

Vizualizace zlomkového kalkulu

Marek Karch

Bakalářská práce
2017



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2016/2017

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Marek Karch**
Osobní číslo: **A12027**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**
Forma studia: **prezenční**

Téma práce: **Vizualizace zlomkového kalkulu**
Téma anglicky: **Visualisations of Fractional Calculus**

Zásady pro vypracování:

1. Vypracujte text sloužící jako úvod do zlomkového kalkulu. Zahrňte všobecnou motivaci, nezbytnou přípravnou notaci a terminologii (gamma funkce, Mittag-Lefflerova funkce a jiné), základní definice zlomkové derivace (Caputo, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov).
2. Provedte diskuzi rozdílů základních definic, jejich použití a souvislostí mezi nimi.
3. Vytvořte přehled vzorců pro vybrané funkce.
4. Popište základ metody zlomkové Laplaceovy transformace.
5. V rámci praktické části vytvořte geometrickou vizualizaci (grafy, animace) vybraných objektů z teoretické části v programu Matlab (nebo jiném).
6. Vypracujte geometrickou interpretaci zlomkových derivací podle Podlubného.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. Podlubny, I.: **Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.** San Diego: Academic Press, c1999.
2. Oldham, K.B., Spanier, J.: **Fractional Calculus: Theory and Applications, Differentiation and Integration to Arbitrary Order,** Academic Press New York/London, UK, 1974.
3. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J.: **Theory and Applications of Differential Equations,** Amsterdam, 2006.
4. Podlubny, I.: **Geometrical and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation,** *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 5 (4), pp. 367–386, 2002.
5. Podlubny, I.: **The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order,** arXiv:funct-an/9710005, 1997.

Vedoucí bakalářské práce:

Mgr. Zuzana Pátíková, Ph.D.

Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce:

24. února 2017

Termín odevzdání bakalářské práce:

24. května 2017

Ve Zlíně dne 24. února 2017



doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že


- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne

23.5.2017


.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Táto práca má slúžiť ako úvod do zlomkového kalkulu. V prvej kapitole opisujeme funkcie využívané v tejto práci. Druhá kapitola má za úlohu oboznámiť čitateľa so základnými definíciami zlomkového kalkulu. V tretej kapitole predstavujeme ich základné vlastnosti, ktoré sú najčastejšie využívané pri operácii so zlomkovými deriváciami a integráciami. V štvrtej kapitole popisujeme základ metódy zlomkovej Laplaceovej transformácie s názornými príkladmi. Príklady využitia zlomkového kalkulu v praxi sú obsiahnuté v piatej kapitole. Šiesta kapitola obsahuje geometrickú interpretáciu zlomkového kalkulu podľa I. Podlubného. Tam, kde to bolo vhodné, sú pridané grafy relevantných funkcií.

Kľúčové slová: Zlomkový kalkul, Grünwald-Letnikova zlomková derivácia, Riemann-Liouvillova zlomková derivácia, Caputova zlomková derivácia, Laplaceova transformácia, Geometrická interpretácia zlomkového kalkulu

ABSTRACT

This thesis is to be used as introduction to fractional calculus. In the first chapter we describe functions used in this thesis. The purpose of the second chapter is to familiarize the reader with basic definitions of fractional calculus. In the third chapter we present their basic properties that are most commonly used in operations with fractional derivatives and integrals. In the fourth chapter we describe the basis of fractional Laplace transform method with illustrative examples. Examples of applications of fractional calculus are placed in the fifth chapter. The the sixth chapter contains geometric interpretation of fractional calculus according to I. Podlubny. Charts of relevant functions are added, where appropriate.

Keywords: Fractional calculus, Grünwald-Letnikov fractional derivation, Riemann-Liouville fractional derivation, Caputo fractional derivation, Laplace transform, Geometric interpretation of fractional calculus

Na tomto mieste by som rád poďakoval Mgr. Zuzane Pátíkovej, Ph.D. za jej pomoc a odborné rady pri písaní práce a hlavne za trpezlivosť a ústretovosť v záverečných fázach jej tvorby.

OBSAH

ÚVOD	8
1 VYBRANÉ FUNKCIE	10
1.1 GAMMA FUNKCIA	10
1.2 BETA FUNKCIA	11
1.3 MITTAG-LEFFLEROVA FUNKCIA	12
2 ZÁKLADNÉ DEFINÍCIE ZLOMKOVÉHO KALKULU	14
2.1 GRÜNWARD-LETNIKOVA ZLOMKOVÁ INTEGRÁCIA A DERIVÁCIA	14
2.2 RIEMANN-LIOUVILLOVA ZLOMKOVÁ INTEGRÁCIA A DERIVÁCIA	16
2.3 CAPUTOVA ZLOMKOVÁ INTEGRÁCIA A DERIVÁCIA	19
3 ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI ZLOMKOVÉHO KALKULU	22
3.1 LINEARITA	22
3.2 SKLADANIE GRÜNWARD-LETNIKOVÝCH ZLOMKOVÝCH OPERÁTOROV ..	22
3.3 SKLADANIE RIEMANN-LIOUVILLOVÝCH ZLOMKOVÝCH OPERÁTOROV ..	24
3.4 LEIBNIZOVO PRAVIDLO PRE ZLOMKOVÉ DERIVÁCIE	25
4 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA	26
4.1 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA RIEMANN-LIOUVILLOVEJ ZLOMKO- VEJ DERIVÁCIE	27
4.2 LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA CAPUTOVEJ ZLOMKOVEJ DERIVÁCIE ..	28
4.3 NÁZORNÉ PRÍKLADY RIEŠENIA LINEÁRNYCH ZLOMKOVÝCH DIFEREN- CIÁLNYCH ROVNÍC	29
5 VYUŽITIE ZLOMKOVÉHO KALKULU V PRAXI	31
5.1 VISKOELASTICITA	31
5.2 TEÓRIA RIADENIA	31
5.3 NEURÓNOVÝ MODEL ZLOMKOVÉHO RÁDU	32
6 GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA ZLOMKOVÉHO KALKULU	33
7 VIZUALIZÁCIA ZLOMKOVÉHO KALKULU	37
ZÁVER	38
ZOZNAM OBRÁZKOV	40
ZOZNAM TABULIEK	41

ÚVOD

Zlomkový kalkulus sa ako oblasť matematiky zaoberá neceločíselnými deriváciami a itnegrálmi. Prvé zmienky o zlomkovom kalkule sa objavili v roku 1695 v korešpondencii medzi nemeckým matematikom a filozofom G. W. Leibnizom a francúzskym matematikom G. de l'Hospitalom. Leibniz označil n -tú deriváciu funkcie f ako

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad n \in \mathbb{Z}^+ .$$

De l'Hospital sa zamýšľal nad tým, čo by tento výraz znamenal pre neceločíselný rád derivácie $n = 1/2$. Leibniz mu odpovedal: "Z toho vypláva, že $d^{1/2}x$ sa rovná $x(dx/x)^{1/2}$. Jedná sa o zdanlivý paradox, z ktorého budú jedného dňa odvodené užitočné dôsledky."

V roku 1819 sa objavila zmienka o zlomkovom kalkule v publikácii S. F. Lacroixa [5], ktorý tejto tematike venoval dve strany. V nej odvodil vzorec pre derivácie neceločíselného rádu funkcie x^m . Pre $n = \frac{1}{2}$ získal

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} .$$

Za povšimnutie stojí, že výsledok získaný Lacroixom sa zhoduje s výsledkom získaným Riemann-Liouvillovou definíciou zlomkovej derivácie [2, 14].

Ako prvý uviedol zlomkový kalkulus do praxe norský matematik N. H. Abel v roku 1823 pri riešení integrálnej rovnice popisujúcej problém tautochrony (krivky, po ktorej sa pohybuje hmotná častica tak, aby do určitého pevného bodu dorazila za rovnaký čas nezávisle na jej počiatočnej polohe) [7]. Ak je čas sklzu po krivke známa konštanta, potom je Abelova integrálna rovnica v tvare

$$k = \int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt .$$

Abel zapísal pravú stranu rovnice ako $\sqrt{\pi}[d^{-1/2}/dx^{-1/2}]f(x)$. Potom obe strany rovnice spracoval s $d^{1/2}/dx^{1/2}$ a získal

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} k = \sqrt{\pi} f(x) ,$$

pretože tieto zlomkové operácie (s vhodnými podmienkami pre f) majú vlastnosť $D^{1/2}D^{-1/2}f = D^0f = f$. Takže keď sa vypočíta zlomková derivácia rádu $\frac{1}{2}$ konštanty k , môžeme určiť funkciu $f(x)$. Je dôležité podotknúť, že zlomková derivácia konštanty nie je vždy rovná nule.

Matematici označili Abelove riešenie ako "elegantné". Možno to bolo Abelove riešenie, ktoré prilákalo pozornosť Liouvilla, ktorý spracoval prvú veľkú štúdiu zlomko-

vého kalkulu. Liouville navrhol definíciu na základe vzorca pre deriváciu exponenciálnej funkcie, označovanú ako prvá Liouvillova definícia. Druhá Liouvillova definícia je prezentovaná vo forme integrálu. Po Liouvillovi to bol Riemann, ktorý spracoval ďalšiu dôležitú prácu o zlomkovom kalkule. Grünwald a Letnikov nezávisle na sebe vyvinuli prístup k neceločíselným deriváciám pomocou rady, narozdiel od Riemann-Liouvillovho prístupu, ktorý využíva integrál.

Po roku 1900 zažíva zlomkový kalkul rapidný rozvoj a v snahe formulovať konkrétne problémy, boli navrhnuté ďalšie definície. Riesz uviedol formuláciu, ktorá je založená na Furierovej transformácii. Erdélyi-Kober prišiel s odlišnou definíciou integrácie neceločíselného rádu, ktorá je užitočná pri aplikáciach zahrňujúcich integrálne a diferenciálne rovnice. Caputo prišiel s definíciou podobnou Riemann-Liouvillovej, ktorá má väčšie obmedzenia, ale je vhodnejšia pre riešenie problémov diferenciálnych rovníc zlomkového rádu s počiatočnými podmienkami. V tejto práci sa zameriame na základné definície zlomkovej derivácie a integrácie, popíšeme si ich vlastnosti, rozdiely a súvislosti.

