Užití nekonečných řad při řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Michal Ostřanský

Bakalářská práce
2017

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2016/2017

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Michal Ostřanský**
Osobní číslo:	**A13698**
Studijní program:	**B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Informační a řídicí technologie**
Forma studia:	**kombinovaná**

Téma práce:	**Užití nekonečných řad při řešení obyčejných diferenciálních rovnic**
Téma anglicky:	**Solving Ordinary Differential Equations Using the Infinity Series**

Zásady pro vypracování:

1. **Definujte základní pojmy z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Uveďte analytické metody řešení pro vybrané typy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a vyšších řádů.**
2. **Nastudujte problematiku nekonečných funkčních řad. Zaměřte se na mocninné řady a Fourierovy řady.**
3. **Popište a na konkrétních příkladech vysvětlete, jak lze řešit obyčejné diferenciální rovnice pomocí mocninných řad. Zaměřte se na rovnice prvního řádu i na rovnice vyšších řádů.**
4. **Vysvětlete a ukažte na příkladech použití Fourierových řad pro řešení lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu. Uveďte, kdy je vhodné tuto metodu použít.**
5. **Porovnejte způsoby řešení pomocí mocninných řad a Fourierových řad s klasickými analytickými metodami řešení.**

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. **BRONSON, Richard, Gabriel B COSTA a Richard BRONSON. Schaum's outlines of differential equations. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2006, xiv, 385 p. ISBN 0071456872.**
2. **WEIR, Maurice D, Joel HASS, George B THOMAS a Ross L FINNEY. Thomas' calculus. 11th ed., media upgrade. Boston: Pearson Addison Wesley, 2008, 1 v. (various pagings). ISBN 032148987x.**
3. **DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. Nekonečné řady. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1998, iv, 113 s. ISBN 80-210-1949-2.**
4. **KUFNER, Alois a Jan KADLEC. Fourierovy řady. 1. vyd. Praha: Academia, 1969, 346 s.**
5. **REKTORYS, Karel. Přehled užité matematiky. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, xxiii, 720 s. ISBN 80-7196-179-5.**

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Jana Řezníčková, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **24. února 2017**

Termín odevzdání bakalářské práce: **24. května 2017**

Ve Zlíně dne 24. února 2017

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ
Fakulta aplikované informatiky
L.S.

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne 24.5.2017

....

podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cílem bakalářské práce je ukázat možnosti použití nekonečných řad při řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Hlavní pozornost bude věnována aplikacím Taylorovy a Fourierovy řady. Práce bude doplněna neřešenými příklady s výsledky.

Klíčová slova:

obyčejná diferenciální rovnice, obecné řešení, partikulární řešení, mocninná řada, Fourierova řada

ABSTRACT

The aim of the bachelor thesis is to show possibilities of using infinity series in solving ordinary differential equations. The main focus will be on Taylor and Fourier series applications. The thesis will be supplemented with unsolved problems with results.

Keywords:

ordinary differential equation, general solution, particular solution, power series, Fourier series

Děkuji tímto vedoucí mé bakalářské práce paní Mgr. Janě Řezníčkové, Ph.D. za všechen čas, připomínky a rady, které mi věnovala během konzultací.

OBSAH

ÚVOD

Historie diferenciálních rovnic sahá až do sedmnáctého století a je obvykle spojena se jmény jako Isaac Newton (1643-1727), Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) a počátky infinitezimálního počtu. V dnešní době hrají diferenciální rovnice významnou roli v oborech jako strojírenství, fyzika, ekonomie a biologie.

Teorie nekonečných číselných řad vznikla ve druhé polovině 17. století spolu s utvářením infinitezimálního počtu. Mnohé myšlenky zrály řadu století, než se přiblížily dnešní podobě. V průběhu vývoje se někteří matematikové dopustili při počítání řady omylů, zejména v době, kdy existovala jakási hrůza z nekonečna. Tímto problémem se od počátku zabývali nejenom matematikové, ale i filozofové.

