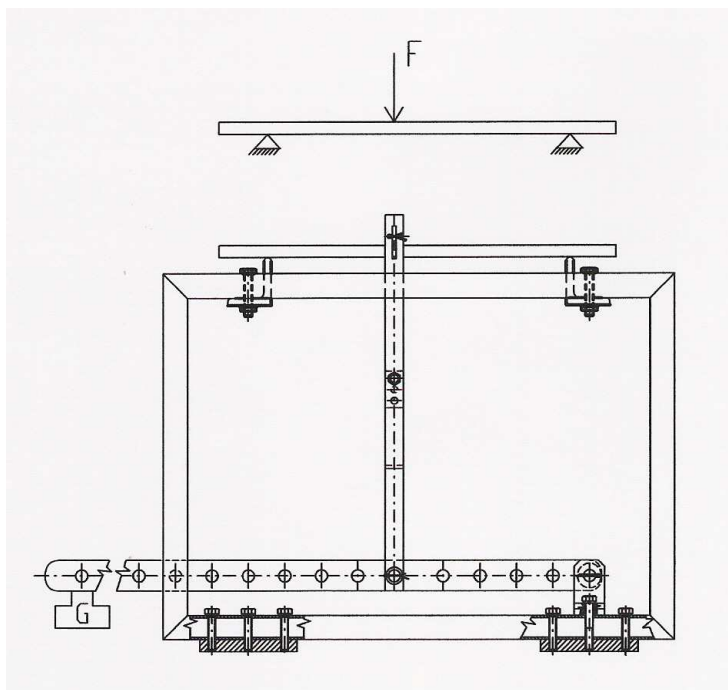


Obr. 35. Pevné uložení - vetknutí

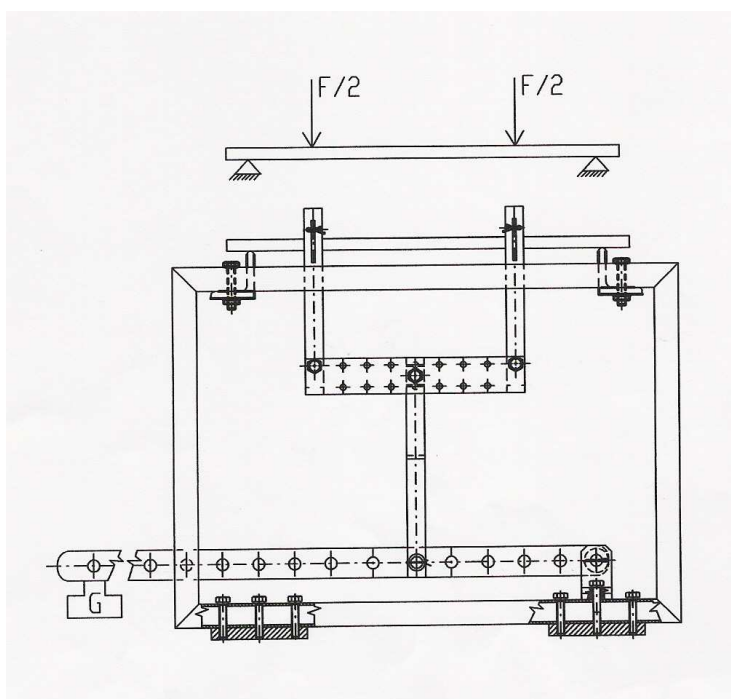
2.1.2 Příklady uložení nosníků

Tento přípravek je navržen tak, aby bylo možné demonstrovat jak staticky určité případy uložení tak i staticky neurčité případy. Můžeme také libovolně měnit vzdálenost uložení i vzdálenost zatěžující síly. Různé uložení nosníku ukazují následující schémata:

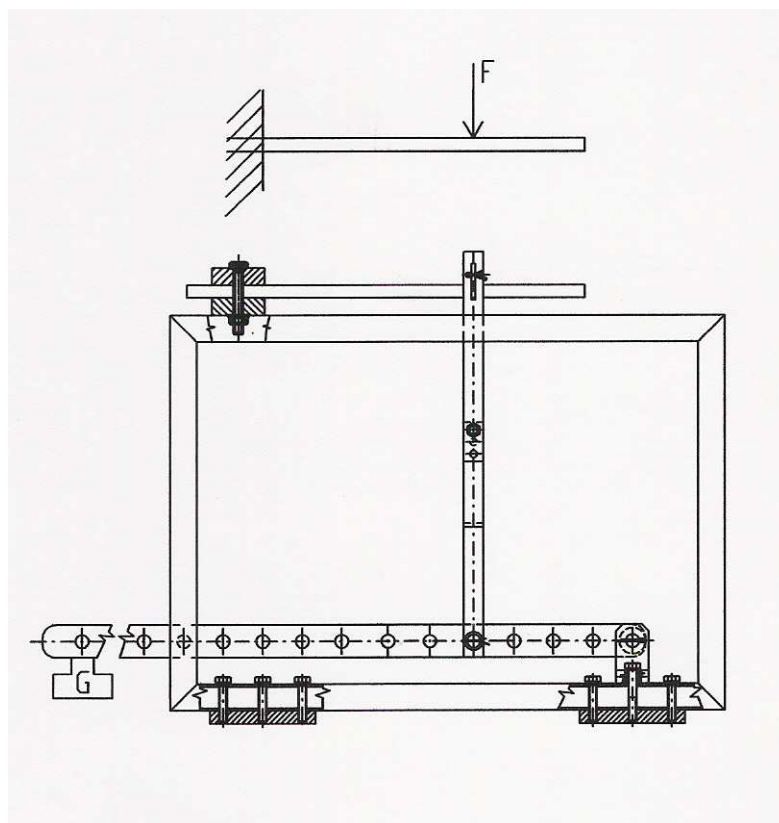
Staticky určité případy uložení nosníků:



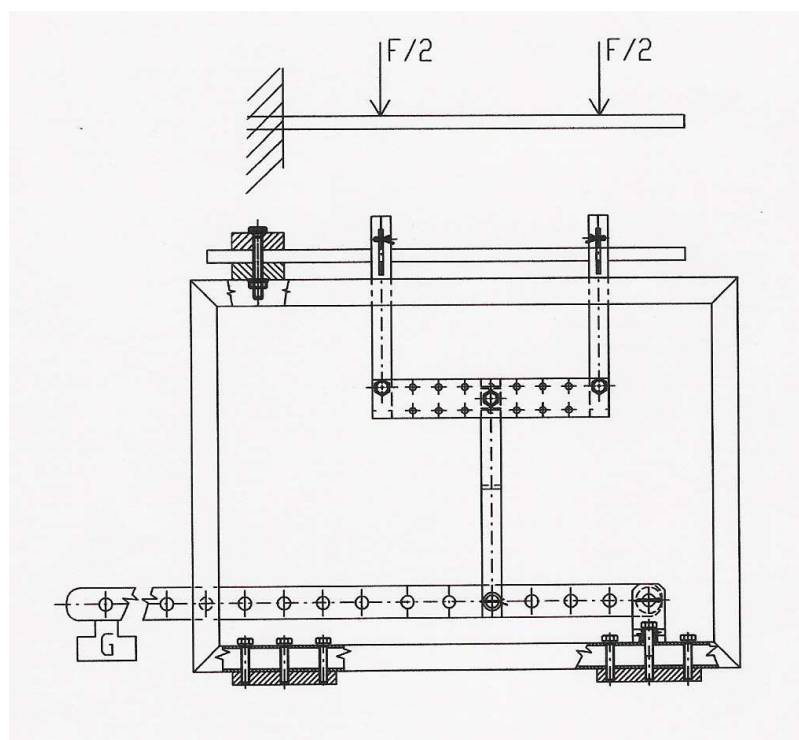
Obr. 36. Nosník na dvou podpěrách zatížený silou F