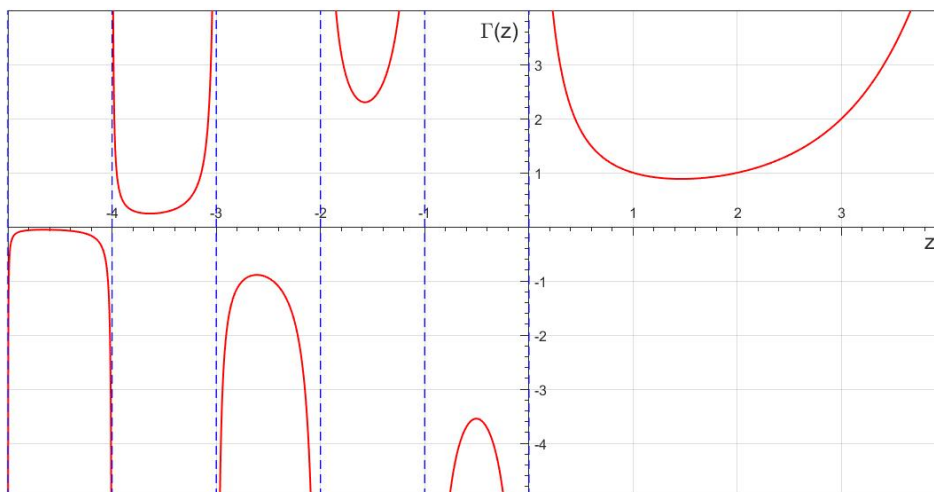
1 Vybrané funkcie

1.1 Gamma funkcia

Gamma funkcia $\Gamma(z)$, taktiež nazývaná Eulerov integrál druhého druhu, je jednou zo základných funkcií zlomkového kalkulu. Je zovšeobecnením faktoriálu $n!$ pre reálne a komplexné hodnoty. Gamma funkcia je definovaná vzťahom [4]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt .$$

Integrál konverguje len v pravej polovici komplexnej roviny $\Re(z) > 0$, no napriek tomu je Gamma funkcia definovaná pre ľubovoľné reálne a komplexné čísla okrem nuly a celých záporných čísiel $\{0, -1, -2, \dots\}$. Na nasledujúcom grafe je vykreslená Gamma funkcia v rozsahu svojho argumentu.



Obr. 1.1 Priebeh Gamma funkcie $\Gamma(z)$ v rozsahu $z \in \langle -5, 4 \rangle$

Ako už bolo spomenuté, Gamma funkcia je úzko spojená s faktoriálom. Jednou zo základných vlastností Gamma funkcie je

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z),$$

čo sa dá ľahko dokázať integrovaním pomocou metódy per partes

$$\Gamma(z + 1) = [-e^{-t}t^{-z}]_0^{\infty} - z \int_0^{\infty} -e^{-t}t^{z-1} dt = z\Gamma(z) .$$

Ak by sme rovnakú operáciu zopakovali pre $\Gamma(z)$ dostaneme

$$\Gamma(z + 1) = z(z - 1)\Gamma(z - 1)$$

a opakovaným aplikovaním tohto postupu až po $\Gamma(1)$, kde $\Gamma(1) = 1$ získame

$$\Gamma(z + 1) = z(z - 1)(z - 2) \dots 1 = z! . \quad (1.1)$$

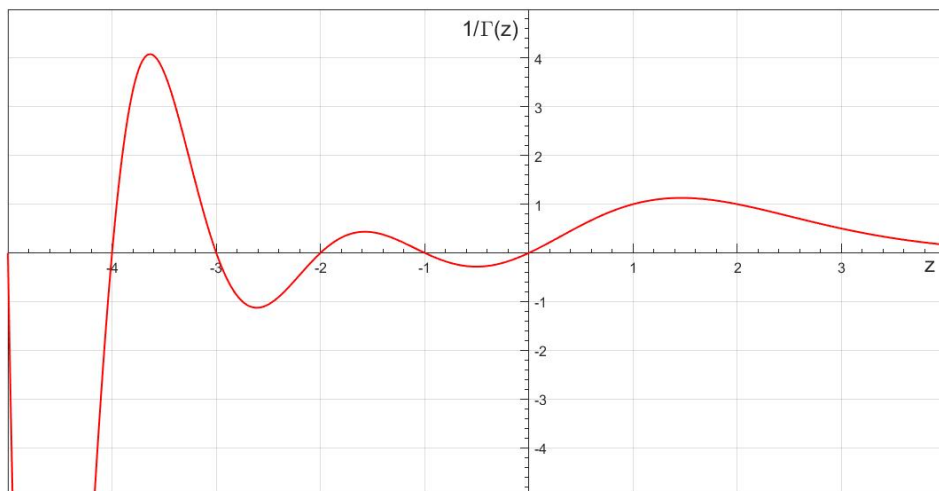
Vo výpočtoch budeme využívať aj kombinačné čísla, ktoré sa dajú zapísať pomocou Gamma funkcie nasledovne

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{(p-r)!r!} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-r+1)\Gamma(r+1)} . \quad (1.2)$$

Gamma funkciu môžeme vyjadriť aj v limitnom tvare, pomocou ktorého dokážeme definovať jej prevrátenú hodnotu

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)} ,$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{n! n^z} .$$



Obr. 1.2 Priebeh inverznej Gamma funkcie v rozsahu $z \in \langle -5, 4 \rangle$

1.2 Beta funkcia

Beta funkcia je dôležitá pre výpočet zlomkových derivácií mocnínovej funkcie. Je definovaná dvojparametrovým integrálom

$$B(z, \omega) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{\omega-1} d\tau$$

pre z, ω splňujúce podmienky $\Re(z) > 0$ a $\Re(\omega) > 0$. Ak použijeme Laplaceovu transformáciu konvolúcie (4.4), dostaneme vzťah medzi Beta a Gamma funkciou

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z + \omega)},$$

z čoho vyplíva

$$B(z, \omega) = B(\omega, z) .$$

1.3 Mittag-Lefflerova funkcia

Exponenciálna funkcia hrá dôležitú úlohu pri riešení obyčajných diferenciálnych rovníc. Pomocou sumy ju môžeme vyjadriť ako

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} . \quad (1.3)$$

Zovšeobecnením (1.3) získame vzťah pre Mittag-Lefflerovu funkciu závislú na jednom komplexnom parametre

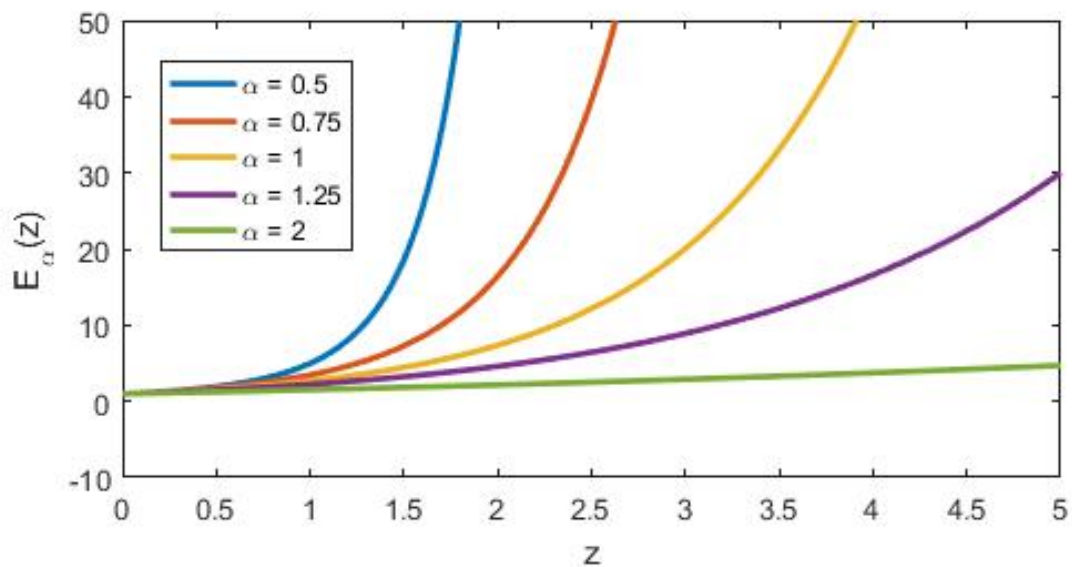
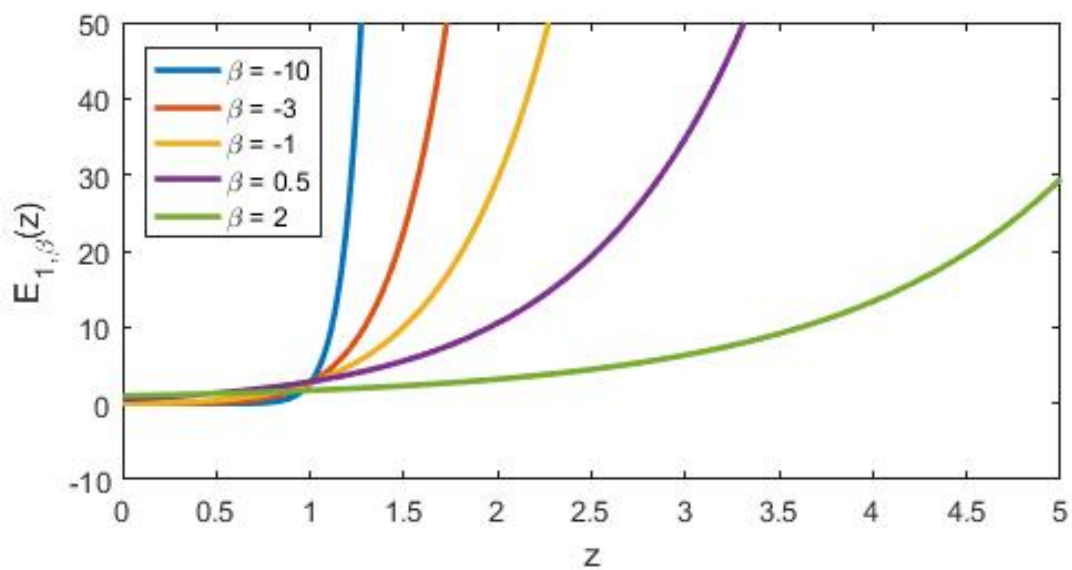
$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} ,$$

s ktorým prišiel Mittag-Leffler v roku 1903. Dvojparametrovú funkciu Mittag-Lefflerovho typu zaviedol Agarwal, ktorý však ponechal rovnakú notáciu akú má jednoparametrová Mittag-Lefflerova funkcia [13]

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} .$$

Správnou voľbou parametrov α a β je možné získať niektoré známe funkcie, ako je vyššie uvedená exponenciálna funkcia, hyperbolický kosínus a sínus alebo chybová funkcia

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z , \\ E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z) , \\ E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z} , \\ E_{\frac{1}{2},1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)} = e^{z^2} \operatorname{erf}(-z) . \end{aligned}$$

Obr. 1.3 Jednparametrová Mittag-Lefflerova funkcia pre rôzne hodnoty α Obr. 1.4 Dvojparametrová Mittag-Lefflerova funkcia pre $\alpha = 1$ a rôzne hodnoty β

2 Základné definície zlomkového kalkulu

Hlavnými predmetmi záujmu klasického kalkulu sú derivácie a integrály funkcií - tieto dve operácie sú v určitom zmysle navzájom inverzné. Ak začneme s funkciou $f(t)$ a jej derivácie položíme vľavo a integrály vpravo, dostaneme obojsmerne nekonečnú radu

$$\dots \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \frac{df(t)}{dt}, f(t), \int_a^t f(\tau) d\tau, \int_a^t \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1, \dots$$

Zlomkový kalkulus sa snaží interpolovať túto radu tak, aby zahŕňala klasické derivácie a integrály a zobecnila ju pre ľubovoľný rád.

Existuje veľa spôsobov, ako definovať zlomkové integrály a derivácie. Za názvy väčšinou berú mená svojich autorov. Napríklad Grünwald-Letnikovova definícia sa toho snaží dosiahnuť pomocou sumy a limity. Existujú aj elegantnejšie prístupy, ako napríklad Riemann-Liouvillova a Caputova definícia. V tejto časti práce sa oboznámime s týmito tromi definíciami a popíšeme si ich rozdiely a súvislosti. Podrobnejšie informácie môžeme nájsť v [10, 12].