Tato práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. V první kapitole je uveden přehled základních pojmů z teorie diferenciálních rovnic a typů jejich řešení. Druhá kapitola se již zabývá konkrétními druhy obyčejných diferenciálních rovnic (separovatelná ODR, lineární ODR 1. řádu a lineární ODR vyšších řádů) a způsoby, jak je řešit (metoda separace proměnných, variace konstanty, neurčitých koeficientů). Třetí kapitola obsahuje základní definice z teorie nekonečných řad se zaměřením na mocninné řady (Taylorova a Maclaurinova řada) a Fourierovy řady. Ve čtvrté kapitole jsou již na konkrétních příkladech ukázány způsoby řešení ODR pomocí mocninných řad. Kapitola pátá a zároveň poslední obsahuje praktické úlohy řešení lineárních ODR pomocí Fourierových řad.

K pochopení obsahu této bakalářské práce jsou vyžadovány základní znalosti diferenciálního a integrálního počtu funkce jedné proměnné.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE DR

Diferenciální rovnicí (DR) rozumíme vztah mezi neznámou funkcí a derivacemi této funkce.

Obyčejnou diferenciální rovnicí (ODR) nazýváme rovnici, v níž je hledaná funkce funkcí jedné proměnné a zároveň se v této rovnici vyskytují derivace této funkce.

Parciální diferenciální rovnicí (PDR) nazýváme rovnici, v níž je hledaná funkce funkcí více proměnných (v rovnici tedy vystupují parciální derivace této funkce).

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace hledané funkce obsažené v této rovnici.

1.1 ODR 1. řádu

Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

kde F je reálná funkce tří proměnných v implicitním vyjádření, y je funkce jedné reálné proměnné x, y' je derivace funkce y a x je nezávislá proměnná.

V případě, je-li ODR (1) rozřešena vzhledem k y', dostaneme rovnici ve tvaru

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

kde f je reálná funkce dvou proměnných v explicitním vyjádření.

Řešením (nebo též **integrálem**) rovnice (1), resp. (2) na intervalu I rozumíme takovou funkci $y = y(x)$, která je diferencovatelná na I a po dosazení identicky splňuje rovnost (2) na I.

Úloha najít řešení rovnice (1), resp. (2) splňující v bodě $x_0 \in I$ **počáteční podmínku**

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

kde x_0, y_0, jsou reálná čísla, se nazývá **počáteční** (**Cauchyova**) **úloha**. Řešení počáteční úlohy se nazývá **partikulární řešení** rovnice (1), resp. (2).

1.2 ODR vyšších řádů

Obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu s neznámou y rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{4}$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných v implicitním vyjádření, y je funkce jedné reálné proměnné x, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ jsou derivace funkce y a x je nezávislá proměnná.

V případě, je-li ODR (4) rozřešena vzhledem k nejvyšší derivaci, dostaneme rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}), \tag{5}$$

kde f je reálná funkce $n + 1$ proměnných v explicitním vyjádření.

Řešením čili **integrálem** (také partikulárním integrálem nebo integrální křivkou) rovnice (4), resp. (5), nazýváme každou funkci $y = y(x)$, která má na uvažovaném intervalu I derivace až do n-tého řádu včetně a vyhovuje dané rovnici, tj. po dosazení této funkce a jejích derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu I identickou rovnost.

Nechť $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ jsou konstanty. Úloha najít řešení rovnice (4), resp. (5), které vyhovuje **počáteční podmínkám**

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1, \qquad \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

se nazývá **počáteční úloha** (nebo také **Cauchyova úloha**, **počáteční problém**).

1.3 Klasifikace řešení ODR

Řešení rovnice (4), resp. (5), nazýváme

- **obecné řešení**, jestliže jej lze vyjádřit ve tvaru

  $$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0 \ \text{ nebo } \ y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n),$$

  kde $C_1, \dots, C_n$ jsou konstanty,

- **partikulární řešení**, lze-li jej získat z obecného řešení pro konkrétní hodnoty konstant $C_1, \dots, C_n$, které vypočteme nebo zvolíme.

K vypracování této kapitoly byly použity zdroje: [5], [6], [7], [8].

2 PŘEHLED ZÁKLADNÍCH TYPŮ ODR

V následující kapitole probereme přehled základních typů obyčejných diferenciálních rovnic a metody jejich řešení.

První kapitola je věnována obyčejným diferenciálním rovnicím 1. řádu se separovanými proměnnými.

Druhá kapitola se zabývá lineárními obyčejnými diferenciálními rovnicemi 1. řádu a je zde popsána metoda variace konstanty umožňující výpočet partikulárního řešení diferenciální rovnice nehomogenní.