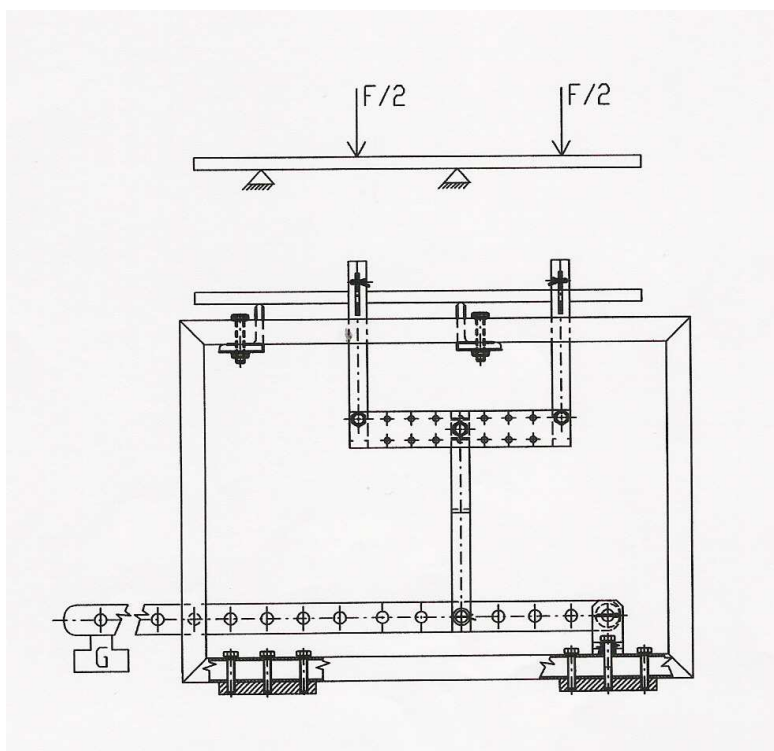
Obr. 37. Nosník na dvou podpěrách zatížený dvojicí sil



Obr. 38. Nosník jednostranně vetknutý zatížený jednou silou

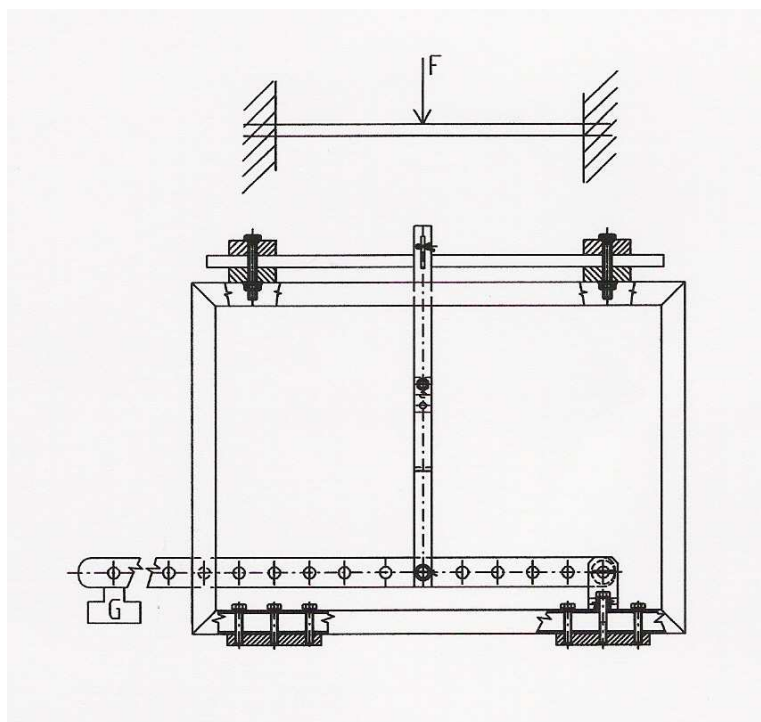


Obr. 39. Nosník jednostranně vetknutý zatížený dvojicí sil

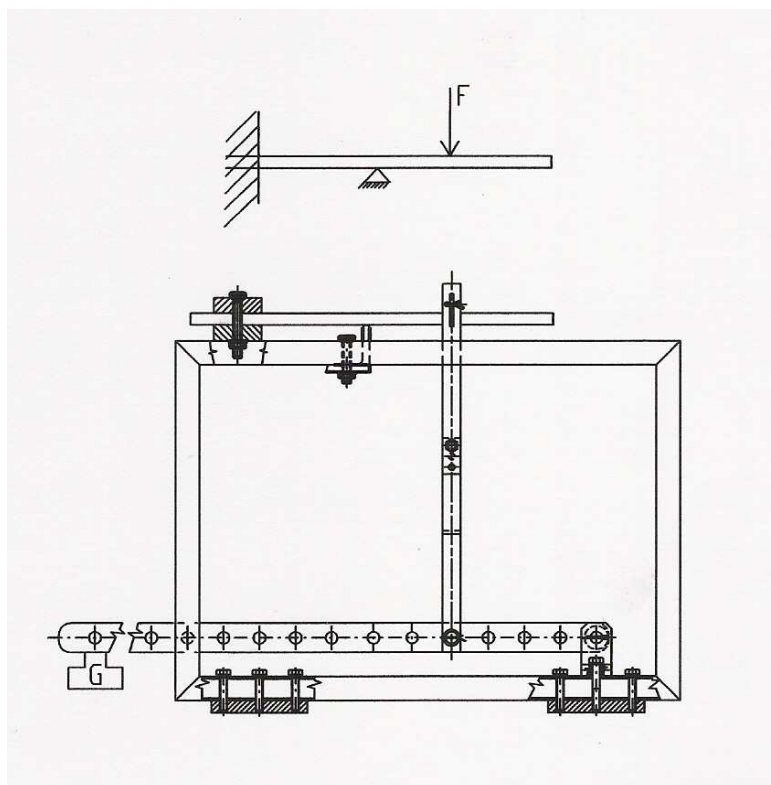


Obr. 40. Nosník na dvou podpěrách s převislým koncem

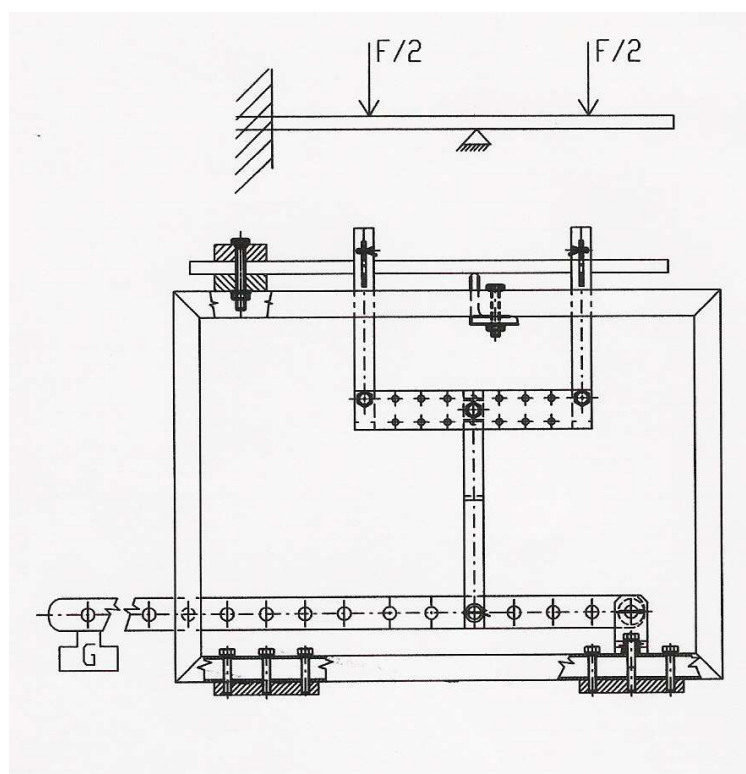
Staticky neurčité případy uložení nosníků:



Obr. 41. Nosník oboustranně vetknutý



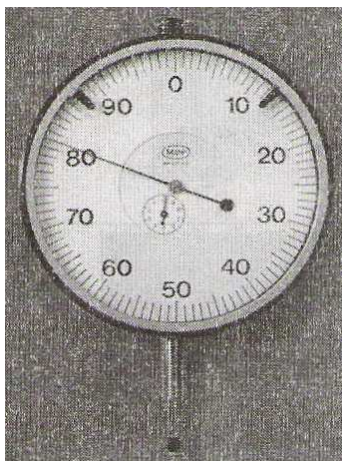
Obr. 42. Nosník na jedné straně vetknutý a na druhé straně podpěra s převislým koncem zatížený jednou silou