2.1 Grünwald-Letnikova zlomková integrácia a derivácia

V tejto časti si popíšeme prístup zobecnenia pojmov, ktoré sú väčšinou v klasickom kalkule prezentované oddelene: derivácie celočíselného rádu a n -násobný integrál. Ako bude nižšie ukázané, tieto pojmy majú k sebe bližšie než sa obvykle predpokladá.

Podľa známej definície je derivácia prvého rádu funkcie $f(t)$ definovaná nasledovne

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (2.1)$$

Ak aplikujeme definíciu (2.1) dvakrát, získame druhú deriváciu funkcie $f(t)$

$$f''(t) = \frac{d^2}{d^2 t} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \quad (2.2)$$

S využitím (2.1) a (2.2) dotaneme tretiu deriváciu

$$f'''(t) = \frac{d^3}{d^3 t} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}$$

a pomocou indukcie [10] môžeme vyjadriť n -tú deriváciu ako

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{d^n t} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh). \quad (2.3)$$

Zavedme nasledovný výraz ako zovšeobecnenie rovníc (2.2)-(2.3)

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \quad (2.4)$$

kde p je ľubovoľné celé číslo (1.2). Pre $p \leq n$ platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p}{dt^p} f(t) \quad (2.5)$$

pretože z rovnice (2.5) vypláva, že pre všetky koeficienty $r > p$ je kombinačné číslo rovné 0.

Pomocou rovníc (2.4) a (2.5) môžeme vyjadriť deriváciu pre ľubovoľné reálne p a nahradením kombinačného čísla Gamma funkciou (1.2). Ďalej nahradíme hornú limitu sumy výrazom $\frac{t-a}{h}$, kde a a t je dolná a horná hranica integrálu, takže horná limita sumy pôjde k nekonečnu ak $h \rightarrow 0$. Tým sa dopracujeme k definícii Grünwald-Letnikovej zlomkovej derivácie

$${}^{GL}D_a^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{r! \Gamma(\alpha - r + 1)} f(t - rh) . \quad (2.6)$$

Teraz uvážme záporné hodnoty α . Kombinačné číslo pre záporné hodnoty p môžeme vyjadriť ako

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} ,$$

čo môžeme zapísať ako

$$\binom{-p}{r} = (-1)^r \frac{p(p+1)\dots(p+r-1)}{r!} = (-1)^r \frac{(p+r-1)!}{(p-1)!r!} . \quad (2.7)$$

rovnica (2.7) sa dá zovšeobecniť pre záporné reálne čísla nasledovne

$$\binom{-\alpha}{r} = (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)r!} \quad (2.8)$$

S použitím (2.8) môžeme prepísať (2.6) pre záporné hodnoty α , čím získame Grünwald-Letnikovu definíciu zlomkového integrálu

$${}^{GL}D_a^{-\alpha} f(t) = {}^{GL}I_a^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{r=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha + r)}{r! \Gamma(\alpha)} f(t - rh) .$$

Grünwald-Letnikova definícia pre zlomkové integrály a derivácie sa dá vyjadriť aj v integrálnom tvare. Zlomkový integrál má tvar

$${}^{GL}I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau ,$$

a pre zlomkovú deriváciu platí

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Rovnica (2.9) platí za predpokladu, že derivácie $f^{(k)}(t)$, ($k = 1, 2, \dots, m+1$) sú spojité na intervale $[a, t]$ a m je celé číslo splňujúce podmienku $m \leq \alpha < m+1$.

2.2 Riemann-Liouvilleova zlomková integrácia a derivácia

Riemann-Liouvillov prístup je založený na Cauchyho rovnici pre n -násobný integrál

$$I_a^n f(t) = \int_a^t \int_a^{\tau_{n-1}} \dots \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Pre zovšeobecnenie Cauchyho rovnice (2.10) stačí nahradiť celočíselný rád integrálu n kladným reálnym číslom α a faktoriál Gamma funkciou (1.1) [10]. Kvôli identifikácii Riemann-Liouvilleovej derivácie a integrálu budeme používať ľavý horný index RL .

$${}^{RL}I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau . \quad (2.11)$$

Táto rovnica predstavuje integrál ľubovoľného rádu $\alpha > 0$, ale nedovoľuje rád $\alpha = 0$ čo formálne reprezentuje identitu. Preto rozšírime túto definíciu zavedením

$${}^{RL}I_a^0 f(t) = f(t) . \quad (2.12)$$

Definícia zlomkového integrálu je vcelku jednoduchá, narozdiel od zlomkovej derivácie. Keďže neexistuje rovnica n -tej derivácie obdobná (2.10), musíme zovšeobecniť derivácie pomocou zlomkového integrálu.

Nech a, b, α sú reálne konštanty, $a < b$, $n = \max(0, [\alpha] + 1)$, kde $[\cdot]$ značí zaookrúhlenie nadol, a funkcia $f(t)$ je integrovateľná na $\langle a, b \rangle$. Pre $n > 0$ uvažujme, že funkcia $f(t)$ je n -krát derivovateľná na $\langle a, b \rangle$. Potom je Riemann-Liouvilleova zlomková derivácia definovaná pre $t \in \langle a, b \rangle$ ako

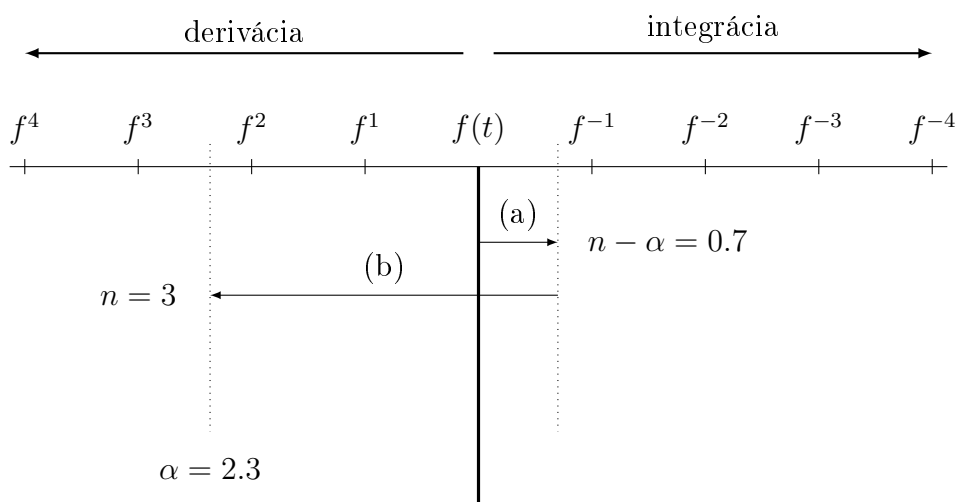
$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[{}^{RL}I_a^{n-\alpha} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

$${}^{RL}D_a^{-\alpha} = {}^{RL}I_a^\alpha.$$

Pre $\alpha = k, k \in \mathbb{N}_0$ platí

$${}^{RL}D^k f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \int_a^t f(\tau) d\tau = \frac{d^k}{dt^k} f(t).$$

Grafická reprezentácia Riemann-Liouvilleovej zlomkovej derivácie pre $\alpha = 2.3$ je zobrazená na Obr. 2.1.



Obr. 2.1 Grafická reprezentácia Riemann-Liouvilleovej zlomkovej derivácie

Vysvetlenie tohto postupu je vcelku jednoduché. Po tom ako sme určili celé číslo m , je prvý krok operácia (a), teda integrál funkcie $f(t)$ rádu $n - \alpha = 0.7$. Operácia (b) je potom derivácia funkcie n -krát, čím dostaneme deriváciu rádu $\alpha = 2.3$.

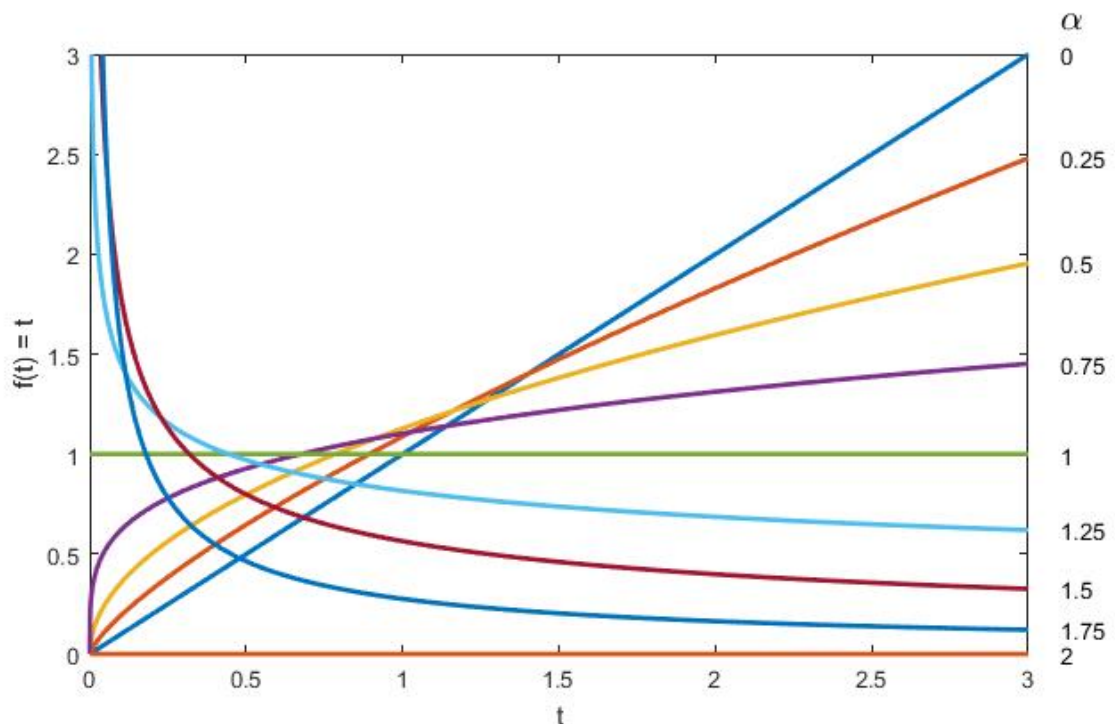
Riemann-Liouvilleova derivácia rádu $\alpha > 0$ funkcie $f(t) = t^p$ pre $p \geq 0$

$${}^{RL}D_0^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^p d\tau$$

zavedieme $\tau = vt$ pre $0 \leq v \leq 1$, $d\tau = t dv$ a dosadíme

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_0^\alpha t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 ((1-v)t)^{n-\alpha-1} (vt)^p dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-v)^{n-\alpha-1} v^p dv \frac{d^n}{dt^n} t^{n+p-\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} B(p+1, n-\alpha) \frac{d^n}{dt^n} t^{n+p-\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} B(p+1, n-\alpha) \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}.
\end{aligned}$$

Táto rovnica nám dovoľuje rýchlo získať zlomkovú deriváciu akéhokoľvek polynómu. Mohli by sme očakávať, že zlomková derivácia konštanty je vždy nula, no v tomto prípade to neplatí. Ak použijeme túto rovnicu pre ${}^{RL}D_0^\alpha t^p$ pre $p = 0$, dostaneme ${}^{RL}D_0^\alpha 1 = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$, takže ${}^{RL}D_0^\alpha k = \frac{kt^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ bude nulová iba vtedy, ak $k = 0$.



