

Návrh řízení spojitých lineárních systémů tradičními metodami

Aleš Habáň



Vložit oficiální zadání bakalářské práce

Děkuji vedoucímu diplomové práce prof. Ing. Petru Dostálovi, CSc. za odborné vedení, rady a připomínky, které mi poskytoval při řešení bakalářské práce.

Souhlasím s tím, že s výsledky mé práce může být naloženo podle uvážení vedoucího bakalářské práce, ředitele ústavu a institutu. V případě publikace budu uveden jako spoluautor.

Prohlašuji, že jsem na celé bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval.

Ve Zlíně, 01. 06. 2005

.....

podpis

RESUMÉ

Bakalářská práce se zabývá tradičními metodami návrhu spojitéch regulátorů pro řízení lineárních systémů 2. a 3. řádu. Z řady známých přístupů k návrhu jsou vybrány čtyři z nejpoužívanějších metod.

S pomocí simulací v prostředí MATLAB-Simulink je vyhodnocena nejvhodnější metoda pro konkrétní systém. Toto vyhodnocení je provedeno porovnáním kvality regulace, dosažené u jednotlivých metod.

Kritériem při posouzení kvality regulace byla zvolena hodnota maximálního přeregulování a doba regulace pro hodnotu ustálené regulační odchylky.

SUMMARY

This dissertation deals with the traditional methods of suggestion for the continuous action controllers served as 2 and 3 rank linear systems control. From the range of well known approaches to suggestion four of the most frequently used methods were chosen.

With the help of simulations in the environment of MATLAB-Simulink it is evaluated the best method for concrete system. This evaluation is done by comparison of quality of regulation, accomplished in each of method.

The criterion in the review of quality of the regulation was chosen the value of maximum overregulation and the time of regulation for the value of steady regulation offset.

OBSAH

RESUMÉ.....	4
ÚVOD	6
1 TEORETICKÁ ČÁST	7
1.1 Uzavřený regulační obvod (URO).....	7
1.2 Jednotlivé metody návrhu regulátoru	8
1.2.1 Naslinova metoda	9
1.2.2 Whiteleyovi standardní tvary	9
1.2.3 Metoda kritického zesílení regulátoru	12
1.2.4 Nastavení regulátoru podle koeficientu tlumení.....	13
2 VÝPOČTOVÁ ČÁST	17
2.1 Naslinova metoda.....	17
2.1.1 Výpočet soustavy 2. řádu	17
2.1.2 Výpočet soustavy 3. řádu	18
2.2 Whiteleyho standardní tvary	19
2.2.1 Výpočet soustavy 2. řádu	19
2.2.2 Výpočet soustavy 3. řádu	21
2.3 Ziegler-Nicholova metoda (metoda kritického zesílení regulátoru)	22
2.3.1 Analytické řešení	22
2.3.2 Experimentální řešení.....	23
2.4 Nastavení regulátoru podle koeficientu tlumení	24
2.4.1 Výpočet soustavy 2. řádu	24
2.4.2 Výpočet soustavy 3. řádu	25
3 SIMULAČNÍ ČÁST.....	28
3.1 Naslinova metoda.....	28
3.2 Whiteleyovi standardní tvary	30
3.3 Metoda kritického zesílení regulátoru	31
3.4 Nastavení regulátoru podle koeficientu tlumení	32
ZÁVĚR.....	35
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	36
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	37
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	39
SEZNAM TABULEK	39

ÚVOD

Při řízení technologických procesů je nutné navrhnout takový regulátor, který bude splňovat požadavky dané konkrétním technologickým procesem. Těmto požadavkům, např. rychlost nebo přesnost regulace, pak může vyhovovat více možností konstrukce nebo nastavení regulátoru. Cílem syntézy regulačního obvodu je navrhnout parametry regulátoru tak, aby regulační pochod vyhovoval předem stanoveným požadavkům. Pro většinu běžných regulací lze zajistit vhodný regulační pochod použitím spojitých regulátorů. K tomuto účelu byla vyvinuta řada teoretických i empirických metod návrhu parametrů regulátoru, o kterých se lze dočíst např. v [1], [2] a [3]. Obecně však nelze říci, která je nejvhodnější. Pro různé soustavy vyhovuje jiná metoda syntézy a proto je dobré vyzkoušet více metod a vybrat tu, která nejvíce vyhovuje daným požadavkům.

Následné posouzení kvality regulace je možné posoudit z mnoha hledisek. Mezi nejdůležitější patří doba regulace, maximální přeregulování a regulační odchylka. Regulační odchylku lze odstranit použitím integrační složky v zapojení regulátoru. Proto jsem se při návrhu regulátoru, pomocí jednotlivých metod, rozhodl použít regulátor proporcionálně-integrační PI a proporcionálně-integračně-derivační PID. Oba tyto regulátory jsou také všeobecně nejvíce rozšířené v praxi.

Jako regulovaný systém jsem zvolil proporcionální systém 2. a 3. řádu (s pouze konstantním členem v čitateli). Při vyšším stupni čitatele jsou u některých metod parametry regulátoru výsledkem řešení nelineárních rovnic, jež obecně nelze řešit analyticky, ale pouze numericky. Prioritním požadavkem na kvalitu regulace jsem zvolil minimální hodnotu maximálního přeregulování a také dobu regulace.

Závěrem této práce je porovnání těchto metod a zhodnocení výsledků jimi dosažených. Tyto metody jsou nejprve obecně rozebrány v první části, ve druhé části jsou pak aplikovány na konkrétní systémy 2. a 3. řádu a ve třetí jsou výsledky řízení porovnány simulacemi na PC v prostředí MATLAB-Simulink.

1 TEORETICKÁ ČÁST

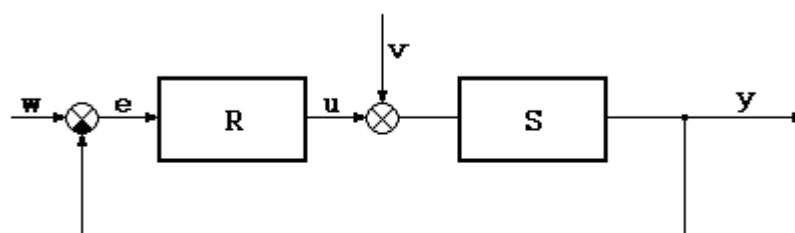
Teoretická část se zabývá popisem uzavřeného regulačního obvodu, jeho signálů a přenosů. Dále je zde uveden teoretický rozbor postupů jednotlivých metod návrhu parametrů regulátoru.

1.1 Uzavřený regulační obvod (URO)

Uzavřený regulační obvod vzniká připojením regulátoru R k regulované soustavě S a připojením výstupu pomocí zpětnovazební smyčky k součtovému členu na vstupu regulačního obvodu. Výstupem regulačního obvodu je regulovaná veličina $y(t)$, vstupními veličinami jsou poruchová veličina $v(t)$ a řídicí veličina $w(t)$. Rozdílem řídicí a regulované veličiny pak je regulační odchylka $e(t)$:

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (1)$$

Regulátor R pracuje tak, aby jeho výstup - akční veličina $u(t)$, způsobil snížení regulační odchylky na minimum, případně aby byla zcela odstraněna.



Obr. 1. Schéma uzavřeného regulačního obvodu

Pro jednoduchost předpokládáme, že na obvod působí pouze řídicí veličina $w(t)$, tedy poruchová veličina $v(t) = 0$.

Přenos soustavy se značí $G_s(s)$ a uvažujeme jej jako podíl polynomů $b(s)$ a $a(s)$

$$G_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (m \leq n) \quad (2)$$

Obecný přenos regulátoru $G_r(s)$ můžeme opět chápat jako podíl dvou polynomů $r(s)$ a $p(s)$ ve tvaru

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r(s)}{p(s)} \quad (3)$$

Jestliže budeme volit regulátor ze třídy PID regulátorů, pak tento přenos má konkrétní podobu buď ve tvaru s oddělenými složkami

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s \quad (4)$$

nebo ve tvaru

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_r \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (5)$$

kde k_r je zesílení, T_i integrační a T_d derivační časová konstanta regulátoru. Přenosy jednodušších typů regulátorů (P, PI, PD) pak získáme anulováním příslušných složek. Celkový přenos mezi řídicí a regulovanou veličinou, který se nazývá přenos řízení je pak dán vztahem:

$$G_{w/y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_r(s).G_s(s)}{1 + G_r(s).G_s(s)} = \frac{\frac{r(s)}{p(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}}{1 + \frac{r(s)}{p(s)} \cdot \frac{b(s)}{a(s)}} = \frac{r(s).b(s)}{p(s).a(s) + r(s).b(s)} \quad (6)$$

Jmenovatel tohoto přenosu se nazývá charakteristický polynom a označíme jej jako

$$A(s) = p(s).a(s) + r(s).b(s) \quad (7)$$

Pokud se tento polynom položí roven nule, nazývá se charakteristická rovnice:

$$A(s) = 0 \quad (8)$$

Dalším důležitým přenosem je přenos odchylky $G_e(s)$:

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G_r(s).G_s(s)} \quad (9)$$

1.2 Jednotlivé metody návrhu regulátoru

Tato kapitola obsahuje teoretický rozbor jednotlivých metod návrhu parametrů regulátoru použitých v této práci.