Ve třetí kapitole jsou vyšetřovány vlastnosti lineárních obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů s konstantními koeficienty, a to jak pro rovnice homogenní, tak i pro rovnice nehomogenní. Dále jsou zde zmíněny některé metody řešení těchto rovnic.

2.1 ODR se separovanými proměnnými

ODR ve tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{6}$$

kde f, g jsou spojité funkce na otevřených intervalech, nazýváme **obyčejnou diferenciální rovnicí se separovanými proměnnými**.

K vyřešení rovnice (6) použijeme metodu: **Separace proměnných**

1) Nechť $g(y) \neq 0$ na uvažovaném intervalu
   - Derivaci y' formálně nahradíme podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$
   $$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y).$$
   - Násobením a dělením převedeme rovnici na tvar, který obsahuje na každé straně pouze jednu proměnnou (odseparujeme proměnné). Zlomek $\frac{dy}{dx}$ uvažujme jako podíl dvou výrazů
   $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

- Pak obě strany zintegrujeme podle proměnné x, resp. y

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

- Dostaneme řešení (6) v implicitním tvaru

$$G(y) = F(x) + C,$$

  kde $G(y)$ je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g(y)}$, $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ a $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.
- Pokud to řešení umožňuje, převedeme jej do explicitního tvaru (tj. vyjádříme y).
- V případě, že je zadaná počáteční podmínka, tak ji dosadíme do obecného řešení a zjistíme hodnotu konstanty C. Tu následně dosadíme do obecného řešení a získáme tak řešení partikulární.

2) Má-li rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, \dots, k_n$, jsou konstantní funkce $y = k_1, \dots, y = k_n$ řešeními rovnice (6). Pokud je možné některé z konstantních řešení obdržet vhodnou volbou konstanty ve vzorci pro obecné řešení, zahrneme toto konstantní řešení do řešení obecného.

2.2 Lineární ODR 1. řádu

ODR ve tvaru

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{7}$$

kde $a(x), b(x)$ jsou spojité funkce na otevřených intervalech, **nazýváme lineární obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu**.

Rovnice (7) se nazývá:

1) **homogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu**, je-li $b(x) \equiv 0$,
2) **nehomogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu**, je-li $b(x) \neq 0$.

K vyřešení rovnice (7) použijeme metodu: **Variace konstanty**

Metodu provedeme ve dvou krocích.

1) Nejprve rovnici zhomogenizujeme, tedy položíme $b(x) = 0$.

- Dostaneme **homogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnici příslušnou** (**přidruženou**) k rovnici (7) ve tvaru

$$y' = a(x)y, \tag{8}$$

v níž odseparujeme proměnné (pokud $y \neq 0$). Metodou separace proměnných nalezneme **obecné řešení** y_H homogenní rovnice (8) ve tvaru

$$y_H = C\mathrm{e}^{\int a(x)dx}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

- Volba $C = 0$ zahrnuje případ $y = 0$, který je také řešením (8).

2) Hledáme řešení původní nehomogenní rovnice (7). Ukazuje se, že obecné řešení rovnice (7) je také tvaru (9), ale s tím rozdílem, že C již není konstanta, ale jistá funkce proměnné x. Toto řešení má tedy tvar

$$y = C(x)\mathrm{e}^{\int a(x)dx}. \tag{10}$$

- Funkci $C(x)$ nalezneme tak, že vztah (10) i s jeho derivací (jedná se o derivaci součinu)

$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{\int a(x)dx} + C(x)a(x)\mathrm{e}^{\int a(x)dx}$$

dosadíme do původní nehomogenní rovnice (7). Po dosazení (členy obsahující $C(x)$ se musí vždy odečíst, jinak jsme při výpočtu udělali chybu) vyjde

$$C'(x)\mathrm{e}^{\int a(x)dx} = b(x),$$

neboli

$$C'(x) = b(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)dx}.$$

- Integrací dostaneme

$$C(x) = \int b(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)dx}dx + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

- Dosazením této funkce $C(x)$ do vztahu (10) dostáváme **obecné řešení nehomogenní lineární obyčejné diferenciální rovnice** (7).

2.3 Lineární ODR vyšších řádů

ODR tvaru

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \qquad (11)$$

kde $a_0(x), \dots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou funkce (proměnné x) definované a spojité na intervalu I, $a_n \neq 0$, se nazývá **lineární obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu** (zkráceně **lineární ODR n-tého řádu**).