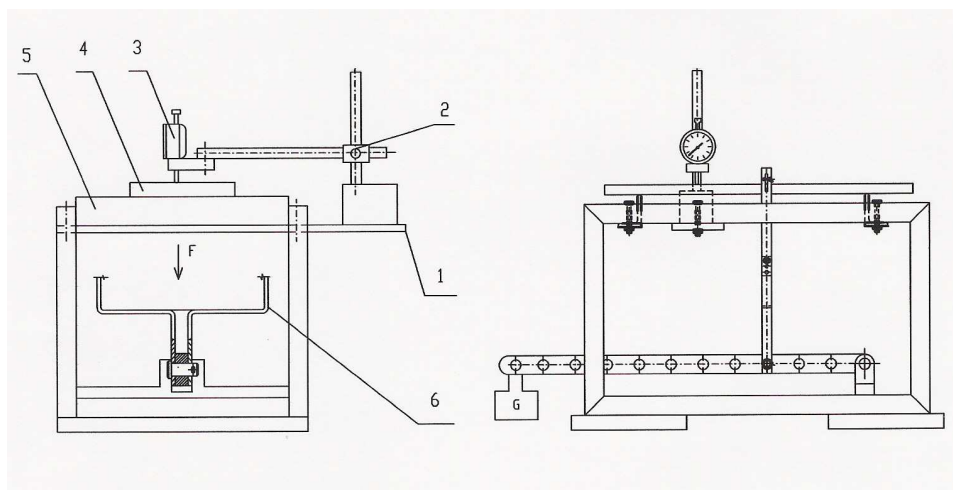
Obr. 43. Nosník na jedné straně vetknutý a na druhé straně podpěra s převislým koncem zatížený dvojicí sil

2.1.3 Měřicí zařízení

Základním požadavkem při demonstraci ohybových zkoušek je změřit průhyb zkoušeného nosníku. Měření budeme provádět pomocí číselníkového úchylkoměru (obr. 44). Ten je uchycen k rámu pomocí stojanu (obr. 45).

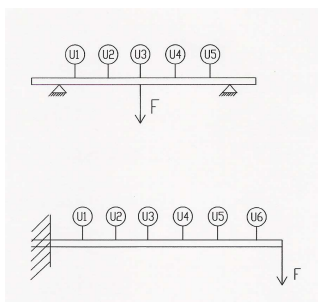


Obr. 44. Číselníkový úchylkoměr



Obr. 45. Schéma měřicího zařízení

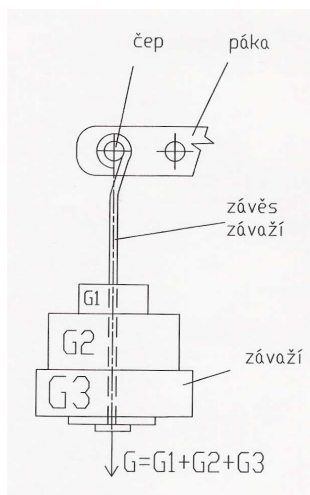
V obrázku 50 je: 1-podložka stojanu, 2-stojan, 3-číselníkový úchylkoměr, 4-zkoušený vzorek, 5-podpěra, 6- táhlo. Podložka se stojanem se dá připevnit k rámu v jakémkoliv místě a tím můžeme měřit průhyb nosníku v požadovaném místě (obr. 46).



Obr. 46. Schéma měření

2.1.4 Závaží

K vyvození zatěžující síly, která působí na zkoušený vzorek (nosník), je potřeba závaží. Závaží je přichyceno k páce pomocí čepu a závěsu závaží (obr. 47).

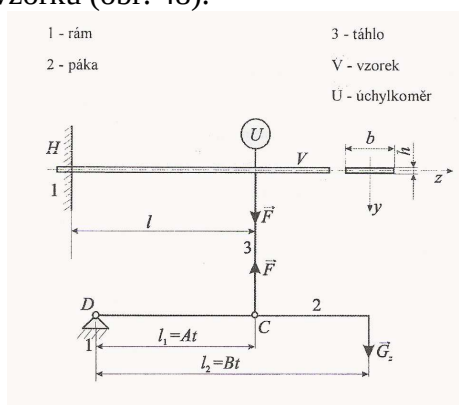


Obr. 47. Závaží

Závaží je vyrobeno z oceli kruhového průřezu. Uprostřed závaží je otvor pro provlečení závěsu závaží.

2.1.5 Stanovení zatěžující síly

Na páku zavěšujeme závaží o známé hmotnosti a vyvíjíme tak v bodě zavěšení známou sílu $G = mg$. Podle směru a velikosti požadované síly zatěžující vzorek volíme uchycení páky a uchycení vzorku (obr. 48).



Obr. 48. Zatěžovací zařízení

Pro výpočet zatěžující síly vzorku použijeme podmínku rovnováhy momentů všech sil k otočnému bodu páky.

$$G_z \cdot l_2 = F \cdot l_1$$

Pro stanovení velikosti síly je v rovnici po úpravě nakonec uveden poměr délek ramen. Pro

tento poměr je vhodné vzít za délkovou jednotku hodnotu rozteče t mezi otvory vyvrtanými v páce. U jednotlivých ramen pak pouze spočítáme, kolik takových délkových jednotek rameno obsahuje. Tím vyloučíme nepřesnost při přímém měření pomocí pravítka, kdy nemůžeme přesně zjistit, kde je střed otvoru. Jen u některých měření, kdy je potřeba znát hodnotu kroutícího momentu, je potřeba určit délku ramene síly v zákonných délkových jednotkách. V těchto případech musí být rozteč t uvedena v zadání úlohy.

Při sestavení jednotlivých částí je potřeba dbát na to, aby úhly mezi osami páky a vzorku a konstrukce a vzorku byly 90° , a nedocházelo tak ke zkreslení velikostí ramen. Při pohledu z boku pak musí být vzorek, konstrukce i páka v jedné rovině, aby nevznikaly přidavné ohybové nebo kroutící momenty.

Po sestavení měřicí aparatury, aniž bylo přiloženo závaží, působí na vzorek určitá síla způsobená hmotností součástí zařízení (páky, spojky, kolíku a závěsu závaží). Tato zatěžující síla by se obtížně určovala a proto je vhodné tuto sílu vzít za základ, a všechny změřené hodnoty vztahovat k ní.

Před každým měřením je třeba určit, jakou silou lze na vzorek působit a vyhodnotit, zda nebude překročena dovolená hodnota napětí a deformace.

Síla F přenášená na vzorek musí vyhovovat rovnici $G.L_2 = F.L_1$.

2.2 Materiály zkoušených vzorků

Zkoušené vzorky (nosníky) pro demonstraci ohybu jsou z různých druhů plastu:

Termoplasty:

Jsou plastické hmoty, které zahřátím měknou (stávají se těstovité) a ochlazením tuhnou. Termoplasty mohou podle teploty zaujímat pevný elastický (hmota je tuhá a dělí se obráběním), termoplastický (hmota je lehce tvářitelná – ohýbání, tažení) nebo termoplastický (hmota je viskozní a může se protlačovat nebo vstřikovat) stav. Používané termoplasty a jejich moduly pružnosti:

- Tvrdý PVC : modul pružnosti $E = 2800 - 3000 \text{ MPa}$
- Tvrdý polyetylén PE: modul pružnosti $E = 960 \text{ MPa}$
- Polypropylén PP: modul pružnosti $E = 1200 - 13000 \text{ MPa}$
- Tvrdý polystyrén PS: modul pružnosti $E = 2800 - 3500 \text{ MPa}$
- Polymethylmetakrylát PMMA: modul pružnosti $E = 1400 \text{ MPa}$

Reaktoplasty:

Jsou plastické hmoty, které po prvním zpracování nejsou dále zpracovatelné.

Reaktoplastické hmoty jsou materiály na bázi umělých pryskyřic (fenolformaldehydová, melaminová, epoxidová), které slouží jako pojivo a mísí se spolu s plnivem (kamenný a dřevěný prášek, papír, skleněná vlákna) a dalšími přísadami (tvrdidla, maziva, barviva). Reaktoplasty se vytvrzují působením tepla a přidáním tvrdidla.

Ohybová zkouška je vhodná pro následující materiály:

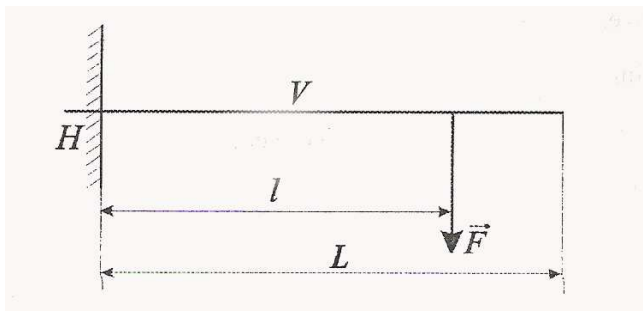
- 1) Vstříkované a vytlačované termoplasty včetně plněných a vyztužených termoplastů, tuhé termoplastové desky
- 2) Lisovací reaktoplasty včetně plněných a vyztužených, reaktoplastové desky včetně laminátů.
- 3) Vlákniny vyztužené reaktoplastové a termoplastové kompozity obsahující jednosměrné i vícesměnné výztuže jako jsou rohože, tkaniny vláknové a pramencové.
- 4) Termotropní polymery z tekutých krystalů.