Obr. 2.2 Riemann-Liouvillové zlomkové derivácie funkcie $f(t) = t$ so zmenou rádu derivácie $\Delta\alpha = 0,25$

V nasledujúcich tabuľkách sú uvedené zlomkové derivácie vybraných funkcií.

Tab. 2.1 Derivácie s dolnou hranicou $-\infty$, t.j. ${}^{RL}D_{-\infty}^{\alpha}f(t)$

funkcia $f(t)$	${}^{RL}D_{-\infty}^{\alpha}f(t)$, zlomková derivácia
$e^{\lambda t}$	$\lambda^{\alpha}e^{\lambda t}$
$e^{\lambda t + \mu}$	$\lambda^{\alpha}e^{\lambda t + \mu}$
$\sin(\lambda t)$	$\lambda^{\alpha}\sin\left(\lambda t + \frac{\pi\alpha}{2}\right)$
$\cos(\lambda t)$	$\lambda^{\alpha}\cos\left(\lambda t + \frac{\pi\alpha}{2}\right)$
$e^{\lambda t}\sin(\mu t)$	$r^{\alpha}e^{\lambda t}\sin(\mu t + \alpha\phi)$ $r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\tan \phi = \frac{\mu}{\lambda}$, $(\lambda, \mu > 0)$
$e^{\lambda t}\cos(\mu t)$	$r^{\alpha}e^{\lambda t}\cos(\mu t + \alpha\phi)$ $r = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\tan \phi = \frac{\mu}{\lambda}$, $(\lambda, \mu > 0)$

Tab. 2.2 Derivácie s dolnou hranicou 0, t.j. ${}^{RL}D_0^{\alpha}f(t)$ pre $t > 0$

funkcia $f(t)$	${}^{RL}D_0^{\alpha}f(t)$, zlomková derivácia
k	$\frac{kt^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
$H(t)$	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
$H(t-c)$	$\begin{cases} \frac{(t-c)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} & (t > c) \\ 0, & 0 \leq t \leq c \end{cases}$
$H(t-c)f(t)$	$\begin{cases} {}^{RL}D_0^{\alpha}f(t) & (t > c) \\ 0, & 0 \leq t \leq c \end{cases}$
$(t-c)^{\beta}$, $\Re(\beta) > -1$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-c)^{\beta-\alpha}$
$\delta(t)$	$\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$
t^p	$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}t^{p-\alpha}$ $p > -1$
$e^{\lambda t}$	$t^{-\alpha}E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$
$\cosh(\sqrt{\lambda}t)$	$t^{-\alpha}E_{2,1-\alpha}(\lambda t^2)$
$\frac{\sinh(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}t}$	$t^{1-\alpha}E_{2,2-\alpha}(\lambda t^2)$
$t^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda t^{\mu})$	$t^{\beta-\alpha-1}E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda t^{\mu})$

2.3 Caputova zlomková integrácia a derivácia

Caputo zvolil podobný prístup ako Riemann-Liouville. Rovnica pre zlomkové integrály je rovnaká ako (2.11). Caputove zlomkové integrály a derivácie budeme označovať ľavým horným indexom C .

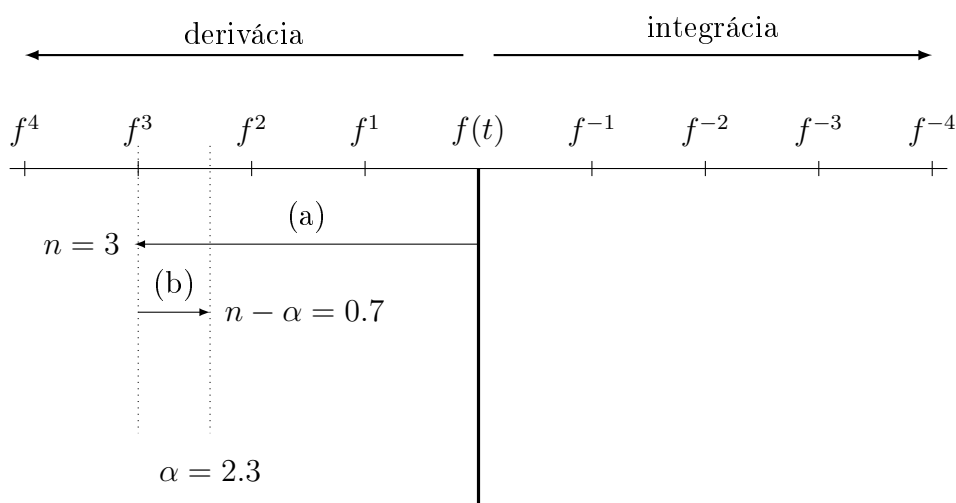
$${}^C I_a^{\alpha}f(t) = {}^{RL}I_a^{\alpha}f(t).$$

Rozdiel sa objavuje až pri zlomkovej derivácii. Zlomkové derivácie sú opäť definované pomocou zlomkového integrálu (2.11) ale s tým rozdielom, že najskôr funkciu $f(t)$ zderivujeme a až potom zintegrujeme.

Nech a, b, α sú reálne konštanty, kde $a < b$, $n = \max(0, \lfloor \alpha \rfloor + 1)$. Funkcia $f(t)$ je integrovateľná na $\langle a, b \rangle$ ak $n = 0$ a n -krát derivovateľná na $\langle a, b \rangle$. Caputova zlomková derivácia je potom definovaná pre $t \in \langle a, b \rangle$ vzťahom

$$\begin{aligned} {}^C D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \\ {}^C D_a^{-\alpha} f(t) &= {}^C I_a^\alpha f(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Na obrázku Obr. 2.3 je uvedená grafická reprezentácia Caputovej zlomkovej derivácie.



Obr. 2.3 Grafická reprezentácia Caputovej zlomkovej derivácie

Po určení celého čísla n , pre ktoré platí $n - 1 \leq \alpha < n$, začneme s operáciou (a) t.j. funkciu $f(x)$ zderivujeme n -krát. Operácia (b) je potom integrál zderivovanej funkcie $n - \alpha$ rádu. Tým sa odporúčame k výslednej zlomkovej derivácii, v našom prípade $\alpha = 2.3$.

Medzi Riemann-Liouvillovou a Caputovou zlomkovou deriváciou platí vzťah

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k - \alpha}, \quad (2.14)$$

za predpokladu, že platí

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1), \quad (2.15)$$

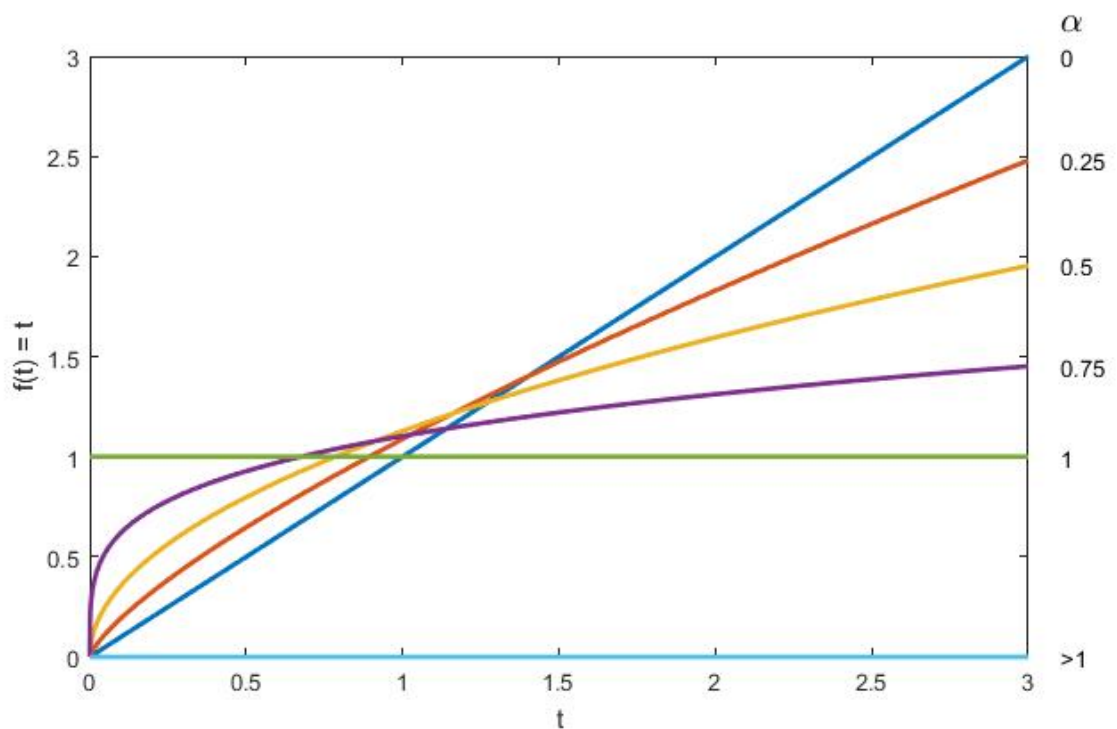
potom sa Caputova a Riemann-Liouvillova zlomková derivácia rovnajú

$${}^C D_a^\alpha f(t) = {}^{RL} D_a^\alpha f(t) .$$

Caputova derivácia rádu $\alpha > 0$ funkcie $f(t) = t^p$ pre $p \geq 0$ má tieto vlastnosti

$${}^C D_0^\alpha t^p = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, & p > n-1 \\ 0, & p \leq n-1 \end{cases}$$

takže ${}^C D_0^\alpha t^p$ a ${}^{RL} D_0^\alpha t^p$ sa rovnajú, ak $p > n-1$, ale v opačnom prípade je Caputova zlomková derivácia funkcie t^p rovná nule. Toto je jeden z dôvodov, prečo sú v niektorých prípadoch Caputove zlomkové derivácie uprednostňované pred Riemann-Liouvillovými.



Obr. 2.4 Caputove zlomkové derivácie funkcie $f(t) = t$ so zmenou rádu derivácie $\Delta\alpha = 0,25$

3 Základné vlastnosti zlomkového kalkulu

3.1 Linearita

Podobne ako derivácie celočíselného rádu sú zlomkové derivácie lineárnou operáciou, takže platí

$$D_a^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D_a^p f(t) + \mu D_a^p g(t),$$

kde λ, μ, α, a sú reálne konštanty a D_a^p značí akúkoľvek variáciu zlomkovej derivácie obsiahnutej v tejto práci. Dôkazy pre Riemann-Liouvilovu a Grünwald-Letnikovu zlomkovú deriváciu je možné nájsť v [10].