1.2.1 Naslinova metoda

Naslin dokázal, že když pro koeficienty charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu :

$$A(s) = A_n s^n + \dots + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 = 0 \quad (10)$$

platí nerovnost:

$$A_i^2 \geq \alpha \cdot A_{i-1} \cdot A_{i+1} \quad (11)$$

pro $i = 1, 2, \dots, (n-1)$, potom maximální přeregulování $\Delta y_{\max}$ (překmit) závisí na hodnotě α podle následující tabulky:

Tab. 1 Závislost $\Delta y_{\max}$ na α dle Naslina

α	1,75	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4
$\Delta y_{\max} (\%)$	16	12	8	5	3	1

1.2.2 Whiteleyho standardní tvary

Metoda vychází z určitých vzorových typů přenosových funkcí uzavřeného regulačního obvodu, o kterých víme, že dávají vyhovující regulační pochod, a podle nich upravuje seřízení parametrů regulátorů hodnoty koeficientů charakteristického polynomu v konkrétním případě tak, aby se koeficienty tohoto konkrétního polynomu a polynomu vzorového navzájem rovnaly. Standardní tvary zaručují, že při dodržení předepsaných koeficientů charakteristické rovnice pro daný typ přenosu regulačního obvodu se nepřekročí daná hodnota maximálního přeregulování $\Delta y_{\max}$ (překmitu), případně i doba ustálení t_r nebo jiné charakteristické veličiny regulačního pochodu. Postup při aplikaci této metody vychází z normovaného charakteristického polynomu přenosu uzavřeného regulačního obvodu

$$A(s) = A_n s^n + \dots + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 = 0 \quad (12)$$

Polynom normujeme vzhledem k prostému členu i členu s nejvyšší mocninou s (normovaný člen musí mít u příslušné mocniny s jednotkový koeficient) následovně:

$$\tilde{A}(s) = \frac{A_n}{A_0} s^n + \frac{A_{n-1}}{A_0} s^{n-1} + \dots + \frac{A_1}{A_0} s + 1 \quad (13)$$

Nyní zavedeme novou proměnnou σ tak, že použijeme substituci

$$\sigma = \left(\frac{A_n}{A_0} \right)^{\frac{1}{n}} s \quad (\text{a tedy } s = \left(\frac{A_0}{A_n} \right)^{\frac{1}{n}} \sigma) \quad (14)$$

a po dosazení do () získáme polynom v σ , kterého koeficient u nejvyšší mocniny i prostý člen jsou jednotkové, ve tvaru

$$A_\sigma(\sigma) = \sigma^n + \frac{A_{n-1}}{A_0} \left(\frac{A_0}{A_n} \right)^{\frac{n-1}{n}} \sigma^{n-1} + \dots + \frac{A_1}{A_0} \left(\frac{A_0}{A_n} \right)^{\frac{1}{n}} \sigma + 1 = \quad (15)$$

$$\bar{A}_n \sigma^n + \bar{A}_{n-1} \sigma^{n-1} + \dots + \bar{A}_1 \sigma + \bar{A}_0$$

(samozřejmě, $\bar{A}_n = \bar{A}_0 = 1$)

Těmito úpravami jsme získali přetransformovaný tvar (15) původního charakteristického polynomu (12).

Nyní koeficientům charakteristického polynomu (15) přiřadíme tabelované hodnoty $\bar{A}_i$ pro příslušný tvar přenosu řízeného systému z tabulky (2) pro daný stupeň charakteristického polynomu přenosu uzavřeného regulačního obvodu. Tím získáme vztahy ze kterých vypočítáme vyšetřované hodnoty stavitelných parametrů regulátoru, které jsou zahrnuty v koeficientech $\bar{A}_i$. Hodnota $\Delta y_{\max}$ je udána v % $y(\infty)$.

Tabelované časy τ^{tab} , t_r^{tab} se přepočítají na skutečné podle vztahu:

$$t_r = t_r^{tab} \sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0}} \quad (16)$$

$$\tau = \tau^{tab} \sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0}} \quad (17)$$

Tabulky koeficientů standardního tvaru charakteristického polynomu přenosu uzavřeného regulačního obvodu byly vypracovány pro přenosové funkce řízeného systému typu

$$G_s(s) = \frac{b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (18)$$

(uvedeny v tabulce (2))

$$G_s(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (19)$$

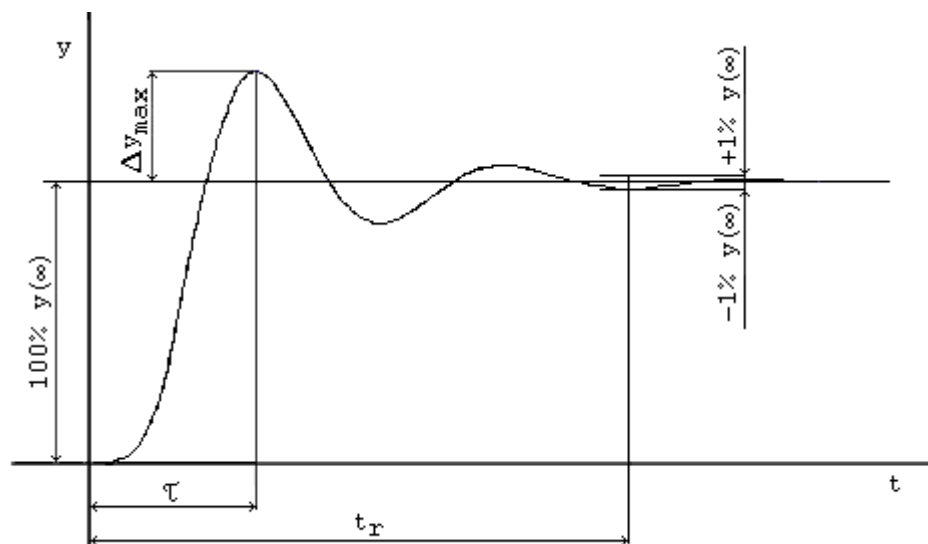
(uvedeny v tabulce (3))

a pro přenosové funkce typu

$$G_s(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (20)$$

(jsou uvedeny v tabulce (4))

Pozn.: stupeň n v levých sloupcích tabulek je stupeň charakteristického polynomu přenosu uzavřeného regulačního obvodu a liší se od stupně n v přenosech řízeného systému (18) – (20).



Obr. 2. Regulační pochod odpovídající standardnímu tvaru

Tab. 2 Standardní tvary přenosové funkce typu (18)

Stupeň n	Koeficienty							Charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\bar{A}_6$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	τ^{tab} [s]	t_r^{tab} [s]	Δy_{max} [%]
2	-	-	-	-	1	1.4	1	2.65	7.0	5.0
3	-	-	-	1	2.0	2.0	1	3.35	9.5	8.7
4	-	-	1	2.6	3.4	2.6	1	4.25	15.0	11.7
5	-	1	3.2	5.2	5.2	3.2	1	4.95	>18.0	13.0
6	1	3.7	7.5	9.1	7.5	3.7	1	5.55	-	13.3

Tab. 3 Standardní tvary přenosové funkce typu (19)

Stupeň n	Koeficienty							Charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\bar{A}_6$	$\bar{A}_5$	A_4	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	τ^{tab} [s]	t_r^{tab} [s]	Δy_{max} [%]
2	-	-	-	-	1	2.5	1	2.0	-	10.0
3	-	-	-	1	5.1	6.3	1	4.1	-	10.0
4	-	-	1	7.2	16.0	12.0	1	5.5	-	10.0
5	-	1	9.0	29.0	38.0	18.0	1	6.8	-	10.0
6	1	11.0	43.0	83.0	73.0	25.0	1	8.0	-	10.0

Tab. 4 Standardní tvary přenosové funkce typu (20)

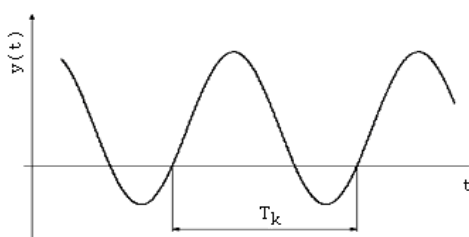
Stupeň n	Koeficienty							Charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\bar{A}_6$	$\bar{A}_5$	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	τ^{tab} [s]	t_r^{tab} [s]	Δy_{max} [%]
3	-	-	-	1	6.7	6.7	1	3.5	-	10.0
4	-	-	1	7.9	15.0	7.9	1	5.4	-	15.0
5	-	1	18.0	69.0	69.0	18.0	1	6.5	-	20.0
6	1	36.0	251.0	485.0	251.0	36.0	1	8.0	-	20.0

1.2.3 Metoda kritického zesílení regulátoru

Původně se jednalo o čistě empirickou metodu nastavení stavitelných parametrů regulátoru, který je připojen k vlastní skutečné regulované soustavě. Jde o metodu uzavřené smyčky na mezi stability. Základní myšlenkou metody je přivést regulační obvod do tzv. kritického stavu, tj. na hranici stability, přičemž regulátor pracuje pouze s proporcionální složkou a tedy integrační a derivační složka jsou vyřazeny nastavením: $T_I = \infty$ a $T_D = 0$, resp. $r_{-1} = 0$ a $r_1 = 0$.

Do kritického stavu obvod přivedeme postupným zvyšováním zesílení regulátoru k_R , resp. r_0 , až obvod začne kmitat s konstantní amplitudou. Zesílení regulátoru při kterém k tomu došlo, nazýváme kritickým zesílením $k_R = k_{Rk}$, resp. $r_0 = r_{0k}$ a periodou kmitů $T = T_k$. Tyto tzv. kritické hodnoty dosadíme do empirických vztahů pro použitý typ regulátoru a vypočítáme doporučené seřízení (viz tabulka). V případě čistě integračního regulátoru přivedeme regulační obvod do kritického stavu snižováním $T_I \rightarrow T_{Ik}$, resp. zvyšováním $r_{-1} \rightarrow r_{-1k}$.

Uvedené doporučené hodnoty pro seřízení stavitelných parametrů regulátorů byly odvozeny i výpočtem.