2.3 Vzorové úlohy z oblasti ohybové napjatosti a deformace

2.3.1 Úkol č.1

Zadání úkolu:

U jednostranně vetknutého nosníku se zatížením osamělou silou F podle obr. 49 určete v místě zatěžující síly jeho průhyb. Měření proveďte třikrát pro 5 různých zatížení. Po každém měření odlehčete vzorek. Naměřené hodnoty průhybů ověřte výpočtem jak podle Mohrovy věty tak i podle Castigliana. Z naměřených hodnot průhybů stanovte aritmetický průměr $\bar{x}$ a jeho směrodatnou odchylku s . Dále vypočítejte při každém měření maximální napětí v ohybu v místě vetknutí.



Obr. 49. Jednostranně vetknutý nosník (úkol č.1)

V místě vetknutí pro jednotlivé síly F vypočítáme napětí v ohybu podle vztahu:

$$\sigma_o = \frac{6Fl}{bh^2} \quad (\text{Pa}) \quad (52)$$

kde síla F je:

$$F = \frac{m_z \cdot g \cdot B}{A} \quad (\text{N}).$$

Vypočítané a naměřené hodnoty zapíšeme do tabulky:

Tabulka I. Naměřené a vyp. hodnoty (úkol č.1)

i	m_z (g)	F (N)	y (mm)
1			
2			
3			
4			
5			

Ověření naměřených hodnot jednotlivých průhybů s výpočtem: Vztah pro průhyb v místě působící síly F lze odvodit jak Mohrovou metodou tak i podle Castigliana:

a) Výpočet průhybu Mohrovou metodou:

Průhyb nosníku se vypočítá podle druhé Mohrovy věty, která je vyjádřena vztahem:

$$y = \frac{M_{F,f}}{EI_z}$$

$M_{F,f}$ je fiktivní ohybový moment v místě působící síly F a jeho hodnota je:

$$M_{Ff} = \frac{1}{2} l \cdot F \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} Fl^3$$

po dosazení je průhyb:

$$y = \frac{Fl^3}{3EI_z} \quad (\text{mm})$$

b) Výpočet průhybu podle Castigliana:

$$y = \frac{\partial A}{\partial F} \quad (53)$$

kde A je deformační práce nosníku a její rovnice je:

$$A = \frac{1}{2EI_z} \int_l M^2 dx \quad (54)$$

Ohybový moment má velikost $M(x) = -F \cdot x$, kde $x = l$

Po dosazení je průhyb:

$$y = \frac{\partial A}{\partial F} = \frac{1}{2EI_z} \cdot \frac{\partial}{\partial F} \int_0^l M^2 dx \Rightarrow$$

$$y = \frac{Fl^3}{3EI_z} \quad (55)$$

Na závěr z naměřených průhybů stanovíme aritmetický průměr a jeho směrodatnou odchylku.

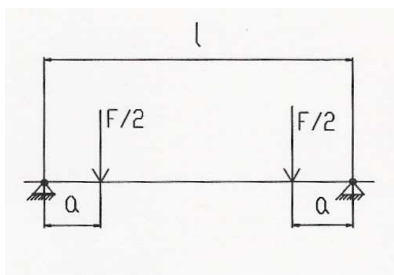
Obsah protokolu:

1. Záhloví.
2. Zadání úkolu.
3. Schéma zatěžovacího zařízení s nosníkem a úchylkoměrem.
4. Stručný teoretický základ, postup.
5. Výpočet maximálního zatížení.
6. Graf průběhu ohybového momentu.
7. Tabulka vypočítaných a naměřených hodnot.
8. Příklad výpočtu hodnot prvního řádku tabulky.
9. Výsledek měření, porovnání naměřených a vypočítaných hodnot.
10. Výpočet chyb a závěr.

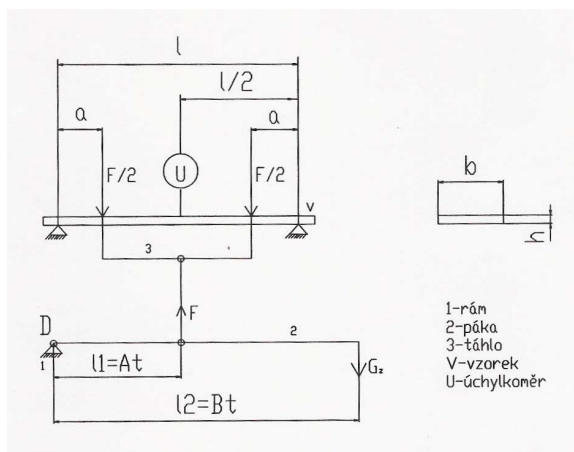
2.3.2 Úkol č.2

Zadání úkolu:

Stanovte u nosníku na dvou podpěrách, který je zatížen dvojicí sil (obr. 51), modul pružnosti ze závislosti průhybu nosníku na zatížení. Průhyb měřte uprostřed nosníku pro 5 různých zatížení. Po každém měření odlehčete vzorek. Měření opakujte třikrát. Hodnotu modulu pružnosti získanou měřením porovnejte s tabulkovou hodnotou a stanovte chyby vzniklé měřením.



Obr. 51. Nosník na dvou podpěrách (úkol č.2)



Obr. 52. Schéma zatěžujícího zařízení (úkol č.2)

Postup: Délkové rozměry průřezu b , h a aktivní délku nosníku l změříme obvyklým způsobem. Z hodnot b a h vypočítáme I_z pro obdélníkový průřez podle vztahu:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

Délky l_1 a l_2 vyjádříme vztahy $l_1 = At$ a $l_2 = Bt$, kde A, B je počet roztečí ($t=30\text{mm}$) mezi otvory vyvrtanými v páce.

Z podmínky rovnováhy momentu na páce k bodu D

$$l_1 F = l_2 G_z$$

dostaneme vztah pro velikost síly:

$$F = \frac{m_z \cdot g B}{A}$$

Síla F se přenese z páky na nosník ve dvou polovičních silách $F/2$. Maximální ohybový moment je v místě působení sil $F/2$ a jeho absolutní hodnota je $\frac{F}{2} \cdot a$ (Nm).

Z pevnostní podmínky $|\sigma_{o\max}| \leq \sigma_{o,D}$ plyne po dosazení hmotnost zatěžovacího závaží:

$$m_z \leq \frac{Abh^2 \sigma_{o,D}}{3Bga} \quad (\text{kg})$$

Pro měření volíme velikost hmotnosti s ohledem na znaménko nerovnosti a deformační podmínku $y_{\max} \leq y_{\max,D}$ a to tak, aby byl pružný průhyb malý.

Vzorek upneme do zatěžovacího zařízení a úchylkoměr umístíme doprostřed nosníku. Před měřením vynulujeme úchylkoměr při neznámém zatížení jednotlivými prvky aparatury nebo odečteme základní hodnotu na stupnici.

Změnou hmotnosti závaží zatěžujeme postupně vzorek různými hodnotami síly F a

odečítáme průhyb y . Vypočítané a naměřené hodnoty zapíšeme do tabulky:

Tabulka II. Naměřené a vyp. hodnoty (úkol č.2)

i	m_z (kg)	F (N)	y (mm)
1			
2			
3			
4			
5			

Vztah pro průhyb, který měříme uprostřed nosníku, je podle Castigliana:

$$y = \frac{\partial A}{\partial F_Q} \quad (56)$$

kde F_Q je fiktivní síla působící v místě zjišťovaného průhybu a má velikost $F_Q = 0$.

A je deformační práce nosníku a její rovnice je

$$A = \frac{1}{2EI_z} \left[\int_0^{x_1} M_1^2 dx_1 + \int_0^{x_2} M_2^2 dx_2 + \int_0^{x_3} M_3^2 dx_3 + \int_0^{x_4} M_4^2 dx_4 \right] \quad (57)$$

$$E = \frac{1}{y \cdot I_z} \left[\int_0^{x_1} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial F_Q} dx_1 + \int_0^{x_2} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial F_Q} dx_2 + \int_0^{x_3} M_3 \frac{\partial M_3}{\partial F_Q} dx_3 + \int_0^{x_4} M_4 \frac{\partial M_4}{\partial F_Q} dx_4 \right]$$

Hodnoty modulu pružnosti získané měřením porovnáme s tabulkovou hodnotou. Měření a výpočty doplníme stanovením chyb.