3.2 Skladanie Grünwald-Letnikových zlomkových operátorov

Pre skladanie Grünwald-Letnikovej zlomkovej derivácie ${}^{GL}D_a^\alpha$ a derivácie celočíselného rádu $\frac{d^n}{dt^n}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} ({}^{GL}D_a^\alpha f(t)) &= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-n+k}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau \\ &= {}^{GL}D_a^{\alpha+n} f(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Vezmime do úvahy operátory v opačnom poradí

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Porovnaním rovníc (3.1) a (3.2) prídeme k záveru, že

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}^{GL}D_a^\alpha f(t)) = {}^{GL}D_a^\alpha \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-n+k}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)} \quad (3.3)$$

Vzťah (3.3) nám hovorí o tom, že ${}^{GL}D_a^\alpha$ a $\frac{d^n}{dt^n}$ sú komutatívne operácie iba vtedy, keď pre $t = a$ zlomkovej derivácie máme

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.4)$$

Teraz si rozoberieme zlomkovú deriváciu rádu α zlomkovej derivácie rádu β :

$${}^{GL}D_a^\alpha ({}^{GL}D_a^\beta f(t))$$

V prípade $\alpha < 0$ a $\beta < 0$ platí

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha ({}^{GL}D_a^\beta f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-\beta - \alpha)} \int_a^t (t - \xi)^{-\beta - \alpha - 1} f(\xi) d\xi \\ &= {}^{GL}D_a^{\alpha + \beta} f(t) . \end{aligned} \quad (3.5)$$

A pre $\beta < 0$, $0 < n < \alpha < n + 1$

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha ({}^{GL}D_a^\beta f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} ({}^{GL}D_a^{\beta + \alpha - n - 1} f(t)) \\ &= {}^{GL}D_a^{\beta + \alpha} f(t) . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Z (3.5) a (3.6) vyplíva, že ak $\beta < 0$, potom pre akékoľvek reálne α platí

$${}^{GL}D_a^\alpha ({}^{GL}D_a^\beta f(t)) = {}^{GL}D_a^{\beta + \alpha} f(t) .$$

Teraz uvažujme $0 \leq m < \beta < m + 1$ a $\alpha < 0$

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha ({}^{GL}D_a^\beta f(t)) &= \frac{f^{(m)}(a)(t - a)^{-\beta - \alpha + m}}{\Gamma(-\beta - \alpha + m + 1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m - \alpha - \beta + 1)} \int_a^t \frac{f^{(m+1)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta + \alpha - m}} . \end{aligned}$$

Keď vezmeme do úvahy podmienku (3.4) dostaneme

$${}^{GL}D_a^\alpha ({}^{GL}D_a^\beta f(t)) = {}^{GL}D_a^{\beta + \alpha} f(t)$$

Konečne, pre $0 \leq m < \beta < m + 1$ a $0 \leq n < \alpha < n + 1$ a za predpokladu, že funkcia $f(t)$ splňuje podmienky (3.4), získame

$$\begin{aligned} {}^{GL}D_a^\alpha ({}^{GL}D_a^\beta f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left({}^{GL}D_a^{\alpha - n - 1} ({}^{GL}D_a^\beta f(t)) \right) \\ &= {}^{GL}D_a^{\beta + \alpha} f(t) . \end{aligned}$$

Navyše, keď $0 \leq m < \beta < m + 1$ a $0 \leq n < \alpha < n + 1$ a funkcia $f(t)$ splňuje podmienky

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, r - 1),$$

kde $r = \max(m, n)$ potom operátory zlomkovej derivácie ${}^{GL}D_a^\alpha$ a ${}^{GL}D_a^\beta$ sú komuta-

tívne

$${}^{GL}D_a^\alpha ({}^{GL}D_a^\beta f(t)) = {}^{GL}D_a^\beta ({}^{GL}D_a^\alpha f(t)) = {}^{GL}D_a^{\beta+\alpha} f(t) .$$

3.3 Skladanie Riemann-Liouvillových zlomkových operátorov

Pre skládanie operátorov Riemann-Liouvillového typu budeme potrebovať poznať nasledujúce vlastnosti.

Ak aplikujeme zlomkovú deriváciu rádu α na zlomkový integrál funkcie $f(t)$ rovnakého rádu zľava, dostaneme pôvodnú funkciu $f(t)$

$${}^{RL}D_a^\alpha ({}^{RL}I_a^\alpha f(t)) = f(t), \quad \alpha > 0. \quad (3.7)$$

Pre opačné poradie týchto operátorov však vzťah (3.7) neplatí.

Skládanie n -tej celočíselnej a zlomkovej derivácie rádu α , kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$, môžeme zapísať ako

$$\frac{d^n}{dt^n} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) = {}^{RL}D_a^{\alpha+n} f(t) .$$

Teraz si uveďme vzťahy pre skládanie zlomkových operátorov Riemann-Liouvillovho typu. Pre skládanie dvoch zlomkových integrálov platí

$${}^{RL}I_a^\alpha ({}^{RL}I_a^\beta f(t)) = {}^{RL}I_a^\beta ({}^{RL}I_a^\alpha f(t)) = {}^{RL}I_a^{\alpha+\beta} f(t), \quad a \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta > 0 ,$$

z čoho vyplíva, že zlomkové integrály sú komutatívne.

Ak nahradíme zlomkové integrácie zlomkovými deriváciami rádu α a β , kde $n - 1 < \beta \leq n$ dostaneme

$${}^{RL}D_a^\alpha ({}^{RL}D_a^\beta f(t)) = {}^{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^n {}^{RL}D_a^{\beta-k} f(t) \Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} .$$

Aplikáciu zlomkovej derivácie rádu α na zlomkový integrál rádu β môžeme popísať ako

$${}^{RL}D_a^\alpha ({}^{RL}I_a^\beta f(t)) = {}^{RL}D_a^{\alpha-\beta} f(t), \quad \alpha, \beta > 0 .$$

Zámenou poradia zlomkovej derivácie a integrácie rádov α a β , kde $m - 1 < \alpha \leq m$, dostaneme

$${}^{RL}I_a^\beta({}^{RL}D_a^\alpha f(t)) = {}^{RL}D_a^{-\beta+\alpha} f(t) - \sum_{k=1}^m {}^{RL}D_a^{\alpha-k} f(t) \Big|_{t=a} \frac{(t-a)^{\beta-k}}{\Gamma(\beta-k+1)} .$$

Pomocou vzťahu (2.14) môžeme povedať, že ak funkcia $f(t)$ splňuje podmienku (2.15), potom všetky vyššie uvedené vlastnosti platia aj pre Caputovu definíciu zlomkovej derivácie.

3.4 Leibnizovo pravidlo pre zlomkové derivácie

Uvedené vzťahy platia pre Grünwald-Letnikovu definíciu. Leibnizovo pravidlo pre zlomkové derivácie a integrály znie nasledovne: Ak $f(t)$ je spojitá funkcia na $[a, t]$ a $\varphi(t)$ má $(n+1)$ -tú deriváciu na $[a, t]$, potom je zlomková derivácia súčinu $\varphi(t)f(t)$ daná ako

$$D_a^\alpha(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^n \varphi^{(k)}(t) D_a^{\alpha-k} f(t) - R_n^\alpha(t) , \quad (3.8)$$

kde $n \geq \alpha + 1$ a

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi) (\tau-\xi)^n d\xi .$$

Sumu v (3.8) môžeme brať ako čiastočnú sumu nekonečnej rady a $R_n^\alpha(t)$ ako zvyšok danej rady.

Postupnou zmenou integračných premenných, najprv $\xi = \tau + \zeta(t-\tau)$ a potom $\tau = a + \eta(t-a)$ dostaneme nasledujúci výraz pre $R_n^\alpha(t)$

$$\begin{aligned} R_n^\alpha(t) &= \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f(\tau) d\tau \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(\tau + \zeta(t-\tau)) \zeta^n d\zeta \\ &= \frac{(-1)^n (t-a)^{n-\alpha+1}}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 \int_0^1 F_a(t, \zeta, \eta) d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

$$F_a(t, \zeta, \eta) = f(a + \eta(t-a)) \varphi^{(n+1)}(a + (t-a)(\zeta + \eta - \zeta\eta)) \zeta^n (1-\eta)^{n-\alpha} .$$

Z čoho vyplíva, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\alpha(t) = 0,$$

ak sú $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$ a ich derivácie spojité na $[a, t]$. Pod touto podmienkou môžeme Leibnizovo pravidlo zapísať ako

$$D_a^\alpha(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^{(k)}(t) D_a^{\alpha-k} f(t) . \quad (3.9)$$

Leibizovo pravidlo (3.9) je obzvlášť užitočné pre výpočet zlomkových derivácií funkcie, ktorá je súčinom polynómu a funkcie so známou zlomkovou deriváciou.

Za predpokladu, že funkcie $f(t)$ a $g(t)$ splňujú vyššie uvedené podmienky, môžeme povedať, že Leibnizovo pravidlo (3.9) platí aj pre Riemann-Liouvillovu definíciu.

4 Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia je nástrojom pre elegantné riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi. Umožňuje jednoduché odvodenie vstupných modelov. Zjednodušuje kvalitatívnu analýzu odozvy procesov na rôzne typy priebehov vstupných veličín.

Laplaceova transformácia funkcie $f(t)$ je definovaná vzťahom

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt . \quad (4.1)$$

Originál $f(t)$ z jej Laplaceovej transformácie $F(s)$ môžeme získať pomocou inverznej Laplaceovej transformácie nasledovne

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \operatorname{Re}(s) > c_0,$$

kde c_0 leží v pravej polovine absolútnej konvergencie Laplaceovho integrálu (4.1).

Uvedme si príklady Laplaceových transformácií niektorých funkcií

Pre $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $s^\alpha > |a|$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a} \right\} = t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-at^\alpha) . \quad (4.2)$$

Pre $\alpha \geq \beta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $s^{\alpha-\beta} > |a|$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a s^\beta)^{n+1}} \right\} = t^{\alpha(n+1)-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha)} t^{k(\alpha-\beta)} .$$

Laplaceova transformácia Mittag-Lefflerovej funkcie

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) e^{-st} dt = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad (\operatorname{Re}(s) > |a|^{1/\alpha}) \quad (4.3)$$

kde k značí rád derivácie Mittag-Lefflerovej funkcie.

Laplaceova transformácia konvolúcie

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

dvoch funkcí $f(t)$ a $g(t)$, které sú nulové pre $t < 0$, je rovná Laplaceovej transformácii týchto funkcii

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s) \quad (4.4)$$

za predpokladu, že obe funkcie $F(s)$ a $G(s)$ existujú. Túto vlastnosť využijeme pri Laplaceovej transformácii Riemann-Liouvillovho zlomkového integrálu.

Ďalšou užitočnou vlastnosťou, ktorú využijeme je vzorec pre Laplaceovu transformáciu derivácie celočíselného rádu n funkcie $f(t)$

$$\mathcal{L}\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) . \quad (4.5)$$

V nasledujúcich častiach o Laplaceových transformáciach zlomkových derivácií uvažujeme spodnú hranicu 0.

4.1 Laplaceova transformácia Riemann-Liouvillovej zlomkovej derivácie

Začneme najskôr Laplaceovou transformáciou Riemann-Liouvillovho integrálu. Na jej výpočet použijeme definíciu (2.11), čo môžeme zapísať ako konvolúciu funkcii $g(t) = t^{\alpha-1}$ a $f(t)$:

$${}^{RL}I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau = t^{\alpha-1} * f(t) .$$

Laplaceova transformácia funkcie $t^{\alpha-1}$ je

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}; s\} = \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} .$$

A tak, s využitím vzorca pre Laplaceovu transformáciu konvolúcie (4.4) získame Laplaceovu transformáciu Riemann-Liouvillovho integrálu [10]

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}I_0^\alpha f(t); s\} = \mathcal{L}\{{}^{GL}I_0^\alpha f(t); s\} = s^{-\alpha}F(s) . \quad (4.6)$$

Laplaceova transformácia Riemann-Liouvilovej zlomkovej derivácie je pre $\alpha > 0$:

$$\mathcal{L}\{{}^{RL}D_0^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}^{RL}D_0^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0},$$

$$n - 1 \leq \alpha < n .$$

Laplaceova transformácia Riemann-Liouvilovej zlomkovej derivácie je všeobecne známa [10]. Jej využitie v praxi je však obmedzené tým, že neexistuje fyzikálna interpretácia limitných hodnôt zlomkovej derivácie pri dolnej hranici $t = 0$.