Obr. 3. Určení periody kmitů T_k

Tab. 5 Seřízení spojitého regulátoru z kritických hodnot regulátoru

Typ regulátoru	$G_R(s) = k_R(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$	$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$				
a) kmitavý přenos, tj. pro překmit $\kappa \approx (20 + 40) \%$						
	$k_R^* \equiv k_P^*$	T_I^*	T_D^*	r_0^*	r_{-1}^*	r_1^*
P	0,5 k_{Pk}	-	-	0,5 r_{0k}	-	-
PI	0,45 k_{Pk}	$T_k/1,2$	-	0,45 r_{0k}	0,54 r_{0k} / T_k	-
PD	0,5 k_{Pk}	-	0,05 T_k	0,5 r_{0k}	-	0,02 $r_{0k} \cdot T_k$
PID	0,6 r_{kPk}	0,5 T_k	0,12 T_k	0,5 r_{0k}	1,2 r_{0k} / T_k	0,075 $r_{0k} \cdot T_k$
I	-	2 T_{Ik}	-	-	0,5 r_{-1k}	-
b) nekmitavý přenos, tj. pro překmit $\kappa \approx 0 \%$						
P	0,25 k_{Pk}	-	-	0,25 r_{0k}	-	-
I	-	4 T_{Ik}	-	-	0,25 r_{-1k}	-

1.2.4 Nastavení regulátoru podle koeficientu tlumení

Metoda vychází z tvarování a charakteru módů výstupní veličiny v průběhu řízení. Je požadován kmitavý regulační pochod s předepsaným tlumením. Postup při návrhu regulátoru touto metodou popíšeme pro charakteristický polynom přenosu uzavřeného regulačního obvodu 3. stupně.

Polynom je ve tvaru:

$$A(s) = s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 \quad (21)$$

Tento polynom má tři kořeny. Jestliže regulační pochod má být kmitavý, musí být jeden kořen reálný, kterému odpovídá exponenciála s reálným exponentem a dále dvojice kořenů komplexně sdružených, kterým odpovídá tlumená kmitavá složka. Polynom (21) pak budeme hledat ve tvaru:

$$A(s) = (s + \alpha_0)(s^2 + \beta_1 s + \beta_0) \quad (22)$$

Jeho kořeny jsou:

$$s_1 = -\alpha_0, \quad s_{2,3} = \frac{-\beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0}}{2} \quad (23)$$

Aby kořeny $s_{2,3}$ byly komplexně sdružené, musí být výraz pod odmocninou záporný ($\beta_1^2 - \beta_0$) a tedy:

$$s_{2,3} = -\frac{\beta_1}{2} \pm j\sqrt{\beta_0 - \frac{\beta_1^2}{4}} = -\frac{\beta_1}{2} \pm j\omega \quad (24)$$

Odpovídající módy výstupní funkce jsou:

$$\overline{y_1}(t) = e^{-\alpha_0 t} \quad , \quad \overline{y_2}(t) = e^{-\frac{\beta_1}{2} t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (25)$$

V rovnici popisující řízený výstup jsou oba módy násobeny konstantami a platí:

$$y_1(t) = c_1 \overline{y_1}(t) \quad , \quad y_2(t) = c_2 \overline{y_2}(t) \quad (26)$$

Amplituda kmitů je časově závislá a je dána vztahem:

$$M = c_2 e^{-\frac{\beta_1}{2} t} \quad (27)$$

Přičemž perioda kmitů je $T = 2\pi/\omega$. Jestliže amplituda má v nějakém čase t_1 hodnotu:

$$M_1 = c_2 e^{-\frac{\beta_1}{2} t_1} \quad (28)$$

Pak v následující periodě, tedy v čase $t_2 = t_1 + 2\pi/\omega$, bude její hodnota:

$$M_2 = c_2 e^{-\frac{\beta_1}{2}(t_1 + \frac{2\pi}{\omega})} = c_2 e^{-\frac{\beta_1}{2} t_1} e^{-\frac{\beta_1 \pi}{\omega}} = M_1 e^{-\frac{\beta_1 \pi}{\omega}} \quad (29)$$

Zavedeme koeficient tlumení ξ jako:

$$\xi = \frac{M_1 - M_2}{M_1} = 1 - e^{-\frac{\beta_1 \pi}{\omega}} \quad , \quad 0 < \xi < 1 \quad (30)$$

(pro $\xi = 0$ by se jednalo o netlumené kmity, pro $\xi = 1$ o pochod na mezi aperiodicity) a po dosazení za ω z (24) a dalšími úpravami postupně dostaneme:

$$\frac{\beta_1}{\sqrt{\beta_0 - \beta}} = -\ln(1 - \xi) \quad , \quad \beta_1^2 \pi^2 = \left(\beta_0 - \frac{\beta_1^2}{4} \right) \ln^2(1 - \xi) \quad (31)$$

a nakonec:

$$\beta_0 = \frac{4\pi^2 + \ln^2(1 - \xi)}{4\ln(1 - \xi)} \beta_1^2 = k_1 \beta_1^2 \quad (32)$$

Parametr k_1 je tedy závislý na zvolené hodnotě koeficientu tlumení ξ . V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty k_1 pro některé hodnoty ξ .

Tab. 6 Hodnoty parametru k_1 v závislosti na koeficientu tlumení

ξ	0,5	0,8	0,9	0,95	0,98	$\rightarrow 1$
k_1	20,77	4,06	2,11	1,35	0,89	0,25

Požadavkem určitého tlumení regulačního pochodu získáme vzájemný vztah mezi koeficienty β_0 a β_1 . Další vztah mezi koeficienty v rovnici (22) dostaneme, jestliže budeme

požadovat určitý poměr mezi poklesem obou exponenciál ve funkcích (25). Tento poměr můžeme definovat pomocí parametru m jako:

$$\alpha_0 = m \frac{\beta_1}{2} \quad (33)$$

Je zřejmé, že pro $m = 1$ bude exponenciální pokles obou složek výstupu stejný.

Po roznásobení výrazu na pravé straně rovnice (22) dostaneme:

$$A(s) = s^3 + (\alpha_0 + \beta_1)s^2 + (\alpha_0\beta_1 + \beta_0)s + \alpha_0\beta_0 \quad (34)$$

A po dosazení za β_0 a α_0 z (32) resp. (33):

$$A(s) = s^3 + \left(\frac{m}{2} + 1\right)\beta_1 s^2 + \left(\frac{m}{2} + k_1\right)\beta_1^2 s + \frac{mk_1}{2}\beta_1^3 \quad (35)$$

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu parametrů regulátoru. Nejprve si musíme uvědomit, že charakteristický polynom přenosu uzavřeného regulačního obvodu je třetího stupně buď v případě, že pro řízení systému 2. řádu použijeme regulátor s integrační složkou (PI, PID), nebo pro systém 3. řádu použijeme regulátor bez integrační složky (P, PD). Protože regulátor bez integrační složky ponechává trvalou regulační odchylku, budeme uvažovat pouze první případ.

Charakteristický polynom přenosu uzavřeného regulačního obvodu tvořeného systémem 2. řádu (relativního řádu 2) a ideálním PID regulátorem s přenosy:

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad R(s) = \frac{r(s)}{p(s)} = \frac{r_1 s^2 + r_0 s + r_{-1}}{s} \quad (36)$$

Je ve tvaru:

$$A(s) = a(s)p(s) + b(s)r(s) = s^3 + (a_1 + b_0 r_1)s^2 + (a_0 + b_0 r_0)s + b_0 r_{-1} \quad (37)$$

Porovnáním koeficientů v rovnicích (35) a (37) získáme pro výpočet parametrů regulátoru tři rovnice:

$$a_1 + b_0 r_1 = \left(\frac{m}{2} + 1\right)\beta_1 \quad (38)$$

$$a_0 + b_0 r_0 = \left(\frac{m}{2} + k_1\right)\beta_1^2 \quad (39)$$

$$b_0 r_{-1} = \frac{mk_1}{2}\beta_1^3 \quad (40)$$

Které ovšem mají čtyři neznámé – parametry regulátoru a parametr β_1 , jeden z parametrů tedy musíme zvolit. Pokud zvolíme jeden z parametrů regulátoru, parametr β_1 vypočítáme

z té rovnice v soustavě (38,39,40), ve které byl zvolen parametr regulátoru a zbývající parametry regulátoru počítáme ze zbývajících rovnic. Pokud zvolíme parametr β_1 , parametry regulátoru postupně vypočítáme z rovnic (38,39,40). Parametr β_1 přitom zvolíme tak, aby r_1 a r_0 byly kladné. Pokud použijeme pouze PI regulátor, položíme v první rovnici soustavy (38) $r_1 = 0$. Pak je β_1 určen z této rovnice a zbývající parametry regulátoru dopočítáme z dalších dvou rovnic.

Uvedený postup můžeme použít i pro charakteristický polynom 4. stupně. V tomto případě ovšem musíme rozlišovat dva případy. V prvním případě bude polynom mít dvě dvojice komplexně sdružených kořenů, odpovídající dvěma tlumeně kmitajícím složkám. V tomto případě můžeme volit dva koeficienty tlumení. Ve druhém případě budou existovat dva reálné (záporné) kořeny a dvojice kořenů komplexně sdružených. Analýzou polynomu čtvrtého stupně se nebudeme podrobněji zabývat.

2 VÝPOČTOVÁ ČÁST

Při výpočtech budeme vycházet ze dvou zadaných přenosů, a to přenosu soustavy $G_s(s)$ a přenosu regulátoru $G_r(s)$. Jako přenos soustavy jsme zvolily soustavu 2. a 3. řádu dle zadání.

Přenos soustavy 2. řádu:

$$G_s(s) = \frac{k}{(T_1s+1) \cdot (T_2+1)} = \frac{2}{(2s+1) \cdot (4s+1)} = \frac{0,25}{s^2 + 0,75s + 0,125} \quad (41)$$

Přenos soustavy 3. řádu:

$$G_s(s) = \frac{k}{(T_1s+1) \cdot (T_2+1) \cdot (T_3s+1)} = \frac{2}{(2s+1) \cdot (4s+1) \cdot (8s+1)} = \frac{0,03125}{s^3 + 0,875s^2 + 0,21875s + 0,015625} \quad (42)$$

Jako přenos regulátoru použijeme přenos pro PI a PID regulátor.

Přenos PI regulátoru:

$$G_r(s) = \left(r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \right) \quad (43)$$

Přenos PID regulátoru:

$$G_r(s) = \left(r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1s \right) \quad (44)$$

Úkolem je vypočítat pomocí jednotlivých metod parametry regulátoru r_0 , r_{-1} a r_1 .