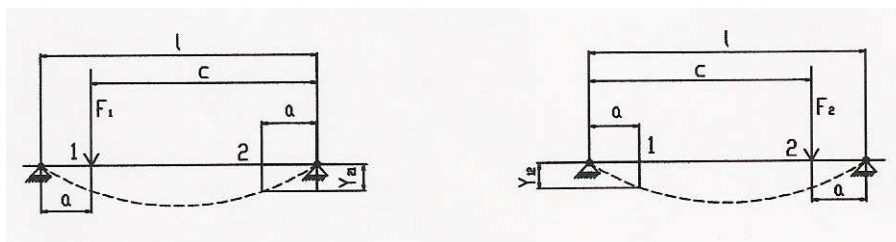
Obsah protokolu:

1. Záhloví.
2. Zadání úkolu.
3. Schéma zatěžovacího zařízení s nosníkem a úchylkoměrem.
4. Stručný teoretický základ, postup.
5. Výpočet maximálního zatížení.
6. Tabulka vypočítaných a naměřených hodnot.
7. Příklad výpočtu hodnot prvního řádku tabulky.
8. Výsledek měření, porovnání naměřených a vypočítaných hodnot s tabulkovou hodnotou.
9. Výpočet chyb a závěr.

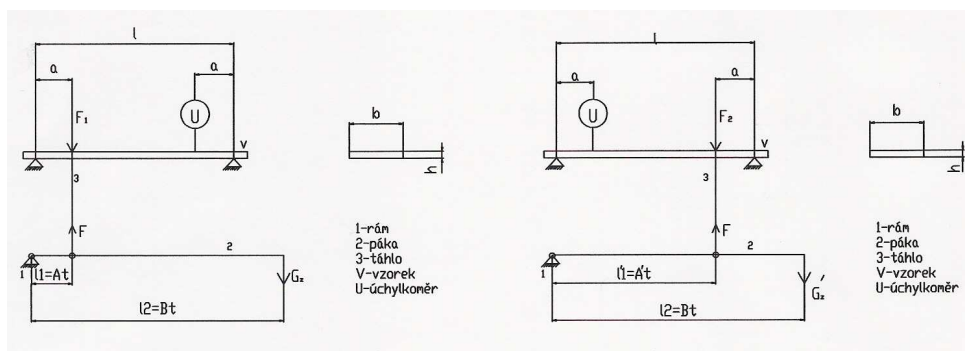
2.3.3 Úkol č.3

Zadání úkolu:

Demonstrujte Maxwellovu větu (věta o vzájemnosti posuvů) na nosníku o dvou podpěrách. Na nosník působí v místě 1 síla F_1 , takže se nosník prohne v místě 2 o y_{21} . Potom působí v místě 2 síla F_2 , takže se nosník prohne v místě 1 o y_{12} . Měřením ověřte, že platí $y_{12} = y_{21}$ - Maxwellova věta. Po každém měření odlehčete vzorek. Naměřené hodnoty průhybů porovnejte s hodnotami získanými výpočtem a stanovte chyby.



Obr. 53. Nosník na dvou podpěrách (úkol č.3)



Obr. 54. Schéma zatěžujícího zařízení s úchylkoměrem (úkol č.3)

Postup:

Délkové rozměry průřezu b , h a aktivní délku nosníku l , a , c změříme obvyklým způsobem. Délky l_1 a l_2 vyjádříme vztahy $l_1 = At$ a $l_2 = Bt$, kde A, B je počet roztečí ($t=30\text{mm}$) mezi otvory vyvrtanými v páce. Z hodnot b a h vypočítáme I_z pro obdélníkový průřez podle vztahu:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

Z podmínky rovnováhy momentu na páce k bodu D

$$l_1 F = l_2 G_z$$

dostaneme vztah pro velikost síly:

$$F = \frac{m_z \cdot gB}{A}$$

$$F = F_1 = F_2$$

1) Vzorek upneme do zatěžovacího zařízení a úchylkoměr umístíme v místě 2, v místě 1 zatížíme vzorek silou F_1 . Před měřením vynulujeme úchylkoměr při neznámém zatížení jednotlivými prvky aparatury nebo odečteme základní hodnotu na stupnici. Změnou hmotnosti závaží zatěžíme postupně vzorek různými hodnotami síly F_1 a odečítáme průhyby y_{21} .

2) Nyní provedeme obrácené měření, úchylkoměr umístíme v místě 1 a nosník zatížíme v místě 2 silou F_2 . Vzhledem k tomu, že síla $F_2 = F_1 = F$ musíme přepočítat závaží, protože se změnila vzdálenost na páce $l_1 = At$ na $l'_1 = A't$.

$$l'_1 F_2 = l_2 G'_z \Rightarrow G'_z = \frac{l'_1 F_2}{l_2} \quad (58)$$

$$m'_z = \frac{l'_1 F_2}{l_2 g}$$

Před měřením vynulujeme úchylkoměr při neznámém zatížení jednotlivými prvky aparatury nebo odečteme základní hodnotu na stupnici. Potom zatěžíme vzorek přepočítanými hodnotami závaží m'_z a odečítáme přírůstky průhybu y_{12} .

Vypočítané a naměřené hodnoty zapíšeme do tabulek:

1)

Tabulka III. Naměřené a vyp. hodnoty 1 (úkol č.3)

i	m_z (kg)	F_1 (N)	y_{21} (mm)
1			
2			
3			

2)

Tabulka IV. Naměřené a vyp. hodnoty 2 (úkol č.3)

i	m'_z (kg)	F_2 (N)	y_{12} (mm)
1			
2			
3			

Nyní vypočítáme skutečné průhyby Mohrovou metodou.

$$y = y_{12} = y_{21} = \frac{M_f}{EI_z} \quad (59)$$

kde M_f je fiktivní moment působící v místě zjišťovaného průhybu a má velikost

$$M_f = \frac{F \cdot a^2}{6 \cdot l} [c(l+a) - a^2]$$

Po dosazení je průhyb:

$$y = \frac{F \cdot a^2}{6 \cdot EI_z l} [c(l + a) - a^2] \quad (60)$$

Naměřené hodnoty průhybů v místě 1 a 2 porovnáme a mělo by platit podle Maxwellovy věty:

$$y_{12} = y_{21}.$$

Hodnoty průhybů získané měřením porovnáme s hodnotami získanými výpočtem a stanovíme chyby měření.

Obsah protokolu:

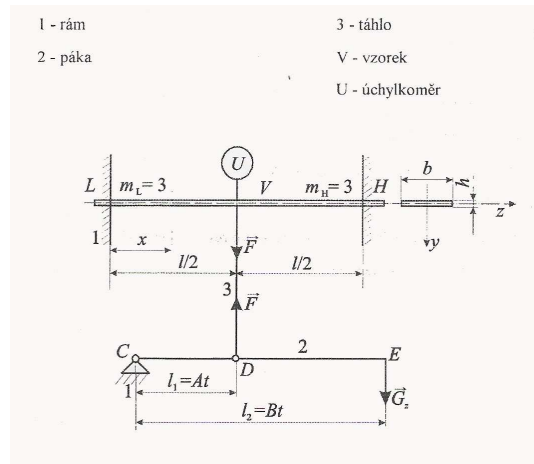
1. Záhloví.
2. Zadání úkolu.
3. Schéma zatěžovacího zařízení s nosníkem a úchylkoměrem.
4. Stručný postup.
5. Tabulky vypočítaných a naměřených hodnot.
6. Příklad výpočtu hodnot prvního řádku tabulky.
7. Výpočet průhybů
8. Výsledek měření, porovnání naměřených hodnot.
9. Výpočet chyb a závěr.

2.3.4 Úkol č.4

Zadání úkolu:

U nosníku oboustranně vetknutého, který je staticky neurčitý, určete průhyb. Při každém zatížení vypočítejte hodnoty napětí v ohybu v místech upevnění na rámu a v místě působící síly.

Nosník je oboustranně vetknutý se zatížením silou F v místě $x = \frac{l}{2}$. Vzorek má obdélníkový tvar průřezu. Měření proveďte třikrát pro 5 různých zatížení. Po každém měření odlehčete vzorek. Z naměřených hodnot průhybů stanovte aritmetický průměr $\bar{x}$ a jeho směrodatnou odchylku s . Naměřené hodnoty průhybů porovnejte s hodnotami získanými výpočtem.