4.2 Laplaceova transformácia Caputovej zlomkovej derivácie

K vytvoreniu vzorca pre Laplaceovu transformáciu Caputovej zlomkovej derivácie vyjadrieme Caputovu zlomkovú deriváciu (2.13) v tvare

$${}^C D_0^\alpha f(t) = {}^{RL}I_0^{(n-\alpha)} g(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t),$$

$$n - 1 < \alpha \leq n .$$

S využitím rovnice (4.6) pre Laplaceovu transformáciu Riemann-Liouvillovho zlomkového integrálu získame

$$\mathcal{L}\{{}^C D_0^\alpha f(t); s\} = s^{-(n-\alpha)} G(s) . \quad (4.7)$$

Keďže $g(t)$ je derivácia funkcie $f(t)$ celočíselného rádu, k vyjadreniu Laplaceovej transformácie Caputovej zlomkovej derivácie využijeme rovnice (4.5) a (4.7)

$$\mathcal{L}\{{}^C D_0^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0),$$

$$n - 1 < \alpha \leq n .$$

Keďže vzorec pre Laplaceovu transformáciu Caputovej zlomkovej derivácie zahŕňa hodnoty funkcie $f(t)$ a jej derivácie v dolnej hranici $t = 0$, pre ktoré existuje určitá fyzikálna interpretácia (napr. $f(0)$ je počiatočná pozícia, $f'(0)$ je počiatočná rýchlosť a $f''(0)$ je počiatočné zrýchlenie), môžeme očakávať, že tento prístup môže byť užitočný pre riešenie problémov vedúcich k lineárnym zlomkovým diferenciálnym rovniciam s konštantnými koeficientmi so sprievodnými počiatočnými podmienkami v klasickej forme.

4.3 Názorné příklady riešenia lineárnych zlomkových diferenciálnych rovníc

V tejto časti budeme využívať Caputove zlomkové derivácie (2.13) z dôvodu uvedenom v predchádzajúcej sekcii 4.2.

Príklad 1. Ako prvý príklad uvažujme Bagley-Torvikovu nehomogénnu diferenciálnu rovnicu s počiatočnými podmienkami

$${}^C D_0^2 y(t) + {}^C D_0^{\frac{3}{2}} y(t) + y(t) = 1 + t, \\ y(0) = y'(0) = 1 .$$

Táto rovnica je pomocou Laplaceovej transformácie prevedená na

$$s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{s^2 F(s) - sy(0) - y'(0)}{s^{\frac{1}{2}}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} , \\ s^2 F(s) - s - 1 + \frac{s^2 F(s) - s - 1}{s^{\frac{1}{2}}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} , \\ F(s)(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1) , \\ F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} .$$

S využitím inverznej Laplaceovej transformácie môžeme získať riešenie tohto problému $y(t) = 1 + t$.

Príklad 2. Majme lineárnu diferenciálnu rovnicu s počiatočnými podmienkami

$${}^C D_0^\alpha y(t) = y(t) + 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) = 0 .$$

Laplaceovou transformáciou získame

$$\frac{sF(s)}{s^{1-\alpha}} = F(s) + \frac{1}{s}, \\ F(s) = \frac{s-1}{s^\alpha - 1} .$$

S využitím (4.2) získame riešenie

$$y(t) = t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(t^\alpha) .$$

Príklad 3. Zoberme v úvahu nasledujúcu lineárnu diferenciálnu rovnicu s počiatočnými podmienkami

$${}^C D_0^\alpha y(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 .$$

Druhá počiatočná podmienka platí iba pre $\alpha > 1$.

$\mathcal{L}\{ {}^C D_0^\alpha y(t) \}$ môžeme získať pre 2 rôzne prípady α

1. Pre $\alpha < 1$

$$\mathcal{L}\{ {}^C D_0^\alpha y(t) \} = \frac{s^2 F(s) - s}{s^{2-\alpha}} = \frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}},$$

2. Pre $\alpha > 1$

$$\mathcal{L}\{ {}^C D_0^\alpha y(t) \} = \frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}},$$

ktoré sú si rovné. Teraz získame Laplaceovu transformáciu ako

$$\begin{aligned} \frac{sF(s) - 1}{s^{1-\alpha}} + F(s) &= 0, \\ F(s) &= \frac{s^{\alpha-1}}{1 + s^\alpha}. \end{aligned}$$

S využitím (4.2) získame riešenie problému

$$y(t) = E_\alpha(-t^\alpha).$$

Tieto príklady majú za úlohu oboznámiť čitateľa s riešením lineárnych zlomkových diferenciálnych rovníc a ukázať, že Laplaceova transformácia je účinný nástroj k získaniu ich analytického riešenia (viz [9]).

5 Využitie zlomkového kalkulu v praxi

Zlomkový kalkulus sa za dobu svojej existencie rozmohol takmer do všetkých oblastí vedy. Využíva sa napríklad pri popise viskoelasticity materiálov, pri modelovaní transportných procesov príbuzných difúzií, v biológii apod. V tejto časti si predstavíme zopár využití zlomkového kalkulu v praxi.

5.1 Viskoelasticita

Viskoelasticita materiálov súvisí so schopnosťou materiálov tmiť mechanické vibrácie. Pri harmonickom dynamickom namáhaní sa napätie a pomerná deformácia materiálu všeobecne mení s časom. Pomerná deformácia $\varepsilon(t)$ má pritom určité fázové oneskorenie voči napätiu $\sigma(t)$ pôsobiacemu na materiál.

Napätie $\sigma(t)$ je úmerné nultej derivácii pomernej deformácie $\varepsilon(t)$ pre pevné látky (Hookov zákon) a prvej derivácii pre Newtonovské kvapaliny:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t), \quad \sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt},$$

kde E a η sú konštanty.

Reálne materiály kombinujú vlastnosti týchto dvoch limitných prípadov a ležia niekde medzi ideálnou kvapaliou a ideálnou pevnou látkou. Teda je prirodzené predpokladať, že napätie môže byť úmerné zlomkovej derivácii pomernej deformácie pre reálne materiály [3, 10]

$$\sigma(t) = ED_0^\alpha \varepsilon(t), \quad (0 < \alpha < 1),$$

kde E a α sú konštanty závislé na voľbe materiálu.

Viskoelasticita sa zdá byť oblasťou s najrozsiahljším využitím zlomkových diferenciálnych a integračných operátorov. Hlavným dôvodom teoretického rozvoja tejto oblasti je široké využitie polymérov v rôznych technických oblastiach.

5.2 Teória riadenia

Vhodný spôsob, ako efektívnejšie regulovať systémy neceločíselného rádu je využitie zovšeobecneného PID regulátoru, ktorý budeme nazývať $PI^\lambda D^\mu$ regulátor [10]. Tento regulátor zahrnuje integračnú zložku rádu λ a derivačnú zložku rádu μ . Prenosová funkcia takého regulátoru má tvar

$$G_e(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_I s^{-\lambda} + K_D s^\mu \quad (\lambda, \mu > 0).$$

Rovnica pre výstup $PI^\lambda D^\mu$ regulátora v časovej oblasti je

$$u(t) = K_p e(t) + K_I D^{-\lambda} e(t) + K_D D^\mu e(t).$$

Ak dosadíme za rád integrácie $\lambda = 1$ a derivácie $\mu = 1$ dostaneme klasický PID regulátor. Oproti klasickému PID regulátoru je $PI^\lambda D^\mu$ regulátor flexibilnejší a poskytuje lepšie prispôsobenie dynamických vlastností systému riadenia (viz [10]).

5.3 Neurónový model zlomkového rádu

Charakteristický kmitavý pohyb očných buliev, ktorý môžeme pozorovať na začiatku a konci periódy otáčania hlavy sa nazýva nystagmus. Je to reflex, ktorý poskytuje vizuálnu fixáciu na stacionárne objekty počas otáčania hlavy. Pri začatí otáčania sa oči pomaly hýbu pri smeru rotácie a po dosiahnutí limity tohto pohybu sa oči rýchlo zamerajú na nový fixačný bod.

T. J. Anastasio [1] poukázal na nevýhody klasického modelu celočíselného rádu a navrhol model zlomkového rádu pomocou Laplaceovej transformácie

$$\frac{R(s)}{V(s)} = \frac{\tau_1(s\tau_2 + 1)s^{\alpha_d - \alpha_i}}{s\tau_1 + 1}, \quad (5.1)$$

kde $R(s)$ je Laplaceova transformácia rýchlosti vybíjania premotorických neurónov $r(t)$ a $V(s)$ je uhlová rýchlosť otáčania hlavy $v(t)$, τ_1 a τ_2 sú konštanty modelu, α_d je rád zlomkovej derivácie na premotorickej úrovni a α_i je rád integrácie v Anastasiovom modeli.

Vzťah medzi $r(t)$ a $v(t)$ získame pomocou inverznej Laplaceovej transformácie rovnice (5.1). Zavedme

$$G(s) = \frac{R(s)}{V(s)},$$

kde $G(s)$ je Laplaceova transformácia $g(t)$. Uvažujme, že $\alpha_i > \alpha_d$

$$G(s) = \frac{\tau_2 s^{\alpha_d - \alpha_i + 1}}{s + \tau_1^{-1}} + \frac{s^{\alpha_d - \alpha_i}}{s + \tau_1^{-1}},$$

a s využitím (4.3) dostaneme

$$g(t) = \tau_2 t^{\alpha_i - \alpha_d - 1} E_{1, \alpha_i - \alpha_d} \left(-\frac{t}{\tau_1} \right) + t^{\alpha_i - \alpha_d} E_{1, \alpha_i - \alpha_d + 1} \left(-\frac{t}{\tau_1} \right).$$

Potom

$$t(t) = \int_0^t g(t - \tau) v(\tau) d\tau.$$

Keďže tkanivá svalov a kĺbov v celom pohybovom ústrojenstve sa správajú ako viskoelastické materiály, dynamika zlomkového rádu môže byť vo všeobecnosti vlastnosťou motorického systému.

6 Geometrická interpretácia zlomkového kalkulu

Vo všeobecnosti je známe, že integrály a derivácie celočíselného rádu majú jasnú fyzikálnu a geometrickú interpretáciu, čo značne uľahčuje ich využitie na riešenie problémov v rôznych vedných oblastiach. V prípade zlomkových integálov a derivácií to však neplatí. Od vzniku myšlienky integrácie a derivácie ľubovoľného rádu neexistovala akákoľvek prijateľná geometrická a fyzikálna interpretácia týchto operácií. V tejto časti sa oboznámime s geometrickou a fyzikálnou interpretáciou podľa I. Podlubného (viz [11]).