2.1 Naslinova metoda

2.1.1 Výpočet soustavy 2. řádu

PI regulátor

Charakteristickou rovnici určíme ze jmenovatele přenosu řízení

$$G_{w/y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_r(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_r(s) \cdot G_s(s)} = \frac{0,25 \cdot r_0s + 0,25 \cdot r_{-1}}{s^3 + 0,75s^2 + (0,125 + 0,25 \cdot r_0)s + 0,25r_{-1}} \quad (45)$$

tedy:

$$s^3 + 0,75s^2 + (0,125 + 0,25 \cdot r_0)s + 0,25r_{-1} = 0 \quad (46)$$

Dále se určí požadavek pro maximální přeregulování $\Delta y_{\max} \leq 5\%$ a tím se určí hodnota konstanty $\alpha = 2$.

Z nerovnice (7) se určí podmínky pro výpočet parametrů r_0 a r_{-1} :

$$i = 1: \quad (0,125 + 0,25r_0)^2 \geq 2,0,75 \cdot 0,25r_{-1} \quad (47)$$

$$i = 2: \quad 0,75^2 \geq 2,1 \cdot (0,125 + 0,25r_0) \quad (48)$$

Pro výpočet parametrů použijeme rovnost.

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{\underline{r_0 = 0,625}}$$

$$\underline{\underline{r_{-1} = 0,211}}$$

PID regulátor

Přenos řízení:

$$G_{w/y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_r(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_r(s) \cdot G_s(s)} = \frac{0,25r_1s^2 + 0,25r_0s + 0,25r_{-1}}{s^3 + (0,75 + 0,25r_1)s^2 + (0,125 + 0,25r_0)s + 0,25r_{-1}} \quad (49)$$

Charakteristická rovnice:

$$s^3 + (0,75 + 0,25r_1)s^2 + (0,125 + 0,25r_0)s + 0,25r_{-1} = 0 \quad (50)$$

Požadavek pro maximální přeregulování $\Delta y_{\max} \leq 5\%$, hodnota konstanty $\alpha = 2$.

Podmínky pro výpočet parametrů r_0 , r_{-1} a r_1 :

$$i = 1: \quad (0,125 + 0,25r_0)^2 \geq 2 \cdot (0,75 + 0,25r_1) \cdot 0,25r_{-1} \quad (51)$$

$$i = 2: \quad (0,75 + 0,25r_1)^2 \geq 2,1 \cdot (0,125 + 0,25r_0) \quad (52)$$

Při algebraickém řešení podmínek pak dostáváme dvě rovnice o třech neznámých parametrech. Pro jejich vyřešení tak musíme jeden parametr zadat.

Zvolený parametr:

$$\underline{\underline{r_0 = 30}}$$

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{\underline{r_{-1} = 29,777}}$$

$$\underline{\underline{r_1 = 12,62}}$$

2.1.2 Výpočet soustavy 3. řádu

PID regulátor

Přenos řízení:

$$G_{w/y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_r(s).G_s(s)}{1 + G_r(s).G_s(s)} = \frac{0,03125r_1s^2 + 0,03125r_0s + 0,03125r_{-1}}{s^4 + 0,875s^3 + (0,21875 + 0,03125r_1)s^2 + (0,015625 + 0,03125r_0)s + 0,03125r_{-1}} \quad (53)$$

Charakteristická rovnice:

$$s^4 + 0,875s^3 + (0,21875 + 0,03125r_1)s^2 + (0,015625 + 0,03125r_0)s + 0,03125r_{-1} = 0 \quad (54)$$

Požadavek pro maximální přeregulování $\Delta y_{\max} \leq 5\%$, hodnota konstanty $\alpha = 2$.

Podmínky pro výpočet parametrů r_0 , r_{-1} a r_1 :

$$i = 1: \quad (0,015625 + 0,03125r_0)^2 \geq 2,2 \cdot (0,21875 + 0,03125r_1) \cdot 0,03125r_{-1} \quad (55)$$

$$i = 2: \quad (0,21875 + 0,03125r_1)^2 \geq 2,2 \cdot 0,875 \cdot (0,015625 + 0,03125r_0) \quad (56)$$

$$i = 3: \quad 0,875^2 \geq 2,2 \cdot 1 \cdot (0,21875 + 0,03125r_1) \quad (57)$$

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{\underline{r_0 = 1,5133}}$$

$$\underline{\underline{r_{-1} = 0,1727}}$$

$$\underline{\underline{r_1 = 4,1364}}$$

2.2 Whiteleyho standardní tvary

2.2.1 Výpočet soustavy 2. řádu

PI regulátor

Standardní tvar určíme z přenosu řízení

$$G_{w/y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_r(s).G_s(s)}{1 + G_r(s).G_s(s)} = \frac{0,25.r_0s + 0,25.r_{-1}}{s^3 + 0,75s^2 + (0,125 + 0,25.r_0)s + 0,25r_{-1}} \quad (58)$$

dělením všech koeficientů přenosu hodnotou a_0 , tedy hodnotou $0,25.r_{-1}$ a zavedením substituce

$$s = \left(\frac{A_0}{A_n} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \sigma = \left(\frac{0,25.r_{-1}}{1} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sigma \quad (59)$$

dostaneme přenos řízení ve tvaru:

$$G_{w/y}(\sigma) = \frac{\frac{r_0}{r_{-1}} \cdot (0,25.r_{-1})^{\frac{1}{3}} \sigma + 1}{\frac{1}{0,25.r_{-1}} \cdot (0,25.r_{-1})^{\frac{3}{3}} \cdot \sigma^3 + \frac{0,75}{0,25.r_{-1}} \cdot (0,25.r_{-1})^{\frac{2}{3}} \cdot \sigma^2 + \frac{0,125 + 0,25.r_0}{0,125.r_{-1}} \cdot (0,125.r_{-1})^{\frac{1}{3}} \cdot \sigma + 1} \quad (60)$$

Koeficienty polynomu jmenovatele porovnáme s koeficienty standardního tvaru podle tabulky 3, pro třetí stupeň charakteristického polynomu:

$$\overline{A_2} = \alpha_2 \Rightarrow 2 = 0,75(0,25.r_{-1})^{\frac{1}{3}} \quad (61)$$

$$\overline{A_1} = \alpha_1 \Rightarrow 2 = (0,125 + 0,25.r_0) \cdot (0,125.r_{-1})^{-\frac{2}{3}} \quad (62)$$

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{r_0 = 0,2087}$$

$$\underline{r_{-1} = 0,2109}$$

PID regulátor

Přenos řízení:

$$G_{w/y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_r(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_r(s) \cdot G_s(s)} = \frac{0,25.r_1 s^2 + 0,25.r_0 s + 0,25.r_{-1}}{s^3 + (0,75 + 0,25.r_1)s^2 + (0,125 + 0,25.r_0)s + 0,25.r_{-1}} \quad (63)$$

Dělení koeficientem a_0 a zavedením substituce (59) dostaneme standardní tvar:

$$G_{w/y}(\sigma) = \frac{\frac{r_1}{r_{-1}} \cdot (0,25.r_{-1})^{\frac{2}{3}} \sigma^2 + \frac{r_0}{r_{-1}} \cdot (0,25.r_{-1})^{\frac{1}{3}} \sigma + 1}{\frac{1}{0,25.r_{-1}} \cdot (0,25.r_{-1})^{\frac{3}{3}} \cdot \sigma^3 + \frac{0,75 + 0,25.r_1}{0,25.r_{-1}} \cdot (0,25.r_{-1})^{\frac{2}{3}} \cdot \sigma^2 + \frac{0,125 + 0,25.r_0}{0,25.r_{-1}} \cdot (0,25.r_{-1})^{\frac{1}{3}} \cdot \sigma + 1} \quad (64)$$

Koeficienty polynomu jmenovatele porovnáme s koeficienty standardního tvaru podle tabulky 4, pro třetí stupeň charakteristického polynomu:

$$\overline{A_2} = \alpha_2 \Rightarrow 2 = (0,75 + 0,25.r_1)(0,25.r_{-1})^{\frac{1}{3}} \quad (65)$$

$$\overline{A_1} = \alpha_1 \Rightarrow 2 = (0,125 + 0,25.r_0)(0,25.r_{-1})^{\frac{2}{3}} \quad (66)$$

Získáme tak dvě rovnice o třech neznámých parametrech. Při řešení tak musíme jeden parametr zvolit.

Zvolený parametr:

$$\underline{r_0 = 5}$$

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{\underline{r_{-1} = 2,2802}}$$

$$\underline{\underline{r_1 = 3,6332}}$$

2.2.2 Výpočet soustavy 3. řádu

PID regulátor

Přenos řízení:

$$G_{w/y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_r(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_r(s) \cdot G_s(s)} = \frac{0,03125 \cdot r_1 s^2 + 0,03125 \cdot r_0 s + 0,03125 \cdot r_{-1}}{s^4 + 0,875 s^3 + (0,21875 + 0,03125 \cdot r_1) s^2 + (0,015625 + 0,03125 \cdot r_0) s + 0,03125 r_{-1}} \quad (67)$$

Dělením koeficientem a_0 a zavedením substituce (68) dostaneme standardní tvar:

$$G_{w/y}(\sigma) = \frac{\frac{r_1}{r_{-1}} \cdot (0,03125 \cdot r_{-1})^{\frac{2}{4}} \sigma^2 + \frac{r_0}{r_{-1}} \cdot (0,03125 \cdot r_{-1})^{\frac{1}{4}} \sigma + 1}{\frac{1}{0,03125 \cdot r_{-1}} (0,03125 \cdot r_{-1})^{\frac{4}{4}} \cdot \sigma^4 + \frac{0,875}{0,03125 \cdot r_{-1}} (0,03125 \cdot r_{-1})^{\frac{3}{4}} \cdot \sigma^3 + \frac{0,21875 + 0,03125 \cdot r_1}{0,03125 \cdot r_{-1}} (0,03125 \cdot r_{-1})^{\frac{2}{4}} \cdot \sigma^2 + \frac{0,015625 + 0,03125 \cdot r_0}{0,03125 \cdot r_{-1}} (0,03125 \cdot r_{-1})^{\frac{1}{4}} \cdot \sigma + 1} \dots \quad (68)$$

Koeficienty polynomu jmenovatele porovnáme s koeficienty standardního tvaru podle tabulky 4, pro čtvrtý stupeň charakteristického polynomu:

$$\overline{A_3} = \alpha_3 \Rightarrow 2,6 = 0,875 \cdot (0,03125 \cdot r_{-1})^{-\frac{1}{4}} \quad (69)$$

$$\overline{A_2} = \alpha_2 \Rightarrow 3,4 = (0,21875 + 0,03125 \cdot r_1) \cdot (0,03125 \cdot r_{-1})^{-\frac{2}{4}} \quad (70)$$

$$\overline{A_1} = \alpha_1 \Rightarrow 2,6 = (0,015625 + 0,03125 \cdot r_0) \cdot (0,03125 \cdot r_{-1})^{-\frac{3}{4}} \quad (71)$$

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{\underline{r_0 = 2,6714}}$$

$$\underline{\underline{r_{-1} = 0,4105}}$$

$$\underline{\underline{r_1 = 17,645}}$$

2.3 Ziegler-Nicholsova metoda (metoda kritického zesílení regulátoru)

Tuto metodu nelze aplikovat na soustavu 2. řádu, protože tato soustava je při kladných koeficientech polynomu $a(s)$ vždy stabilní a nelze ji rozkmitat.