Je-li $f(x) = 0$ pro každé $x \in I$, mluvíme o **homogenní lineární ODR n-tého řádu**.

Je-li $f(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$, jedná se o **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu**.

2.3.1 Lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

ODR tvaru

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x), \qquad (12)$$

kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0, f(x)$ je funkce spojitá a definovaná na intervalu I, se nazývá **lineární obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty** (zkráceně **lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty**).

Je-li $f(x) = 0$ pro každé $x \in I$, mluvíme o **homogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty**.

Je-li $f(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$, jedná se o **nehomogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty**.

Řešením rovnice (12) na intervalu I rozumíme funkci, která má na I spojité derivace až do 2. řádu a po dosazení identicky splňuje rovnost (13) na I.

Úloha najít řešení rovnice (12) splňující v bodě $x_0 \in I$ **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \qquad (13)$$

kde x_0, y_0, y_1 jsou reálná čísla, se nazývá **počáteční (Cauchyova) úloha**. Řešení počáteční úlohy se nazývá **partikulární řešení** rovnice (12).

2.3.2 Homogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

ODR tvaru

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \tag{14}$$

kde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$, se nazývá **homogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty**.

Dvojice řešení $y_1(x), y_2(x)$ homogenní rovnice (14), která jsou lineárně nezávislá na intervalu I, se nazývá **fundamentální systém řešení** rovnice (14).

Nechť funkce $y_1(x), y_2(x)$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní lineární ODR 2. řádu (14). Pak každé řešení $y(x)$ této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{15}$$

kde C_1, C_2 jsou vhodné reálné konstanty. To znamená, že vztah (15) vyjadřuje obecné řešení rovnice (14) na intervalu I.

Kvadratická rovnice

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{16}$$

kde λ je konstanta, se nazývá **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice (14). Tato rovnice vznikla náhradou $y'' = \lambda^2, y' = \lambda$ a $y = \lambda^0$ z rovnice (14).

K nalezení fundamentálního systému řešení rovnice (14) musíme nejdříve zjistit kořeny charakteristické rovnice.

Mohou nastat následující tři případy.

1) Charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny λ_1, λ_2. Pak má diferenciální rovnice (14) fundamentální systém
$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$
s obecným řešením ve tvaru
$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
2) Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen λ. Pak má diferenciální rovnice (14) fundamentální systém
$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$$

s obecným řešením ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = (C_1 + xC_2)e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = a \pm ib, b \neq 0$. Pak má diferenciální rovnice (14) fundamentální systém

$$y_1(x) = e^{ax} \cos bx\,, \qquad y_2(x) = e^{ax} \sin bx$$

s obecným řešením ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2.3.3 Homogenní lineární ODR vyšších řádů s konstantními koeficienty

ODR tvaru

$$a_n y^{(n)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0, \tag{17}$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, se nazývá **homogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Řešení $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ homogenní rovnice (17), která jsou lineárně nezávislá na intervalu I, nám dávají **fundamentální systém řešení** rovnice (17).

Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní lineární ODR n-tého řádu (17). Pak každé řešení $y(x)$ této rovnice lze psát jednoznačně ve tvaru

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \tag{18}$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_n$ jsou vhodné reálné konstanty. To znamená, že vztah (18) vyjadřuje obecné řešení rovnice (17) na intervalu I.

Rovnice

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{19}$$

kde λ je konstanta, se nazývá **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice (17). Tato rovnice vznikla náhradou $y^{(n)} = \lambda^n, \dots, y' = \lambda$ a $y = \lambda^0$ z rovnice (17).

K nalezení fundamentálního systému řešení rovnice (17) musíme nejdříve zjistit kořeny charakteristické rovnice. Víme, že tato rovnice má celkem n kořenů (reálných či komplexních). Každý z těchto kořenů počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Fundamentální systém řešení rovnice (17) získáme následujícím způsobem:

1) Na každý k-násobný reálný kořen λ charakteristické rovnice (19) připadá právě k lineárně nezávislých (partikulárních) řešení rovnice (17) tvaru
$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x}, y_2 = x\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, y_k = x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}.$$
2) Na každý k-násobný komplexní kořen $\lambda = a + ib$ (a také na jeho komplexně sdružený kořen $\lambda = a - ib$) charakteristické rovnice (19) připadá právě $2k$ lineárně nezávislých (partikulárních) řešení rovnice (17) tvaru
$$y_1 = \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,, y_2 = x\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,, \dots, y_k = x^{k-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx,$$
$$y_{k+1} = \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,, y_{k+2} = x\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,, \dots, y_{2k} = x^{k-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx.$$