Vezmime Riemann-Liouvillov zlomkový integrál (2.11) rádu α

$${}^{RL}I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (6.1)$$

a zapíšme ho vo forme

$$\begin{aligned} {}^{RL}I_0^\alpha f(t) &= \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau) \\ g_t(\tau) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[t^\alpha - (t - \tau)^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Teraz uvažujme integrál (6.2) pre pevnú hodnotu premennej t . Vezmime osi τ, g a f . V rovine (τ, g) vykreslíme funkciu $g_t(\tau)$ pre $0 \leq \tau \leq t$. Pozdĺž získanej krivky budeme "stavať plot" o menšej výške $f(\tau)$, takže horná hrana "plotu" je trojrozmerná krivka $(\tau, g_t(\tau), f(\tau))$, $0 \leq \tau \leq t$. Tento "plot" môže byť premietnutý na 2 roviny (viz Obr. 6.1). Obsah oblasti premietnutia tohto "plotu" do roviny (τ, f) odpovedá hodnote integrálu

$${}^{RL}I_t^1 f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (6.3)$$

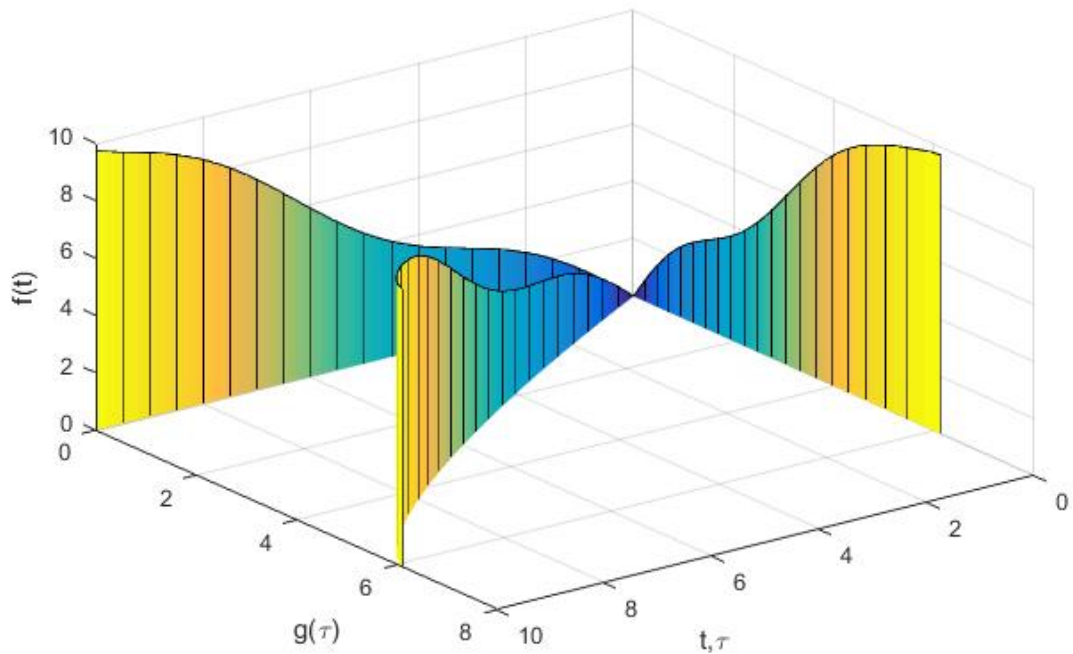
Oblasť projekcie do roviny (g, f) odpovedá hodnote integrálu (6.1) resp. (6.2).

Inými slovami, tento "plot" vrhá dva tieň na dve roviny. Prvý z nich, tieň na rovinu (τ, f) , je plocha pod krivkou $f(\tau)$, čo je štandardná geometrická interpretácia integrálu (6.3). Tieň na rovinu (g, f) je geometrická interpretácia zlomkového integrálu (6.1) pre pevnú hodnotu premennej t .

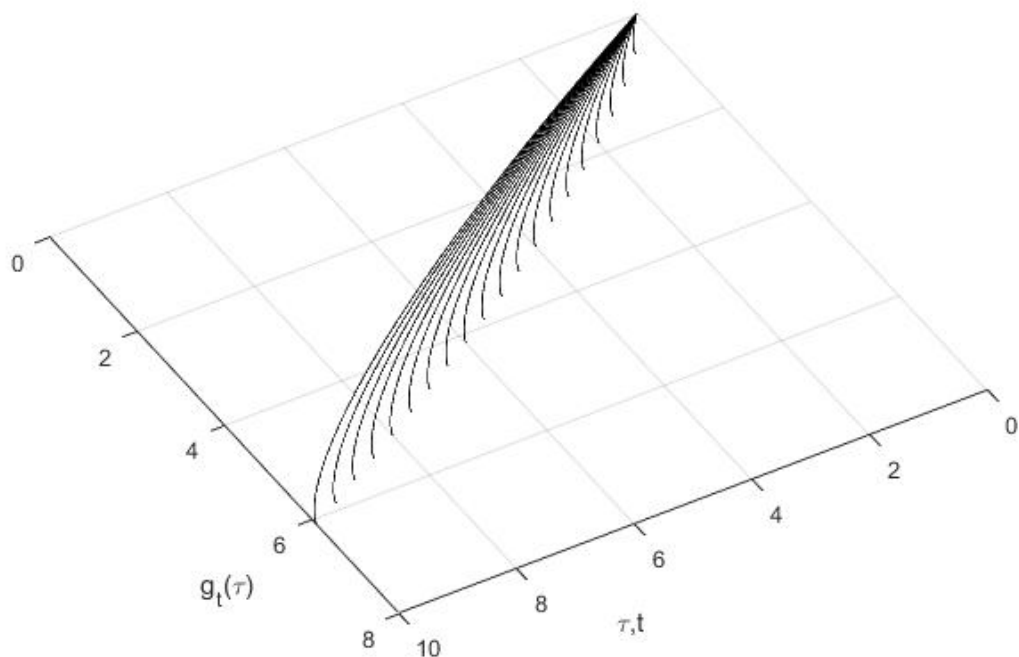
Je zrejmé, že pre $g_t(\tau) = \tau$ sú oba tieň totožné. To dokazuje, že klasický určitý integrál je špecifický prípad Riemann-Liouvillovho zlomkového integrálu dokonca aj z geometrického hľadiska.

S meniacim sa t sa súbežne mení aj dĺžka a , v určitom zmysle, tvar nášho "plotu".

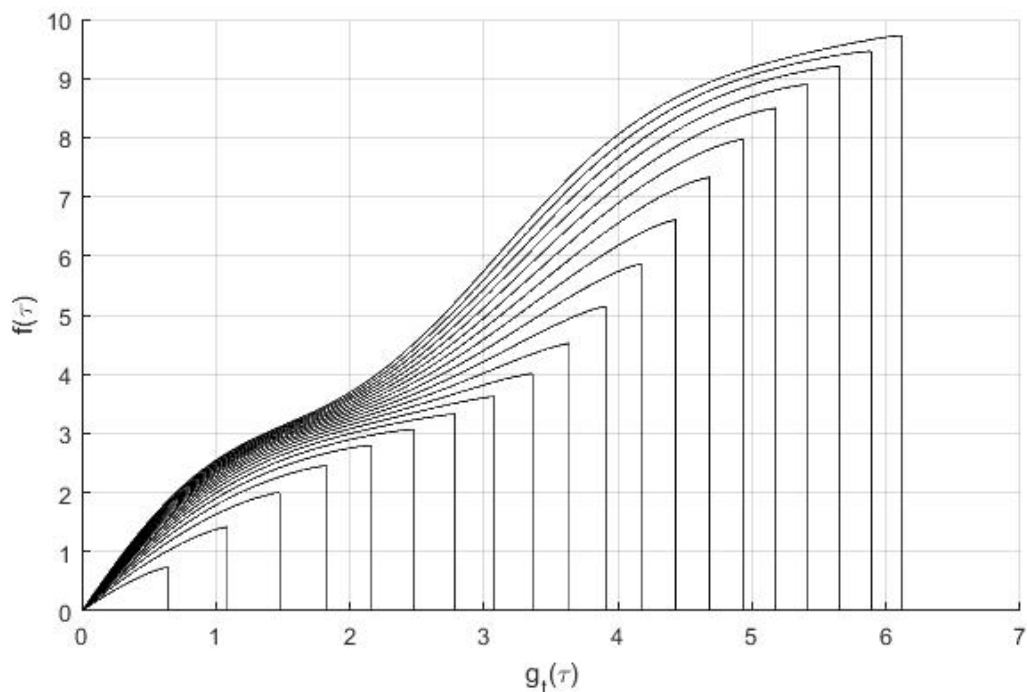
Pre ilustráciu je na Obr. 6.2 zobrazená zmena tvaru krivky "plotu" a na Obr. 6.3 je vykreslený tieň na rovine (g, f) pre rôzne hodnoty t .



Obr. 6.1 "Plot" a jeho tieň ${}^{RL}I_0^1 f(t)$ a ${}^{RL}I_0^\alpha f(t)$ pre $f(t) = t + 0.5\sin(t)$, $\alpha = 0.75$



Obr. 6.2 Proces zmeny základného tvaru "plotu", $\Delta t = 0.5$

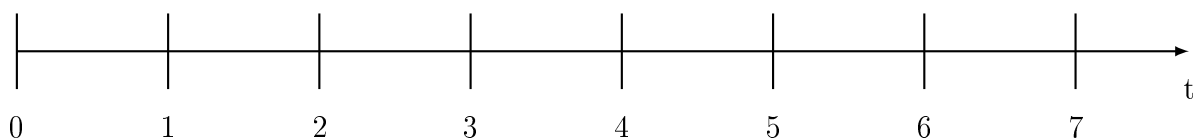


Obr. 6.3 Snímky tieňov "plotu" na rovine $(g_t(\tau), f(\tau))$ pre ${}^{RL}I_0^\alpha f(t)$, $f(t) = t + 0.5\sin(t)$, $\alpha = 0.75$ s časovým intervalom $\Delta t = 0.5$ medzi snímkami

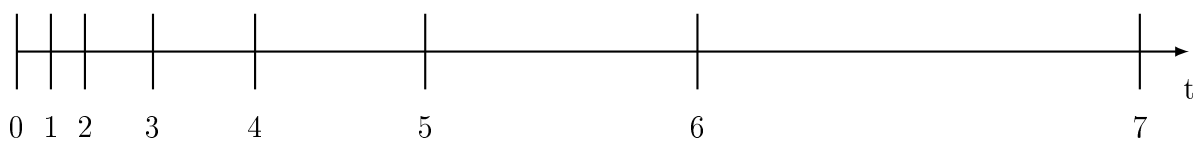
Vyššie popísaná geometrická interpretácia je v podstate založená na pridaní tretej dimenzie $g_t(\tau)$ do klasickej dvojice $\tau, f(\tau)$. Ak vezmeme do úvahy τ ako čas, potom funkcia $g_t(\tau)$ môže byť interpretovaná ako "deformovaná" časová škála.

Vynález diferenciálneho a integrálneho kalkulu a jeho súčasné využitie je hlavným dôvodom, prečo pokračujeme v užívaní homogénneho, rovnomerne plynúceho času.

Čas je väčšinou zobrazovaný s využitím časovej osi, kde geometricky rovnomerné intervaly časovej osi odpovedajú rovnomerným časovým intervalom Obr. 6.4.