Pro soustavu 3. řádu budeme tuto metodu řešit nejdříve analyticky a následně ověříme správnost výsledku experimentálně pomocí programu MATLAB - simulink.

2.3.1 Analytické řešení

V regulátoru ponecháme zapojenou pouze proporcionální složku a zbylé složky vyřadíme složky r_1 a r_{-1} , ($r_{-1} = 0$ a $r_1 = 0$). Tedy použijeme přenos:

$$G_r(s) = r_0 \quad (72)$$

Charakteristickou rovnici získáme ze jmenovatele přenosu řízení:

$$G_{w/y}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_r(s) \cdot G_s(s)}{1 + G_r(s) \cdot G_s(s)} = \frac{0,03125 \cdot r_0}{s^3 + 0,875s^2 + 0,21875s + (0,015625 + 0,03125 \cdot r_0)} \quad (73)$$

tedy:

$$s^3 + 0,875s^2 + 0,21875s + (0,015625 + 0,03125 \cdot r_0) = 0 \quad (74)$$

Pro určení kritického zesílení r_0 využijeme Hurwitzova kritéria

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0,875 & 0,015625 + 0,03125r_0 & 0 \\ 1 & 0,21875 & 0 \\ 0 & 0,875 & 0,015625 + 0,03125r_0 \end{vmatrix} \quad (75)$$

kde pro hranici stability platí podmínka $H_{n-1} = 0$, tj.:

$$H_2 = 0 \Rightarrow 0,875 \cdot 0,21875 - 1 \cdot (0,015625 + 0,03125 \cdot r_0) = 0 \quad (76)$$

řešením dostaneme hodnotu $r_0 = r_{0k} = 5,625$.

Pro kritické zesílení r_{0k} obvod kmitá s periodou

$$T_k = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_k} \quad (77)$$

Pro výpočet T_k potřebujeme určit úhlovou rychlost ω_k . Kritickou úhlovou rychlost ω_k určíme dosazením $r_0 = r_{0k}$ a $s = j\omega_k$ do charakteristické rovnice

$$s^3 + 0,875s^2 + 0,21875s + 0,015625 + 0,03125r_0 = \begin{vmatrix} r_0 = r_{0k} \\ s = j\omega_k \end{vmatrix} \quad (78)$$

$$= (j\omega_k)^3 + 0,875(j\omega_k)^2 + 0,21875(j\omega_k) + (0,015625 + 0,03125r_{0k}) = 0$$

a dále z podmínky, že reálná část je rovna nule $\text{Re} = 0$, určíme ω_k

$$-0,875\omega_k^2 + 0,015625 + 0,03125r_{0k} = 0 \quad (79)$$

$$0,875\omega_k^2 = 0,1914 \Rightarrow \omega_{k1,2} = \pm\sqrt{0,21875} \quad (80)$$

Fyzikální význam má pouze řešení $\omega_{k1,2} = \sqrt{0,21875} = 0,4677$.

tedy :

$$T_k = \frac{2\pi}{0,4677} = 13,4342 \quad (81)$$

Stavitelné parametry dle empirických vztahů (viz tabulka 5) :

PID regulátor

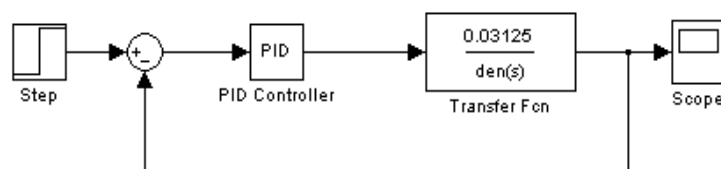
$$r_0 = 0,6 \cdot r_{0k} = \underline{\underline{3,375}}$$

$$r_{-1} = \frac{1,2 \cdot r_{0k}}{T_k} = \underline{\underline{0,5024}}$$

$$r_1 = 0,075 \cdot r_{0k} \cdot T_k = \underline{\underline{5,6676}}$$

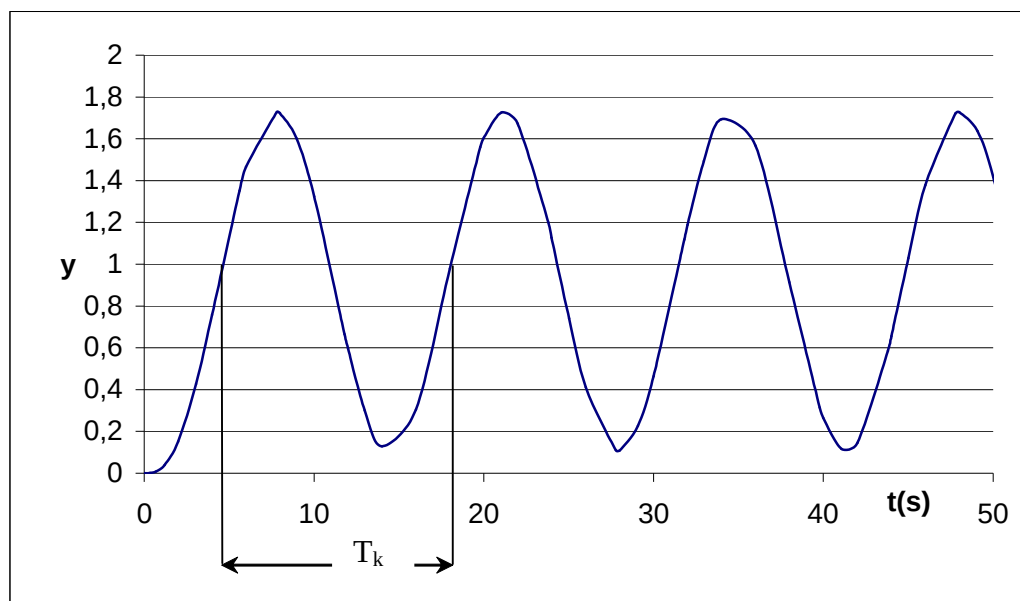
2.3.2 Experimentální řešení

V prostředí MATLAB-Simulink jsme vytvořily schéma jednoduchého uzavřeného regulačního obvodu.



Obr. 4. Regulační schéma uzavřeného regulačního obvodu

Tento obvod byl postupným zvyšováním kritického zesílení r_0 přiveden na mez stability, tzn. obvod začal kmitat s konstantní amplitudou. Hodnota kritického zesílení zjištěného experimentálně je $r_0 = 5,625$.

Obr. 5. Soustava 3. řádu při kritickém zesílení r_0

Z naměřeného grafu se rovněž odečte perioda kritických kmitů. $T_k = 13,45$. Jak je vidět z naměřených a vypočtených hodnot jsou parametry r_0 a T_k v podstatě stejné, z toho usuzujeme možnost použití obou způsobů při návrhu regulátorů.

2.4 Nastavení regulátoru podle koeficientu tlumení

2.4.1 Výpočet soustavy 2. řádu

Při návrhu pomocí této metody vycházíme z odvozených rovnic (34,35,36) a přenosu soustavy $G_s(s)$.

Přenos soustavy:

$$G_s(s) = \frac{2}{(2s+1)(4s+1)} = \frac{0,25}{s^2 + 0,75s + 0,125} \quad (82)$$

PI regulátor

V rovnici (34) položíme $r_1 = 0$ a vypočteme β_1 :

$$\beta_1 = \frac{2 \cdot a_1}{m+2} = \frac{2 \cdot 0,75}{1+2} = 0,5 \quad (83)$$

Z rovnic (35,36) vyjádříme parametry r_0 a r_{-1}

$$r_0 = \frac{1}{b_0} \left[\left(\frac{m}{2} + k_1 \right) \cdot \beta_1^2 - a_0 \right] = \frac{1}{0,25} \left[\left(\frac{1}{2} + 4,06 \right) \cdot 0,5^2 - 0,125 \right] = 4,06 \quad (84)$$

$$r_{-1} = \frac{1}{b_0} \left(\frac{m}{2} \cdot k_1 \right) \cdot \beta_1^3 = \frac{1}{0,25} \left(\frac{1}{2} \cdot 4,06 \right) \cdot 0,5^3 = 1,01 \quad (85)$$

Výpočet parametru jsme prováděli pro koeficient tlumení $\xi=0,8$ a pomocí tabulky Tab. 6 jsme určili konstantu k_1 , $k_1 = 4,06$.

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{\underline{r_0 = 4,06}}$$

$$\underline{\underline{r_{-1} = 1,01}}$$

PID regulátor

Určíme hodnotu parametru β_1 , tak aby hodnoty r_1 , r_0 a r_{-1} byly kladné. Tedy $\beta_1 = 1$.