2.3.4 Nehomogenní lineární ODR vyšších řádů s konstantními koeficienty

ODR tvaru

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{20}$$

kde $a_0, a_1, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, f(x)$ je funkce spojitá a definovaná na intervalu I, se nazývá **nehomogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

K nalezení obecného řešení můžeme dojít několika způsoby, jedna z nejuniverzálnějších metod je metoda **variace konstant** (může ovšem vést ke komplikovanějším výpočtům).

Další variantou k určení obecného řešení je **metoda neurčitých koeficientů**. Rovnicím řešeným za použití této metody se někdy říká **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty se speciální pravou stranou**.

Obecné řešení nehomogenní rovnice (20) touto metodou se hledá ve tvaru

$$y = y_H + y_P, \tag{21}$$

kde y_H je obecné řešení homogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty příslušné k rovnici (20), tedy jde o obecné řešení rovnice

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{22}$$

a y_P je libovolné partikulární řešení rovnice (20).

Abychom tedy určili obecné řešení nehomogenní rovnice (20), potřebujeme znát obecné řešení příslušné homogenní rovnice a jedno libovolné partikulární řešení původní nehomogenní rovnice. Volba (hledání) partikulárního řešení závisí na tvaru funkce na pravé straně rovnice.

Některé příklady speciální pravé strany:

1) Pravá strana ve tvaru
$$f(x) = P_m(x),$$
kde $P_m(x)$ je polynom m-tého stupně.
Partikulární řešení y_P má potom tvar
$$y_P = x^k \cdot Q_m(x),$$
kde k je násobnost čísla 0 jako kořene charakteristické rovnice a $Q_m(x)$ je polynom s neurčitými koeficienty stejného stupně jako $P_m(x)$.
2) Pravá strana ve tvaru
$$f(x) = P_m(x) \cdot \mathrm{e}^{ax},$$
kde $P_m(x)$ je polynom m-tého stupně, $a \in \mathbb{R}$.
Partikulární řešení y_P má potom tvar
$$y_P = x^k \cdot Q_m(x) \cdot \mathrm{e}^{ax},$$
kde k je násobnost čísla a jako kořene charakteristické rovnice a $Q_m(x)$ je polynom s neurčitými koeficienty stejného stupně jako $P_m(x)$.
3) Pravá strana ve tvaru
$$f(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot [P_m(x) \cdot \cos bx + Q_n(x) \cdot \sin bx],$$
kde $P_m(x)$, respektive $Q_n(x)$ jsou polynomy m-tého stupně, respektive n-tého stupně.
Partikulární řešení y_P má potom tvar
$$y_P = x^k \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot [R_r(x) \cdot \cos bx + S_r(x) \cdot \sin bx],$$
kde k je násobnost čísla $a \pm ib$ jako kořene charakteristické rovnice a $R_r(x)$, $S_r(x)$ jsou polynomy s neurčitými koeficienty stejného stupně $r = \max\{m, n\}$.

Podrobnější postup řešení nehomogenních rovnic touto metodou je např. v [6]. Dalším způsobem řešení nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty je použití **Laplaceovy transformace**, jejíž výhodou je to, že najde přímo řešení Cauchyovy (počáteční) úlohy.

K vypracování této kapitoly byly použity zdroje: [5], [6], [7], [8].

3 NEKONEČNÉ ŘADY

3.1 Základní pojmy teorie nekonečných číselných řad

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{23}$$

nazýváme **nekonečnou číselnou řadou**.

Jednotlivá čísla $a_n, n = 1, 2, 3$ ... se nazývají **členy řady** (23), n se nazývá **sčítací index**.

Nyní zavedeme pojem součtu nekonečné číselné řady, který se definuje pomocí posloupnosti částečných součtů.

Mějme řadu (23). Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$\dots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$\dots,$$

nazýváme **posloupnost částečných součtů** řady (23).

Součet $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ se nazývá ***n*-tý částečný součet řady** (23).

Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ značí posloupnost částečných součtů řady (23).