Obr. 6.4 Homogénna časová os



Obr. 6.5 Nehomogénna časová os

Tento predpoklad však nemožno experimentom dokázať ani vyvrátiť. Je možné merať a porovnať dve dĺžky geometrických intervalov, pretože sú k meraniu dostupné súčasne. Dva časové intervaly však nemôžu byť porovnané, pretože nie sú dostupné na meranie alebo pozorovanie súčasne. G. Clemence napísal [6]:

"Meranie času je v podstate proces počítania. Akýkoľvek opakujúci sa jav, ktorého výskyt možno počítať, je v skutočnosti mierou času."

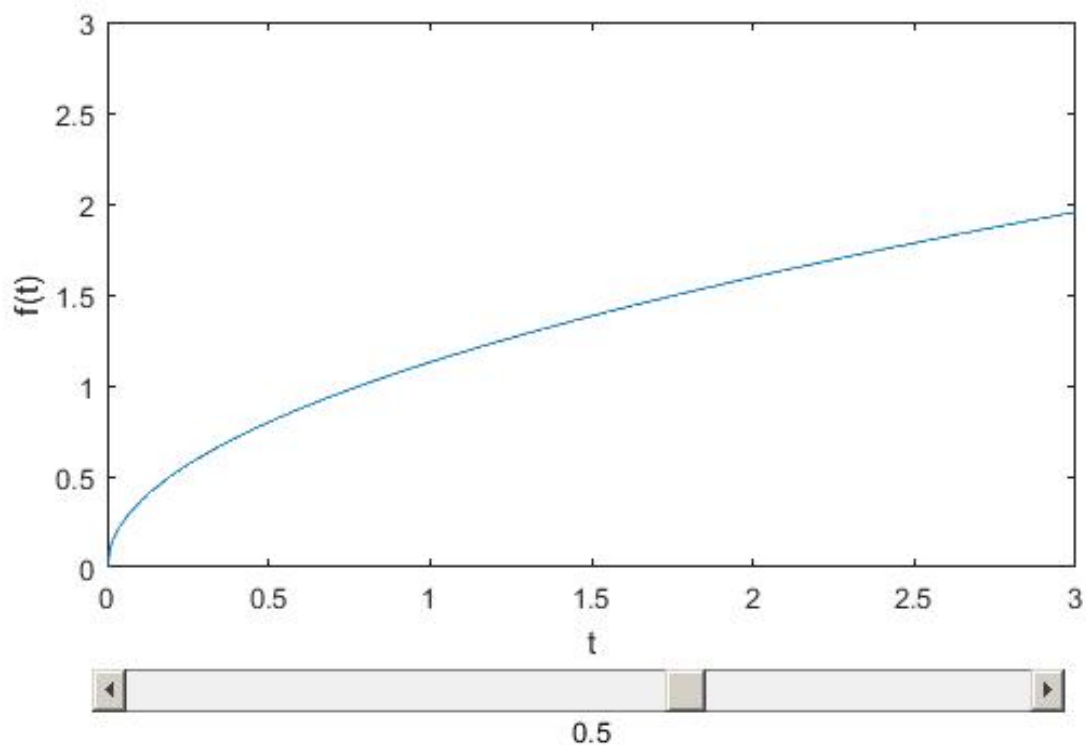
Obr. 6.4 a 6.5 zobrazujú "tiky hodín", ktoré dokážeme zaznamenať, iba obrazne. Môžeme ich interpretovať, ako keby existovala akási *absolútna*, alebo *kozmickejšia* časová os, ku ktorej môžeme prirovnať individuálny homogénny čas, reprezentovaný nejakými "tikmi hodín".

Celý integračný a derivačný kalkulus je založený na matematickom (homogénnom, rovnako tečúcom) čase. Bolo by veľmi komplikované zmeniť tento stav, pričom zatiaľ ani neexistuje žiadna alternatíva ku klasickému kalkulu. Navyše to pravdepodobne ani nie je potrebné. Môžeme si skrátka uvedomiť, že klasický kalkulus poskytuje nástroje na opis dynamických vlastností kozmického času, ktorý - podľa fyzikov - je nehomogénny.

Môžeme povedať, že expanzia vesmíru znamená, že ani priestorová ani časová mierka nie je homogénna. Obe sú dynamické. Pre opis nehomogénneho času môže byť použitá ideálna homogénna časová mierka. Tent prístup nie je nový. Už bol použitý v teórii relativity pre popis skracovania časových intervalov. To znamená, že v skutočnosti sú brané do úvahy dve časové mierky súčasne: ideálny, rovnomerne tečúci čas a kozmický (nehomogénny) čas. Takže ideálny model rovnomerne tečúceho homogénneho času môže byť považovaný za aproximáciu kozmického času.

7 Vizualizácia zlomkového kalkulu

Všetky grafy obsiahnuté v tejto práci boli vytvorené v programe MATLAB. Na CD odovzdanom spolu s touto prácou sa nachádzajú m-funkcie vybraných funkcií z tabuliek Tab. 2.1 a Tab. 2.2. V nich sa dajú nastaviť parametre danej funkcie a minimálna a maximálna hodnota rádu derivácie/integrácie α (záporné hodnoty α značia integráciu). Pod samotným grafom je posuvník, pomocou ktorého môžeme meniť hodnotu α medzi minimálnou a maximálnou hodnotou, pričom graf sa mení v reálnom čase pri zmene hodnoty α . Tieto grafy by mali slúžiť k ľahšiemu pochopeniu problematiky zlomkového kalkulu. Ako ukážka m-funkcie je na Obr. 7 zobrazená funkcia $f(t) = t$ s $\alpha \in \langle -2, 2 \rangle$



Obr. 7.1 Graf funkcie $f(t) = t$ s nastaviteľnou hodnotou α pomocou posuvníku

ZÁVER

V tejto práci sme opísali základné definície zlomkového kalkulu, ktoré našli svoje využitie v rôznych vedných oblastiach, ako napríklad teória riadenia, teória viskoelasticity alebo neurónový model zlomkového rádu. Tým to však nekončí. Zlomkový kalkulus stále nachádza nové oblasti k svojmu uplatneniu v praxi. V rámci práce boli vytvorené krokové grafy zlomkových derivácií vybraných funkcií, čo môže pomôcť k lepšiemu pochopeniu problematiky zlomkového kalkulu. Predstavili sme si základ metódy zlomkovej Laplaceovej transformácie a ukázali si názorné príklady riešenia lineárnych zlomkových diferenciálnych rovníc. Pri ich riešení sa prejavila ako najužitočnejšia definícia Caputového typu. Existujú rôzne geometrické interpretácie zlomkového kalkulu, pričom v tejto práci sme sa zamerali na interpretáciu podľa I. Podlubného. V nej sme si ukázali vzťah medzi zlomkovou a celočíselnou integráciou a popísali si interpretáciu zložky $g(t)$ ako nehomogénneho časového merítka.

SEZNAM LITERATURY

- [1] Thomas J. Anastasio. “The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons”. In: *Biological Cybernetics* 72.1 (1994), s. 69–79. ISSN: 1432-0770. DOI: 10.1007/BF00206239.
- [2] Oldham K. B. a Spanier J. *Fractional Calculus (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 111)*. Elsevier Science, 1974. ISBN: 0125255500.
- [3] G.W Scott Blair. “The role of psychophysics in rheology”. In: *Journal of Colloid Science* 2.1 (1947), s. 21–32. ISSN: 0095-8522. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0095-8522\(47\)90007-X](http://dx.doi.org/10.1016/0095-8522(47)90007-X).
- [4] Artin E. *The Gamma Function (Dover Books on Mathematics)*. Dover Publications, 2015. ISBN: 0486789780.
- [5] Lacroix S. F. *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, Tome Troisième, seconde édition*. Paris: Mme. Ve Courcier, 1819, s. 409–410.
- [6] Clemence G. “Time and Its Measurement”. In: *The American Scientist* 40 (1952).
- [7] Abel N. H. *Opløsning af et Par Opgaver ved Hjælp af bestemte Integraler*. Reprinted in [8]. *Mag. for naturvidenskaberne*, 1823.
- [8] Abel N. H. *OEuvres completes de Niels Henrik Abel (French Edition)*. Johnson Reprint Corp, 1973. ISBN: 0384001033.
- [9] Podlubny I. “The Laplace Transform Method for Linear Differential Equations of the Fractional Order”. In: *eprint arXiv:funct-an/9710005*. Říj. 1997.
- [10] Podlubny I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Academic Press, 1998. ISBN: 0125588402.
- [11] Podlubny I. “Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation”. In: *ArXiv Mathematics e-prints* (říj. 2001). eprint: [math/0110241](https://arxiv.org/abs/math/0110241).
- [12] A.A. Kilbas, H. M. Srivastava a J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Volume 204 (North-Holland Mathematics Studies)*. Amsterdam. Elsevier Science, 2006. ISBN: 0444518320.
- [13] Bateman Manuscript Project et al. *Higher transcendental functions*. Higher Transcendental Functions zv. 3. McGraw-Hill, 1953.
- [14] Miller K. S. a Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley-Interscience, 1993. ISBN: 0471588849.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1.1	Pribeh Gamma funkcie $\Gamma(z)$ v rozsahu $z \in \langle -5, 4 \rangle$	10
Obr. 1.2	Pribeh inverznej Gamma funkcie v rozsahu $z \in \langle -5, 4 \rangle$	11
Obr. 1.3	Jednparametrová Mittag-Lefflerova funkcia pre rôzne hodnoty α . . .	13
Obr. 1.4	Dvojparametrová Mittag-Lefflerova funkcia pre $\alpha = 1$ a rôzne hodnoty β	13
Obr. 2.1	Grafická reprezentácia Riemann-Liouvilovej zlomkovej derivácie . . .	17
Obr. 2.2	Riemann-Liouvilové zlomkové derivácie funkcie $f(t) = t$ so zmenou rádu derivácie $\Delta\alpha = 0,25$	18
Obr. 2.3	Grafická reprezentácia Caputovej zlomkovej derivácie	20
Obr. 2.4	Caputove zlomkové derivácie funkcie $f(t) = t$ so zmenou rádu derivácie $\Delta\alpha = 0,25$	21
Obr. 6.1	"Plot" a jeho tieň ${}^{RL}I_0^1 f(t)$ a ${}^{RL}I_0^\alpha f(t)$ pre $f(t) = t + 0.5\sin(t)$, $\alpha = 0.75$	34
Obr. 6.2	Proces zmeny základného tvaru "plotu", $\Delta t = 0.5$	34
Obr. 6.3	Snímky tieňov "plotu" na rovine $(g_t(\tau), f(\tau))$ pre ${}^{RL}I_0^\alpha f(t)$, $f(t) = t + 0.5\sin(t)$, $\alpha = 0.75$ s časovým intervalom $\Delta t = 0.5$ medzi snímkami	35
Obr. 6.4	Homogénna časová os	35
Obr. 6.5	Nehomogénna časová os	35
Obr. 7.1	Graf funkcie $f(t) = t$ s nastaviteľnou hodnotou α pomocou posuvníku	37

SEZNAM TABULEK

Tab. 2.1	Derivácie s dolnou hranicou $-\infty$, t.j. ${}^{RL}D_{-\infty}^{\alpha}f(t)$	19
Tab. 2.2	Derivácie s dolnou hranicou 0, t.j. ${}^{RL}D_0^{\alpha}f(t)$ pre $t > 0$	19