Z rovnic (34,35,36) vyjádříme parametry r_0 , r_1 a r_{-1}

$$r_1 = \frac{1}{b_0} \left[\left(\frac{m}{2} + 1 \right) \cdot \beta_1 - a_1 \right] = \frac{1}{0,25} \left[\left(\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot 1 - 0,75 \right] = 3 \quad (86)$$

$$r_0 = \frac{1}{b_0} \left[\left(\frac{m}{2} + k_1 \right) \cdot \beta_1^2 - a_0 \right] = \frac{1}{0,25} \left[\left(\frac{1}{2} + 4,06 \right) \cdot 1 - 0,125 \right] = 17,74 \quad (87)$$

$$r_{-1} = \frac{1}{b_0} \left(\frac{m}{2} \cdot k_1 \right) \cdot \beta_1^3 = \frac{1}{0,25} \left(\frac{1}{2} \cdot 4,06 \right) \cdot 1 = 8,12 \quad (88)$$

konstanta pro požadovaný koeficient tlumení, $k_1 = 4,06$.

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{\underline{r_0 = 17,74}}$$

$$\underline{\underline{r_1 = 3}}$$

$$\underline{\underline{r_{-1} = 8,12}}$$

2.4.2 Výpočet soustavy 3. řádu

Přenos soustavy:

$$G_s(s) = \frac{2}{(2s+1) \cdot (4s+1) \cdot (8s+1)} = \frac{0,03125}{s^3 + 0,875s^2 + 0,21875s + 0,015625} \quad (89)$$

Při návrhu parametrů regulátoru pro soustavu 3. řádu je nutné, pro platnost rovnic (34,35,36) i při použití PI a PID regulátoru, snížit řád soustavy o jeden stupeň. K tomu můžeme použít Routhovo – Schurovo kritérium stability. Vlastnosti soustavy zůstanou zachovány i po snížení řádu.

Opíšeme koeficienty charakteristického polynomu a dále postupujeme podle následujícího algoritmu:

1	$\xleftarrow{0,875}$	0,21875	$\xleftarrow{0,015625}$	$\alpha = \frac{1}{0,875}$
$1-(0,875 \cdot \alpha)$		$0,21875-(0,015625 \cdot \alpha)$		
0	0,875	0,2009	0,015625	

Snížený přenos je tedy ve tvaru:

$$G_s(s) = \frac{0,03125}{0,875s^2 + 0,2009s + 0,015625} \quad (90)$$

Dále postupujeme jako v předchozím případě.

PI regulátor

V rovnici (34) položíme $r_1 = 0$ a vypočteme β_1 :

$$\beta_1 = \frac{2 \cdot a_1}{m+2} = \frac{2 \cdot 0,2009}{1+2} = 0,1339 \quad (91)$$

Z rovnic (35,36) vyjádříme parametry r_0 a r_{-1} :

$$r_0 = \frac{1}{b_0} \left[\left(\frac{m}{2} + k_1 \right) \cdot \beta_1^2 - a_0 \right] = \frac{1}{0,03125} \left[\left(\frac{1}{2} + 4,06 \right) \cdot 0,1339^2 - 0,015625 \right] = 2,1162 \quad (92)$$

$$r_{-1} = \frac{1}{b_0} \left(\frac{m}{2} \cdot k_1 \right) \cdot \beta_1^3 = \frac{1}{0,03125} \left(\frac{1}{2} \cdot 4,06 \right) \cdot 0,1339^3 = 0,156 \quad (93)$$

Určíme konstantu k_1 pro požadovaný koeficient tlumení $\xi=0,8$, $k_1 = 4,06$

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

$$\underline{\underline{r_0 = 2,1162}}$$

$$\underline{\underline{r_{-1} = 0,156}}$$

PID regulátor

Určíme hodnotu parametru β_1 , tak aby hodnoty r_1 , r_0 a r_{-1} byly kladné. Tedy $\beta_1 = 0,5$.

Z rovnic (34,35,36) vyjádříme parametry r_0 , r_1 a r_{-1} :

$$r_1 = \frac{1}{b_0} \left[\left(\frac{m}{2} + 1 \right) \beta_1 - a_1 \right] = \frac{1}{0,03125} \left[\left(\frac{1}{2} + 1 \right) 0,5 - 0,2009 \right] = 17,5712 \quad (94)$$

$$r_0 = \frac{1}{b_0} \left[\left(\frac{m}{2} + k_1 \right) \beta_1^2 - a_0 \right] = \frac{1}{0,03125} \left[\left(\frac{1}{2} + 0,25 \right) 0,5^2 - 0,015625 \right] = 5,5 \quad (95)$$

$$r_{-1} = \frac{1}{b_0} \left(\frac{m}{2} \cdot k_1 \right) \beta_1^3 = \frac{1}{0,03125} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,25 \right) 0,5^3 = 0,5 \quad (96)$$

Konstanta pro požadovaný koeficient tlumení, $k_1 = 4,06$.

Vypočtené hodnoty parametrů regulátoru:

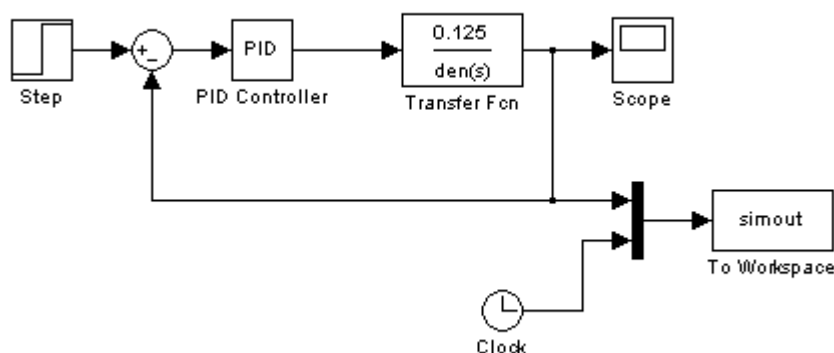
$$\underline{\underline{r_0 = 5,5}}$$

$$\underline{\underline{r_1 = 17,5712}}$$

$$\underline{\underline{r_{-1} = 0,5}}$$

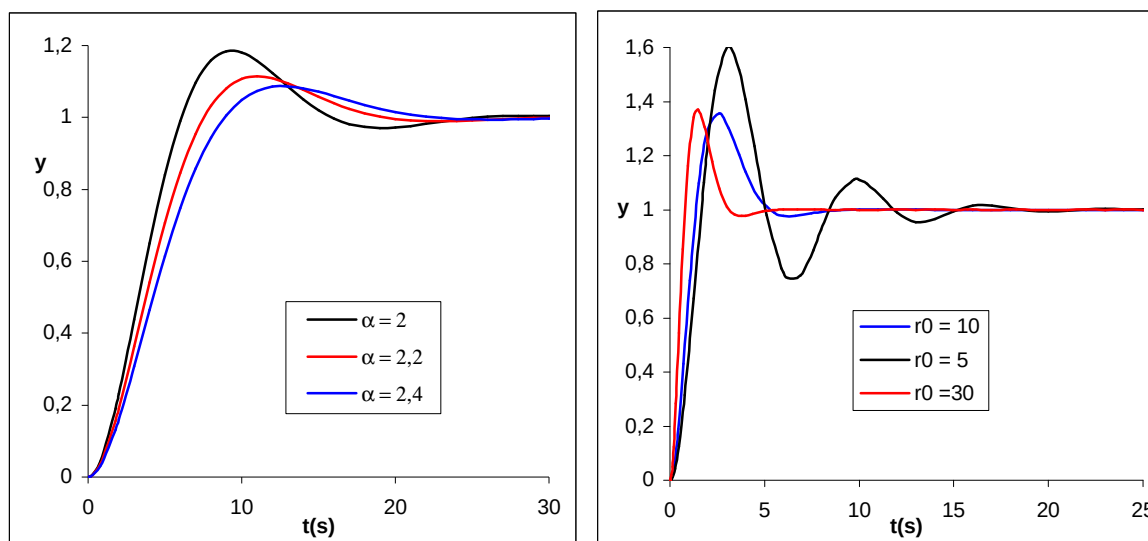
3 SIMULAČNÍ ČÁST

Simulace obsažené v této části jsou vytvořeny v prostředí MATLAB-Simulink. Hodnota žádané veličiny je $w = 1$. Z odsimulovaných průběhů je odečtena doba regulace t_r . Schéma zapojení je znázorněno na obrázku č. 6. Všechny simulované průběhy jsem převedl, pomocí bloku simout, do programu Excel a zde vykreslil průběhy, které jsem použil v této části.



Obr. 6. Regulační schéma uzavřeného regulačního obvodu

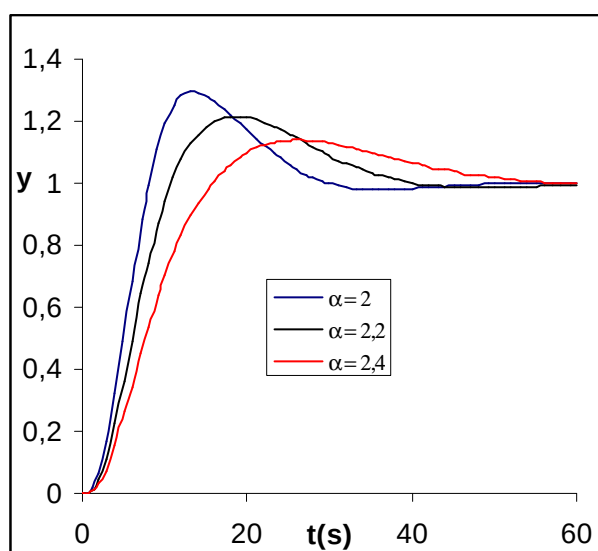
3.1 Naslinova metoda



Obr. 7. Řízení systému 2. řádu regulátorem PI a PID

Při řízení soustavy 2.řádu regulátorem PI bylo dosaženo doby regulace 25 sec a překmitu 18 %, při použití regulátoru PID se zkrátila doba regulace na 5,5 sec, ale překmit