Obr. 55. Schéma zatěžujícího zařízení (úkol č.4)

Postup:

Vzorek upneme do zatěžovacího zařízení a ustavíme úchylkoměr do místa, kde se přenáší uprostřed rozpětí táhlem síla F . Měřením se stanoví délka l , rozměry profilu b , h a výpočtem modul průřezu v ohybu

$$W_o = \frac{bh^2}{6} \quad (m^3) \quad (61)$$

Ke stanovení hmotnosti m_z na páce použijeme podmínky rovnováhy momentů a pevnostní podmínky v ohybu. Z podmínky rovnováhy momentů $FAt = G_z Bt$ vyjádříme

sílu $F = \frac{G_z B}{A}$ a dosadíme do pevnostní podmínky:

$$\frac{F.l}{\frac{8}{W_o}} \leq \sigma_{o,D} \quad (62)$$

Z toho plyne hmotnost:

$$m_z \leq \frac{8AW_o\sigma_{o,D}}{Blg} \quad (kg)$$

Skutečnou hmotnost m_z pro vlastní měření volíme s ohledem na znaménko nerovnosti a tak, aby pružný průhyb byl malý a byla také splněna deformační podmínka. Postupnou změnou závaží měníme sílu F a odečítáme příslušné deformace na úchylkoměru.

Největší napětí v ohybu je v místě vetknutí a uprostřed rozpětí nosníku a jeho absolutní hodnota v krajních vláknech je:

$$\sigma_{o,max} = \frac{F.l}{8W_o} \quad (Pa) \quad (63)$$

Vypočítané hodnoty síly, napětí a naměřené deformace zapíšeme do tabulky:

Tabulka V. Naměřené a vyp. hodnoty (úkol č.4)

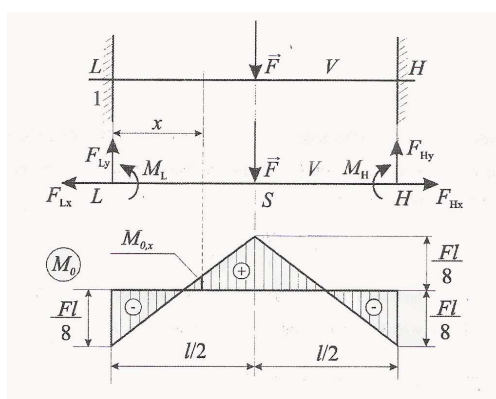
i	m_z (kg)	F (N)	y (mm)	$\sigma_{o,max}$ (Pa)
1				
2				
3				
4				
5				

Potřebné vzorce pro výpočet průhybů:

Řešením např. metodou fiktivního zatížení momentovou plochou lze odvodit velikost podporových momentů:

$$|M_L| = |M_H| = \frac{F.l}{8} \quad (64)$$

Průběh ohybových momentů $M_o(x)$ je v obr. 56



Obr. 56. Průběh ohyb. momentu (úkol č.4)

$$\text{Ohybový moment } M_o(x) = F \left(\frac{x}{2} - \frac{l}{8} \right)$$

$$\text{Pro } x = 0 \text{ je } M_{o,L} = -\frac{F.l}{8} \text{ a pro } x = \frac{l}{2} \text{ je } M_{o,S} = \frac{F.l}{8}$$

Absolutní hodnota maximálního ohybového momentu je:

$$|M_{o,max}| = \frac{F.l}{8}$$

Potom maximální průhyb je :

$$y_{max} = \frac{F.l^3}{192EI_z} \quad (65)$$

kde $I_z = \frac{bh^3}{12}$ je kvadratický moment plochy průřezu k neutrální ose z.

Na závěr určíme z naměřených hodnot aritmetický průměr $\bar{x}$ a jeho směrodatnou odchylku s .

Obsah protokolu:

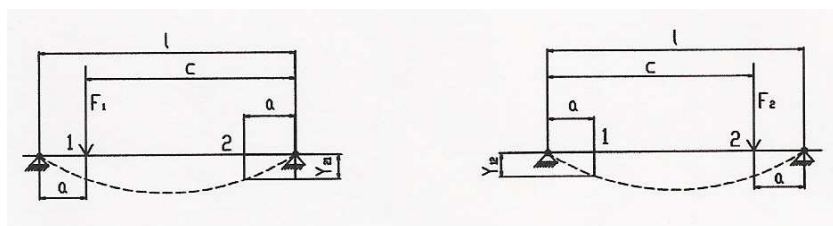
1. Záhloví.
2. Zadání úkolu.
3. Schéma zatěžovacího zařízení s nosníkem a úchylkoměrem.
4. Stručný teoretický základ, postup.
5. Výpočet velikosti hmotnosti závaží.
6. Průběh ohybových momentů
7. Tabulky vypočítaných a naměřených hodnot.
8. Příklad výpočtu hodnot prvního řádku tabulky.
9. Výsledek měření, porovnání naměřených hodnot s vypočítanými.
10. Výpočet chyb a závěr.

2.3.5 Naměřená úloha

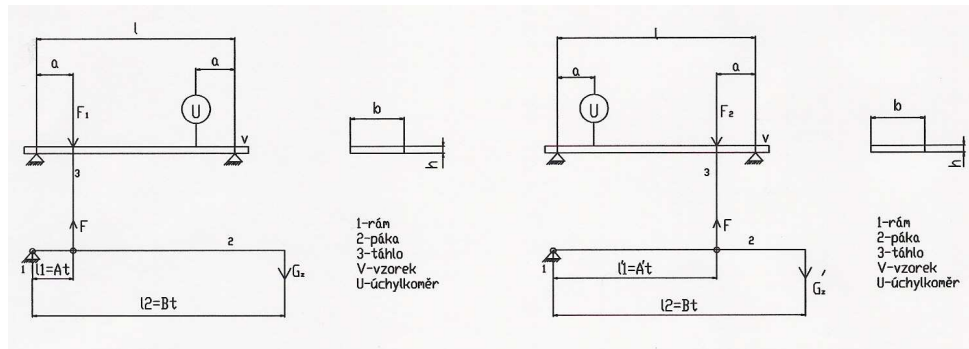
Název: Demonstrace Maxwellovy věty

Zadání: Demonstrujte Maxwellovu větu (věta o vzájemnosti posuvů) na nosníku o dvou podpěrách (obr. 57). Na nosník působí v místě 1 síla F_1 , takže se nosník prohne v místě 2 o y_{21} . Potom působí v místě 2 síla F_2 , takže se nosník prohne v místě 1 o y_{12} . Měřením ověřte, že platí $y_{12} = y_{21}$ - Maxwellova věta. Měření proveďte pro tři různé zatížení. Po každém měření odlehčete vzorek. Naměřené hodnoty průhybů porovnejte s hodnotami získanými výpočtem a stanovte chyby.

Dáno: délka nosníku $l = 330\text{mm}$, $a = 105\text{mm}$, $c = 225\text{mm}$, hmotnost závaží volte v rozmezí 1,5 kg až 4,5 kg, $E = 3500\text{MPa}$.



Obr. 57. Nosník na dvou podpěrách

Schéma uložení nosníku a zatěžovacího zařízení:

Obr. 58. Schéma zatěžujícího zařízení s úchylkoměrem

Postup:

Délkové rozměry průřezu b , h změříme obvyklým způsobem. Délky l_1 a l_2 vyjádříme vztahy $l_1 = At$ a $l_2 = Bt$, kde A, B je počet roztečí ($t=30\text{mm}$) mezi otvory vyvrtanými v páce. Z hodnot b a h vypočítáme I_z pro obdélníkový průřez podle vztahu:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

Z podmínky rovnováhy momentu na páce je

$$l_1 F = l_2 G_z$$

dostaneme vztah pro velikost závaží:

$$F = \frac{m_z \cdot g B}{A}$$

$$F = F_1 = F_2$$

1) Vzorek upneme do zatěžovacího zařízení a úchylkoměr umístíme v místě 2, v místě 1 zatížíme vzorek silou F_1 . Před měřením vynulujeme úchylkoměr při neznámém zatížení jednotlivými prvky aparatury nebo odečteme základní hodnotu na stupnici. Změnou hmotnosti závaží zatěžujeme postupně vzorek různými hodnotami síly F_1 a odečítáme průhyby y_{21} .