1) Existuje-li vlastní (tj. konečná) limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

pak řekneme, že řada (23) **konverguje** a má součet s.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

2) Neexistuje-li vlastní limita (tj. existuje buď nevlastní limita $\pm\infty$ a nebo limita neexistuje), potom řekneme, že řada (23) **diverguje**.
   Mohou nastat dva případy.
   - Pokud existuje nevlastní limita $\pm\infty$, tedy
   $$\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty,$$
   pak řekneme, že řada (23) **diverguje k** $\pm\infty$ a má součet $\pm\infty$, tj.
   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$
   - Pokud neexistuje limita, tedy
   $$\lim_{n\to\infty} s_n \text{ neexistuje},$$
   pak řekneme, že řada (23) **osciluje** a nemá součet.

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně** (**relativně**), jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

3.2 Funkční řady

V kapitole (3.1) jsme se zabývali řadami, jejichž členy jsou reálná čísla. Nyní se budeme věnovat řadám, jejichž členy jsou reálné funkce $f(x)$ jedné proměnné. Takovým řadám říkáme **funkční řady**.

Nechť $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaná na intervalu I. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \qquad (24)$$

nazýváme **nekonečnou řadou funkcí**.

Množinu všech čísel x z intervalu I, pro která funkční řada (24) konverguje, nazýváme **oborem konvergence** funkční řady (24).

Množinu všech čísel x z intervalu I, pro která funkční řada (24) konverguje absolutně, nazýváme **oborem absolutní konvergence** funkční řady (24).

Velmi důležitou úlohu v matematice hrají dva případy funkčních řad:

1) **mocninné řady**, jejichž členy $f_n(x)$ jsou mocninné funkce $f_n(x) = a_n x^n$, používají se k aproximaci funkcí v okolí bodu $x = 0$.
2) **Fourierovy řady**, které mají členy ve tvaru $f_n(x) = a_n \sin nx + b_n \cos nx$, jsou vhodné pro aproximaci periodických funkcí.

3.3 Mocninné řady

Mocninnou řadou se **středem** v bodě x_0 rozumíme řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \tag{25}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$ jsou konstanty, které nazýváme **koeficienty řady**.

Obdobně jako u funkční řady, **obor konvergence** je množina všech x, pro která daná řada konverguje. **Obor absolutní konvergence** je pak množina všech x, pro která daná řada konverguje absolutně. Je zřejmé, že každá mocninná řada konverguje absolutně ve svém středu x_0, což lze ověřit přímým dosazením čísla x_0 za x do řady.

Ke každé mocninné řadě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ existuje právě jedno číslo $r \in \langle 0, \infty)$ takové, že

1) řada konverguje absolutně pro všechna $x \in (x_0 - r,\ x_0 + r\ )$,
2) řada diverguje pro všechna $x \in (-\infty,\ x_0 - r\ ) \cup (\ x_0 + r\ , \infty), r \neq \infty$.

Číslo r nazýváme **poloměr konvergence** mocninné řady (25) a interval $(x_0 - r,\ x_0 + r\ )$ **interval konvergence** této řady. Značíme jej IK.

Je zřejmé, že struktura oboru konvergence mocninné řady je velmi jednoduchá – je to buď jednoprvková množina (obsahující střed řady), interval konečné délky (symetrický kolem středu), případně celá reálná osa.

Nechť je dána mocninná řada (25) a nechť existuje limita (konečná nebo nekonečná)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \varrho, \qquad \text{resp.} \ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \varrho. \tag{26}$$

Poloměr konvergence mocninné řady (24) určíme jako

$$r = \frac{1}{\varrho}.$$

Přitom rozlišujeme tyto případy:

1) Je-li $\varrho = 0$, pak poloměr konvergence definuje jako $r = +\infty$ a mocninná řada (25) absolutně konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Interval konvergence pak zapisujeme ve tvaru $\mathrm{IK} = (-\infty, +\infty)$.
2) Je-li $\varrho = +\infty$, pak poloměr konvergence definuje jako $r = 0$ a mocninná řada (25) diverguje pro všechna $x \neq x_0$. Konverguje (absolutně) pouze ve svém středu x_0. Interval konvergence neexistuje.
3) Je-li $0 < \varrho < +\infty$, pak poloměr konvergence vypočteme jako $r = \frac{1}{\varrho}$ a mocninná řada (25) absolutně konverguje pro všechna x, pro která platí $|x - x_0| < r$ a diverguje pro všechna x, pro která platí $|x - x_0| > r$. Interval konvergence je pak ve tvaru $(x_0 - r,\ x_0 + r)$.