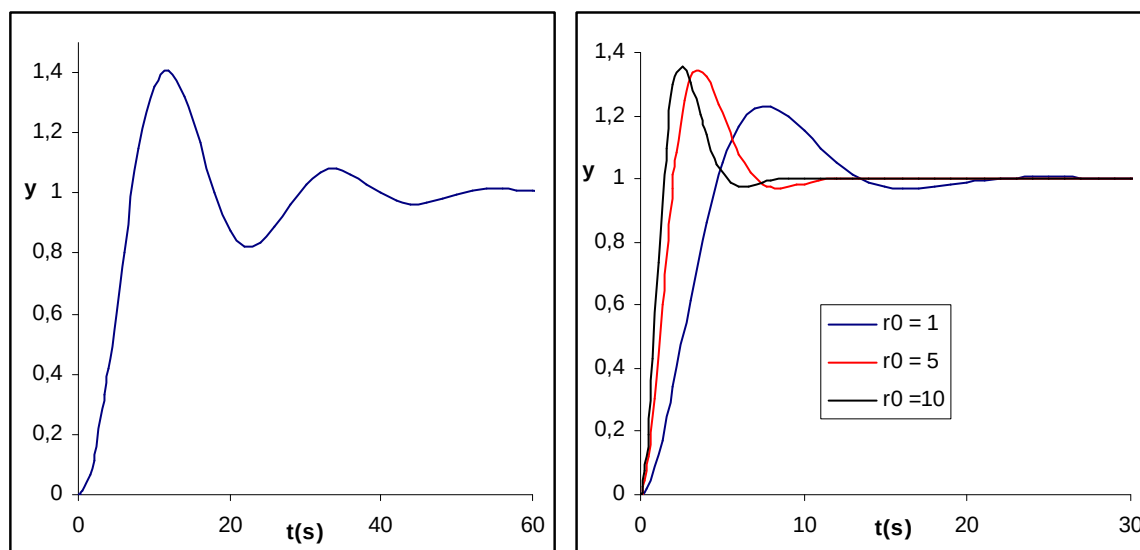
se zvýšil na 37 %. Pro orientaci jsem pro systém 2. řádu s PI regulátorem uvedl srovnání průběhů regulovaných veličin při různých hodnotách α , tedy pro různé procentuelní hodnoty maximálního přeregulování $\Delta y_{\max}$. (Vypočítané hodnoty v našem případě jsou pro $\alpha = 2$ a to jak pro PI, tak i pro PID regulátor.) Vidíme, že se snižující se žádanou maximální hodnotou přeregulování se snižuje i ta reálná, ale procentuelní hodnoty přesně nesouhlasí. Je to způsobeno nejspíše tím, že Naslinova metoda, při které jsou hodnoty koeficientu α určeny na základě dlouhodobějších zkušeností a tudíž nemusí vyhovovat pro každý přenos. Pro PID regulátor jsem uvedl srovnání průběhů regulovaných veličin pro některé zvolené hodnoty parametru r_0 .



Obr. 8. Řízení systému 3. řádu
regulátorem PID

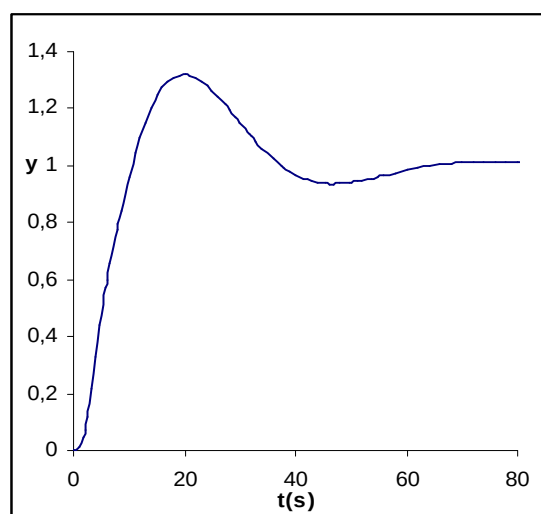
Při použití regulátoru PID jsem dosáhl doby regulace 41,5 sec a překmitu 21,5%. Neuvádím průběhy pro PI regulátor, protože z nerovnosti (11) vidíme, že pro přenos 3. řádu získáme 3 rovnice a tudíž potřebujeme i 3 proměnné. Tato podmínka pro PI regulátor není splněna, protože parametr r_1 je nulový. Z matematického hlediska by řešení PI regulátoru byl nesmysl.

3.2 Whiteleyho standardní tvary



Obr. 9. Řízení systému 2. řádu regulátorem PI a PID

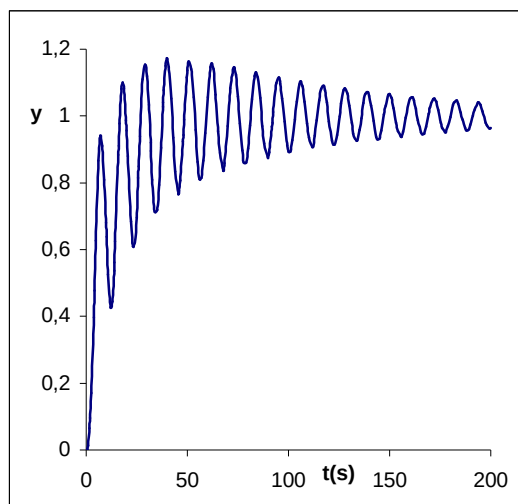
Při řízení soustavy 2.řádu regulátorem PI, navrženým pomocí Whiteleyho standardních tvarů, bylo dosaženo doby regulace 59 sec a překmitu 40%. Při použití regulátoru PID jsme snížili dobu regulace na 7 sec, přičemž překmit byl 36%. Vypočítané hodnoty parametrů jsou pro případ, kdy je zvolené $r_0 = 10$. Na obrázku Obr. 9., pro PID regulátor, jsou vykresleny průběhy i pro jiné zvolené parametry r_0 . Je vidět, že vhodnou volbou parametru r_0 můžeme ovlivnit průběh regulované veličiny. Při zvyšování tohoto parametru roste hodnota maximálního přeregulování (překmitu), avšak doba regulace je kratší.



Obr. 10. Řízení systému 3. řádu
regulátorem PID

Při řízení pomocí regulátoru PID byla doba regulace 53 sec a maximální přeregulování $\Delta y_{\max} = 31\%$.

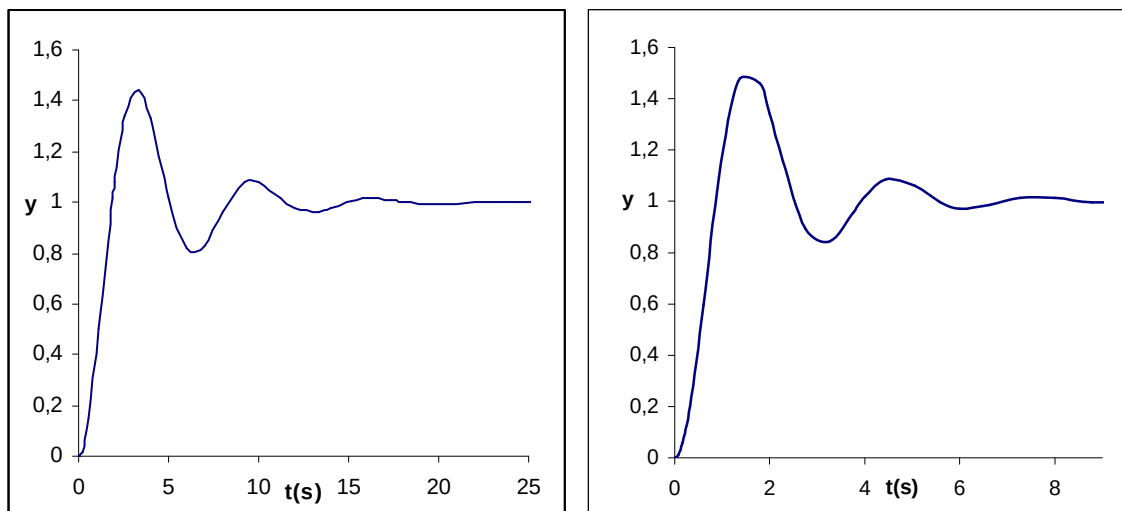
3.3 Metoda kritického zesílení regulátoru



Obr. 11. Řízení systému 3. řádu regulátorem PID

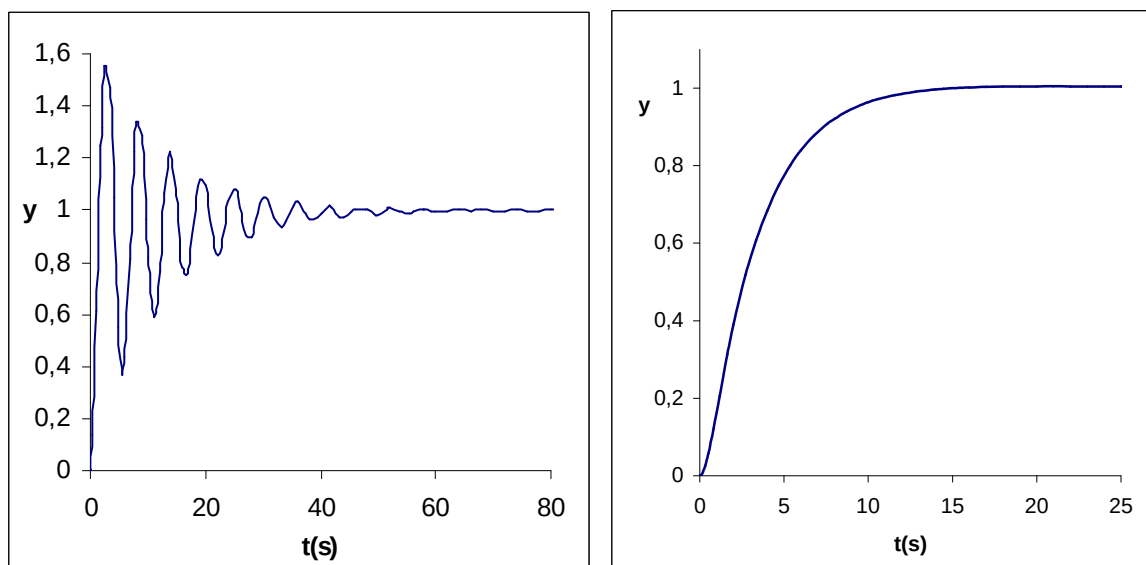
Z průběhů regulovaných veličin pro systém 3. řádu s regulátorem PID je vidět, že metoda kritického zesílení regulátoru (metoda Ziegler-Nichols) je z použitých metod nejhorší. Na Obr. 11. vidíme, že regulovaná veličina kmitá tlumenými kmity. Při použití této metody při návrhu PI regulátoru jsem docílil naprosto nepříjemných výsledků. Průběh regulované veličiny byl kmitavý a s časem se hodnota regulované veličiny ještě více rozcházela. Jediná možnost je ta, že zvolený přenos této metodě nevyhovuje.