2) Potom provedeme obrácené měření, úchylkoměr umístíme v místě 1 a nosník zatížíme v místě 2 silou F_2 . Vzhledem k tomu, že síla $F_2 = F_1 = F$ musíme přepočítat závaží, protože se změnila vzdálenost na páce $l_1 = At$ na $l'_1 = A't$.

$$l'_1 F_2 = l_2 G'_z \Rightarrow G'_z = \frac{l'_1 F_2}{l_2}$$

$$m'_z = \frac{l'_1 F_2}{l_2 g}$$

Před měřením vynulujeme úchylkoměr při neznámém zatížení jednotlivými prvky aparatury nebo odečteme základní hodnotu na stupnici. Potom zatěžujeme vzorek přepočítanými hodnotami závaží m'_z a odečítáme průhyby y_{12} . Nyní vypočítáme skutečné průhyby Mohrovou metodou.

$$y = y_{12} = y_{21} = \frac{M_f}{EI_z}$$

kde M_f je fiktivní moment působící v místě zjišťovaného průhybu a má velikost

$$M_f = \frac{F \cdot a^2}{6 \cdot l} [c(l + a) - a^2]$$

Po dosazení je průhyb:

$$y = \frac{F \cdot a^2}{6 \cdot EI_z \cdot l} [c(l + a) - a^2]$$

Naměřené hodnoty průhybů v místě 1 a 2 porovnáme a mělo by platit podle Maxwellovy věty:

$$y_{12} = y_{21}.$$

Hodnoty průhybů získané měřením porovnáme s hodnotami získanými výpočtem a stanovíme chyby měření.

Měření:

Výpočet kvadratického momentu: $b = 50\text{mm}$, $h = 10\text{mm}$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \cdot 10^3}{12} = 4166,7\text{mm}^4$$

1) Naměřené a vypočítané hodnoty pro sílu F_1 :

$$l_1 = At = 5 \cdot 30 = 150\text{mm}$$

$$A = 5$$

$$l_2 = Bt = 20 \cdot 30 = 600\text{mm}$$

$$B = 20$$

Tabulka VI. Naměřené a vyp. hodnoty pro F_1

i	m_z (kg)	F_1 (N)	y_{21} (mm)
1	1750	70	2,32
2	2200	88	2,88
3	2430	97,2	3,27

Výpočet zatěžující síly F_1 :

$$F = \frac{m_z \cdot g B}{A}$$

$$\text{Pro } m_z = 1,750 \text{ kg} \Rightarrow F_1 = \frac{1,750 \cdot 9,82 \cdot 20}{5} = 70 \text{ N}$$

2) Naměřené a vypočítané hodnoty pro sílu F_2 :

$$l'_1 = A' t = 9 \cdot 30 = 270 \text{ mm}$$

$$A' = 9$$

$$l_2 = B t = 20 \cdot 30 = 600 \text{ mm}$$

$$B = 20$$

$$F_1 = F_2$$

Přepočet hmotnosti závaží m'_z pro sílu F_2 :

$$l'_1 F_2 = l_2 G'_z \Rightarrow G'_z = \frac{l'_1 F_2}{l_2}$$

$$m'_z = \frac{l'_1 F_2}{l_2 g} = \frac{A' \cdot F_2}{B \cdot g}$$

$$\text{Pro sílu } F_2 = 70 \text{ N} \Rightarrow m'_z = \frac{9 \cdot 70}{20 \cdot 9,82} = 3,15 \text{ kg}$$

Tabulka VII. Naměřené a vyp. hodnoty pro F_2

i	m'_z (kg)	F_2 (N)	y_{12} (mm)
1	3,15	70	2,33
2	3,96	88	2,93
3	4,37	97,2	3,25

Porovnání naměřených hodnot průhybů y_{12} , y_{21} :

$$1) \text{ Pro sílu } F_1 = F_2 = 70 \text{ N} \Rightarrow y_{12} = 2,33 \text{ mm}, y_{21} = 2,32 \text{ mm} \Rightarrow y_{12} = y_{21}$$

$$2) \text{ Pro sílu } F_1 = F_2 = 88 \text{ N} \Rightarrow y_{12} = 2,93 \text{ mm}, y_{21} = 2,88 \text{ mm} \Rightarrow y_{12} = y_{21}$$

$$3) \text{ Pro sílu } F_1 = F_2 = 97,2 \text{ N} \Rightarrow y_{12} = 3,25 \text{ mm}, y_{21} = 3,27 \text{ mm} \Rightarrow y_{12} = y_{21}$$

Průhyby se liší v setinách milimetru což je zanedbatelné, a proto můžeme potvrdit, že platí $y_{12} = y_{21}$.

Výpočet skutečného průhybu:

Výpočet průhybu pro sílu $F_1 = 70 \text{ N}$

$$y_{skut.} = y_{12} = y_{21} = \frac{M_f}{EI_z}$$

kde M_f je fiktivní moment působící v místě zjišťovaného průhybu a má velikost

$$M_f = \frac{F \cdot a^2}{6 \cdot l} [c(l + a) - a^2]$$

Po dosazení je průhyb:

$$y_{skut.} = \frac{F \cdot a^2}{6 \cdot EI_z \cdot l} [c(l + a) - a^2]$$

$$y_{skut.} = \frac{70 \cdot 105^2}{6 \cdot 3500 \cdot 4166 \cdot 7.330} [225(330 + 105) - 105^2]$$

$$y_{skut.} = 2,32 \text{ mm}$$

Porovnání naměřených hodnot průhybů se skutečnými hodnotami průhybů:

Tabulka VIII. Porovnání průhybů vypočítaných a naměřených

i	F (N)	$y_{skut.}$ (mm)	y_{12} (mm)	s_{12}	y_{21} (mm)	s_{21}
1	70	2,32	2,33	0,01	2,32	0
2	88	2,92	2,93	0,01	2,88	-0,01
3	97,2	3,22	3,25	0,03	3,27	0,05

Výpočet chyby vzniklé měřením:

$$s_{12} = \sqrt{\frac{\sum (y_{12} - y_{skut.})^2}{n}} \quad (66)$$

Závěr: Pomocí měření jsme ověřili Maxwellovu větu a tím jsme potvrdili, že platí $y_{12} = y_{21}$. Naměřené hodnoty průhybů jsme porovnali se skutečnou hodnotou a stanovili jsme chyby vzniklé měřením.

2.4 Diskuze výsledků

Přípravek je zkonstruován tak, aby se daly demonstrovat různé typy uložení a zatížení nosníků. Tento přípravek byl navržen pro použití v laboratorních cvičeních z Pružnosti pevnosti. Zařízení není určeno pro přesné měření podle příslušných norem, ale je určeno pro studenty jako školní pomůcka. Studenti se pomocí přípravku seznámí s problematikou ohybové napjatosti a deformace, a proto byly sestaveny metodiky vzorových úloh. Jsou zde úlohy, které demonstrují staticky určité i neurčité příklady uložení.

U normalizované zkoušky, která je dána normou ČSN EN ISO 178, jsou přesně definovány zkušební vzorky. Vzorky určené pro ohybové zkoušky musí být zhotoveny podle příslušných norem. Pokud žádné neexistují nebo pokud není stanoveno jinak, musí být vzorky přímo lisovány nebo vstřikovány v souladu s ISO 293, 294, 295, 2557-1 nebo ISO 2557-2. Dále je důležité v jakém prostředí se mají zkoušky provádět, to udává norma ISO 291:1977. Zařízení na kterém se ohybové zkoušky provádí musí vyhovovat normě ISO 5893. Ohybová zkouška se provádí v prostředí předepsaném předmětovou normou zkoušeného materiálu. Jestliže není k dispozici, vyberou se nejvhodnější podmínky z ISO 291 (pokud není dohodnuto jinak, například pro zkoušky při vysokých nebo nízkých teplotách). Zkoušky, které jsou demonstrovány na našem přípravku, jsou pouze ukázkové a hodnoty získané měřením jsou pouze obrazné a nesmí se zaměnit s normalizovanou ohybovou zkouškou.

Na tomto zařízení jsme odměřili vzorovou úlohu a hodnoty získané měřením jsme ověřili pomocí výpočtů. Hodnoty průhybů získané měřením a výpočtem se lišily v setinách milimetru. Z toho vyplývá, že se dá na tomto přípravku měřit průhyb s přesností na setiny milimetru.

ZÁVĚR

Úkolem bakalářské práce bylo navrhnout zařízení pro demonstraci ohybu, které mají v budoucnu používat studenti v laboratorním cvičení z Pružnosti pevnosti. Souvisejícím úkolem bylo sestavit metodiky vzorových úloh, které budou sloužit studentům v laboratorních cvičeních jako podklad při měření.