3.4 Nastavení regulátoru podle koeficientu tlumení



Obr. 12. Řízení systému 2. řádu regulátorem PI a PID

Při řízení soustavy 2. řádu pomocí regulátoru PI bylo dosaženo doby regulace 22 sec, při překmitu 44%. Při použití regulátoru PID byla doba regulace snížena na 8,5 sec , ale překmit zvýšen na 48%.



Obr. 13. Řízení systému 3. řádu regulátorem PI a PID

Soustavu 3.řádu jsem, při použití regulátoru PI, ureguloval jen s velkým překmitem, $\Delta y_{\max} = 56\%$, s tím že průběh kmitá a ustálí se asi po 56 sec. Zvolil jsme koeficient tlumení $\xi = 0,8$. Při použití regulátoru PID bylo dosaženo doby regulace 14,5 sec a překmit byl nulový. Použil jsem koeficient tlumení $\xi \rightarrow 1$. Pro nižší koeficienty soustava kmitala.

Špatných výsledků dosažených u PI regulátoru si lze vysvětlit tím, že tyto parametry byly vypočteny pro snížený přenos 3. řádu (90). Tímto přenosem byl nahrazen původní přenos s téměř stejnými vlastnostmi.

Diskuse výsledků

Pokud bych měl hodnotit výsledky řízení z hlediska velikosti maximálního přeregulování, hodnocení nebude úplně jednoznačné, ale můžu říci, že při aplikaci Naslinovi metody jsem dosahoval nejmenších hodnot překmitu. Bylo to dáno volbou koeficientů α . Můžeme říct, že při použití této metody byl překmit závislý právě na této hodnotě. Důležité také je, jestli se jedná o přenos 2. nebo 3. řádu. Doba regulace se pohybovala v desítkách sekund, ale například při aplikaci PID regulátoru na přenos 2. řádu jsem dosáhl doby regulace mnohem kratší, přičemž doba regulace v tomto případě byla závislá na vhodné volbě parametru r_0 . Tato metoda je jednoduchá, co se týče výpočtu a bylo pomocí ní dosaženo velmi dobrých výsledků jak pro soustavu 2. řádu, tak pro soustavu řádu třetího.

Metoda Whiteleyho standardních tvarů vykazovala dobré výsledky. Největšího překmitu jsme docílili u přenosu 2. řádu a aplikace PI regulátoru. Doba regulace v porovnání s Naslinovou metodou byla delší. Při aplikaci této metody na přenos 2. řádu s PID regulátorem, jsem ale dosáhl doby regulace až 2,5 sekundy. Záviselo to ovšem opět na vhodné volbě parametru r_0 .

Ziegler-Nicholsova metoda návrhu parametrů regulátoru podle kritického zesílení se nedá použít na systém 2. řádu. Tento systém není možné rozkmitat pro kladné koeficienty přenosu řízení, což je samozřejmě nutnou podmínkou stability systému. Při použití této metody na systém 3. řádu bylo dosaženo velmi špatných výsledků.

U metody nastavení regulátoru podle koeficientu tlumení regulačního pochodu bylo pro systém 2. řádu dosaženo dobrých výsledků. Kladem této metody je to, že je založena na matematice. Jinak řečeno nevyskytují se zde žádné empiricky získané hodnoty, jako je tomu např. u Naslinovy metody nebo u metody Whiteleyho standardních tvarů. Maximální

přeregulování relativně vysoké a bylo vyšší než u Naslinovy metody nebo u metody Whiteleyho standardních tvarů, $\Delta y_{\max} = 44-48 \%$, doby regulace byly srovnatelné s Naslinovou metodou. Při aplikaci této metody na soustavu 3. řádu a současným použitím regulátorů typu PI a PID, bylo nutné snížit stupeň jmenovatele polynomu. K tomu jsem použil Routhova-Schurovo kritérium stability. Tímto sníženým přenosem, s téměř shodnými vlastnostmi, jsem nahradil systém 3. řádu a navrhl jsem pro něj pomocí této metody regulátor. U regulátoru PI jsem nedosáhl dobrých výsledků, neboť průběh regulované veličiny hodně kmital. U regulátoru PID bylo dosaženo doby regulace $t_r = 14,5$ sec, což je doba mnohem kratší než u PI regulátoru, který ještě navíc kmital.

Když se zpětně podíváme na všechny použité metody syntézy, nelze jednoznačně říci, že jedna nebo druhá je nejlepší. Spíše můžeme říci, že každá metoda je závislá na konkrétních vlastnostech soustavy a nemůžeme říci, že platí absolutně. Jednoznačně by se mělo na řešenou soustavu aplikovat více metod syntézy lineárních spojitých dynamických systémů.

ZÁVĚR

Úkolem bakalářské práce bylo porovnání výsledků řízení lineárního systému 2. a 3. řádu, kterých jsem dosáhl aplikací různých metod syntézy spojitých dynamických systémů na dané spojité regulátory. Pro simulaci řízení bylo použito prostředí MATLAB-Simulink.

V první části jsem se zabýval obecným popisem uzavřeného regulačního obvodu a teoretickým rozbořem postupů jednotlivých metod návrhů parametru regulátoru.

Tyto metody jsem ve výpočtové části aplikoval na zvolené systémy 2. a 3. řádu.

Otestování jednotlivých metod jsem prakticky provedl v simulační části, poté jsem provedl diskusi výsledků. Jako hlavní hledisko jsem bral maximálního přeregulování a doby regulace.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Balátě, J.: Automatické řízení. BEN - technická literatura, Praha, 2003.
- [2] Šulc, B., Vítečková, M.: Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004
- [3] Mikleš, J., Hutla, V.: Teória automatického riadenia. ALFA, Bratislava, 1986.
- [4] Mikleš, J., Dostál, P., Mészáros, A.: Riadenie technologických procesov. STU, Bratislava, 1994.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

$w(t)$	řídící veličina
$e(t)$	regulační odchylka
$u(t)$	akční veličina
$y(t)$	regulovaná veličina
$v(t)$	poruchová veličina
$G_{w/y}$	přenos řízení
G_r	přenos regulátoru
G_s	přenos soustavy
a	polynom jmenovatele přenosu soustavy
b	polynom čitatele přenosu soustavy
p	polynom jmenovatele přenosu regulátoru
r	polynom čitatele přenosu regulátoru
E	obraz regulační odchylky
W	obraz žádané veličiny
Y	obraz regulované veličiny
s	komplexně proměnná v Laplaceově transformaci
a_i	koeficienty polynomu jmenovatele přenosu
b_i	koeficienty polynomu jmenovatele přenosu
α	koeficient standardního tvaru dle Naslinovi metody
$\Delta y_{\max}$	maximální přeregulování
σ	koeficient standardního tvaru dle Whiteleyho metody
τ	okamžik maximálního přeregulování
t_r	doba regulace
$\overline{A_i}$	tabelované hodnoty koeficientů přenosu dle Whiteleyho metody
τ^{tab}	tabelovaná hodnota okamžiku maximálního přeregulování
t_r^{tab}	tabelovaná hodnota doby regulace
k_r	zesílení regulátoru
T_I	integrační konstanta
T_D	derivační konstanta
r_0	proporcionální konstanta
r_{-1}	integrační konstanta
r_1	derivační konstanta

T	perioda kmitů
T_k	perioda kritických kmitů
r_{0k}	kritické zesílení
s_i	kořen polynomu s komplexní proměnnou s
M	amplituda kmitů
ξ	koeficient tlumení
π	Ludolfovo číslo
k_1	bezrozměrný parametr
β_0, β_1	koeficienty polynomu dle metody návrhu podle koeficientu tlumení
H	Hurwitzův determinant
ω	úhlová rychlost

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1. Schéma uzavřeného regulačního obvodu	7
Obr. 2. Regulační pochod odpovídající standardnímu tvaru	11
Obr. 3. Určení periody kmitů T_k	12
Obr. 4. Regulační schéma uzavřeného regulačního obvodu	23
Obr. 5. Soustava 3. řádu při kritickém zesílení r_0	24
Obr. 6. Regulační schéma uzavřeného regulačního obvodu	28
Obr. 7. Řízení systému 2. řádu regulátorem PI a PID	28
Obr. 8. Řízení systému 3. řádu regulátorem PI a PID	29
Obr. 9. Řízení systému 2. řádu regulátorem PI a PID	30
Obr. 10. Řízení systému 3. řádu regulátorem PID	30
Obr. 11. Řízení systému 3. řádu regulátorem PI a PID	31
Obr. 12. Řízení systému 2. řádu regulátorem PI a PID	32
Obr. 13. Řízení systému 3. řádu regulátorem PI a PID	32

SEZNAM TABULEK

Tab. 1 Závislost $\Delta y_{\max}$ na α dle Naslina	9
Tab. 2 Standardní tvary přenosové funkce typu (18)	11
Tab. 3 Standardní tvary přenosové funkce typu (19)	11
Tab. 4 Standardní tvary přenosové funkce typu (20)	12
Tab. 5 Seřízení spojitého regulátoru z kritických hodnot regulátoru	13
Tab. 6 Hodnoty parametru k_1 v závislosti na koeficientu tlumení	14