Studijní a teoretická část bakalářské práce byla věnována především problematice ohybu. V této části je obsažena technická teorie o ohybovém napětí a deformaci, které vznikají v ohýbaném tělese, v našem případě ve zkoušeném vzorku (nosníku).

Praktická a experimentální část bakalářské práce je zaměřena na konstrukci přípravku pro demonstraci ohybu. Tento přípravek byl navržen s ohledem na univerzálnost a jednoduchost. Tím vznikla univerzální stavebnice, na které se dají demonstrovat různé typy namáhání nosníků v ohybu. Tento přípravek umožňuje řešit nejen staticky určité úlohy, ale i staticky neurčité úlohy. Přípravek byl navržen s ohledem na jednoduchou vyrobitelnost a při konstruování byl brán ohled na další možné rozšíření v budoucnu. Toto zařízení nemusí sloužit jen pro demonstraci ohybu přímých nosníků, ale i zakřivených nosníků různého profilu. Profil zkoušeného nosníku nemusí být pouze obdélníkového průřezu, ale můžeme zkoušet nosníky s kruhovým, čtvercovým průřezem a nosníky dutého průřezu jako jsou například trubky.

V poslední části bakalářské práce byly sestaveny metodiky vzorových úloh z oblasti ohybové napjatosti a deformace. Úlohy byly sestaveny s ohledem na některé možnosti, které tento přípravek umožňuje řešit. Pomocí tohoto přípravku může student demonstrovat například třibodovou ohybovou zkoušku, čtyřbodovou ohybovou zkoušku (nosník na dvou podpěrách zatížený dvojicí sil), ale i případy, kdy je nosník vetknutý a zatížený silou nebo dvojicí sil.

Doporučuji v budoucnu tento přípravek rozšířit o zařízení, které umožní zkoušený nosník zatížit nejen jednou nebo dvojicí sil, ale i ohybovým momentem.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- (1) Valendin, M. Mechanické chování těles. FT, Zlín, 1999. ISBN 80-214-1479-0.
- (2) Valendin, M. Mechanika II, FT, Zlín, 2004. ISBN 80-7318-228-9.1
- (3) Oliva, J. Pružnost a pevnost. VUT, Brno, 1987.
- (4) Oliva, J. Technická mechanika II. VUT, Brno, 1977.
- (5) Zámorský, Z. Nauka o polymerech II. VUT, Brno, 1980.
- (6) Leinveber, J., Řasa, J., Vávra, P. Strojnické tabulky. Brno, 2000, ISBN 80-7183-164-6.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

$\vec{F}_v$	Silová výslednice.
$\vec{M}_v$	Momentová výslednice.
$\vec{N}$	Normálová síla.
$\vec{T}$	Příčná síla.
$\vec{M}_k$	Kroutící moment
$\vec{M}_o$	Ohybový moment.
$\vec{p}$	Napětí.
σ	Normálové napětí
τ	Tečné napětí
τ_{xy}	Složka smykového napětí
ε	Poměrná změna délky
E	Modul pružnosti.
I_y	Kvadratický moment.
$\rho(x)$	Poloměr křivosti.
φ	Úhel natočení.
y	Průhyb.
$T_{x,f}$	Posouvající síla v bodě X fiktivního nosníku.
$M_{x,f}$	Ohybový moment v bodě X fiktivního nosníku.
U	Potenciální energie deformační.
A	Vykonaná práce
η	Příčinkový součinitel.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Rovina κ	8
Obr. 2. Znázornění $\vec{F}_v$ a $\vec{M}_v$	8
Obr. 3. Rovnoběžníky příslušných vektorů.....	9
Obr. 4. Myšlený řez κ	9
Obr. 5. Rozklad síly $\Delta \vec{F}_v$	10
Obr. 6. Zobrazení napětí	11
Obr. 7. Napětí na elementárním hranolku.....	11
Obr. 8. Příklad rovinné napjatosti.....	12
Obr. 9. Příklad přímkové napjatosti.....	13
Obr. 10. Deformace tělesa.....	14
Obr. 11. Poměrné posunutí.....	14
Obr. 12. Rotační uložení.....	15
Obr. 13. Posuvné uložení.....	15
Obr. 14. Obecné uložení.....	15
Obr. 15. Uložení pomocí posuvného kloubu.....	15
Obr. 16. Pevné uložení.....	15
Obr. 17. Uvolněná část.....	17
Obr. 18. Znaménkové pravidlo.....	17
Obr. 19. Příklad průběhů $M(x)$, $T(x)$, $N(x)$	18
Obr. 20. Neutrální osa.....	19
Obr. 21. Prodloužení vlákna o $\Delta(ds)$	19
Obr. 22. Průběh napětí	20
Obr. 23. Uvolněná část prutu.....	20
Obr. 24. Průběh skutečného momentu.....	23
Obr. 25. Fiktivní nosník.....	24
Obr. 26. Průhyb.....	24
Obr. 27. Přímý prizmatický nosník.....	26
Obr. 28. Průhyb nosníku.....	27
Obr. 29. Vetknutý nosník 1.....	29
Obr. 30. Vetknutý nosník 2.....	29

Obr. 31. Schéma přípravku pro demonstraci ohybu.....	31
Obr. 32. Táhlo vyvozující 1 sílu.....	32
Obr. 33. Táhlo vyvozující 2 síly.....	33
Obr. 34. Podpěra.....	33
Obr. 35. Pevné uložení - vetknutí.....	33
Obr. 36. Nosník na dvou podpěrách zatížený silou F	34
Obr. 37. Nosník na dvou podpěrách zatížený dvojicí sil.....	34
Obr. 38. Nosník jednostranně vetknutý zatížený jednou silou.....	35
Obr. 39. Nosník jednostranně vetknutý zatížený dvojicí sil.....	35
Obr. 40. Nosník na dvou podporách s převislým koncem.....	36
Obr. 41. Nosník oboustranně vetknutý.....	36
Obr. 42. Nosník na jedné straně vetknutý a na druhé straně podpěra.....	37
Obr. 43. Nosník na jedné straně vetknutý a na druhé straně podpěra.....	37
Obr. 44. Číselníkový úchylkoměr.....	38
Obr. 45. Schéma měřícího zařízení.....	38
Obr. 46. Schéma měření.....	38
Obr. 47. Závaží.....	39
Obr. 48. Zatěžovací zařízení.....	39
Obr. 49. Jednostranně vetknutý nosník (úkol č.1).....	41
Obr. 50. Schéma zatěžujícího zařízení (úkol č.1).....	42
Obr. 51. Nosník na dvou podpěrách (úkol č.2).....	44
Obr. 52. Schéma zatěžujícího zařízení (úkol č.2).....	45
Obr. 53. Nosník na dvou podpěrách (úkol č.3).....	47
Obr. 54. Schéma zatěžujícího zařízení (úkol č.3).....	47
Obr. 55. Schéma zatěžujícího zařízení (úkol č.4).....	50
Obr. 56. Průběh ohyb. momentu (úkol č.4)	51
Obr. 57. Nosník na dvou podpěrách.....	52
Obr. 58. Schéma zatěžujícího zařízení s úchylkoměrem.....	53

SEZNAM TABULEK

Tabulka I. Naměřené a vyp. hodnoty (úkol č.1).....	43
Tabulka II. Naměřené a vyp. hodnoty (úkol č.2).....	46
Tabulka III. Naměřené a vyp. hodnoty 1 (úkol č.3).....	48
Tabulka IV. Naměřené a vyp. hodnoty 2 (úkol č.3).....	48
Tabulka V. Naměřené a vyp. hodnoty (úkol č.4).....	51
Tabulka VI. Naměřené a vyp. hodnoty pro F_1	54
Tabulka VII. Naměřené a vyp. hodnoty pro F_2	55
Tabulka VIII. Porovnání průhybů vypočítaných a naměřených.....	56

SEZNAM PŘÍLOH

- P 1 : Sestava přípravku pro ohyb
- P 2 : Sestava táhla pro jednu sílu
- P 3 : Sestava táhla pro dvojici sil
- P 4 : Táhlo 1
- P 5 : Táhlo 2
- P 6 : Brit
- P 7 : Čep
- P 8 : Spojovací část
- P 9 : Mezikus
- P 10 : Výztuha
- P 11 : Sestava vetknutí
- P 12 : Profil 1
- P 13 : Profil 2
- P 14 : Podpěra