Obor konvergence (OK) mocninné řady je interval, na kterém daná řada konverguje. Je to tedy interval konvergence s případnými jeho krajními body, pokud v nich řada konverguje (krajní body se musí vyšetřit zvlášť). **Obor absolutní konvergence (OAK)** je interval, na kterém daná řada konverguje absolutně. Je to tedy interval konvergence s případnými jeho krajními body, pokud v nich řada absolutně konverguje.

3.3.1 Taylorova a Maclaurinova řada

Zatím jsme v teorii nekonečných řad zmínili pojem součtu řady. U mocninných řad nás bude zajímat i úloha opačná, tedy rozvoj dané funkce do mocninné řady, což má v matematice velké využití – přibližný výpočet funkčních hodnot, integrálů a hlavně také řešení diferenciálních rovnic. Nyní se budeme zabývat rozvojem funkce do tzv. Taylorovy řady.

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

nazýváme **Taylorovou řadou** funkce f v bodě x_0.

Je-li $x_0 = 0$, pak je řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

a nazývá se **Maclaurinova řada**.

Maclaurinovy řady některých elementárních funkcí.

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,\ 1\rangle,$$

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}x^n, \quad x \in (-1,\ 1),$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a číslo

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}$$

je binomický koeficient.

3.4 Fourierovy řady

Metoda, kterou zavedl francouzský matematik a lékař Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), spočívá v aproximaci funkcí pomocí goniometrických funkcí sinus a cosinus. Narozdíl od Taylorovy řady dokáže aproximovat i funkce nespojité a také na větším intervalu, než jen v okolí daného bodu. Protože jsou funkce sinus a cosinus periodické, dají se pomocí nich vyjádřit funkce, které popisují různé periodické děje.

Zde se budeme zabývat Fourierovými řadami vzhledem k systému

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}. \tag{27}$$

Nekonečnou funkční řadu ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{28}$$

kde a_0, a_n, b_n jsou konstanty, nazýváme **trigonometrickou řadou**. Přitom k-tý částečný součet řady (28) je ve tvaru

$$T_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, se nazývá **trigonometrický polynom** stupně k.

Dá-li se nějaká funkce $f(x)$ vyjádřit trigonometrickou řadou (28), tj. platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{29}$$

kde a_n, b_n jsou vhodné konstanty, říkáme, že jsme **funkci $\boldsymbol{f(x)}$ rozvinuli v trigonometrickou řadu**.

Nejprve se budeme zabývat Fourierovým rozvojem periodických funkcí se základní periodou 2π. Úvahy provedeme pro interval $\langle -\pi, \pi \rangle$, lze je však přenést na libovolný interval $\langle c, c + 2\pi \rangle, c \in \mathbb{R}$. Vlastnosti periodické funkce $f(x)$ se tím nezmění. Platí totiž:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = \int_{0}^{2\pi} g(x) dx = \int_{c}^{c+2\pi} g(x) dx.$$

Konverguje-li trigonometrická řada (28) k integrovatelné funkci $f(x)$ v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, potom platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx,$$

kde $n = 1, 2, \ldots$

Fourierova řada funkce f vzhledem k systému (27) má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Nechť f je integrovatelná na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

1) Je-li f sudá funkce na $(-\pi, \pi)$, tj.

$$f(-x) = f(x) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (-\pi, \pi),$$

má její Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,, \quad \text{kde} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

2) Je-li f lichá funkce na $(-\pi, \pi)$, tj.

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (-\pi, \pi),$$

má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,, \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní uvedeme vztahy pro Fourierovu řadu periodické funkce f s obecnou periodou $T = 2l$, kde platí $T \neq 2\pi$. Tuto funkci lze transformací

$$x = \frac{T}{2\pi} \cdot u$$

převést na funkci periodickou s periodou 2π. Z transformační rovnice plyne

$$u = \frac{2\pi}{T} \cdot x = \frac{\pi}{l} \cdot x,$$

takže Fourierova řada periodické funkce f má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\right]$$

a pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right) dx,$$

kde $n = 1, 2, \ldots$

K vypracování této kapitoly byly použity zdroje: [3], [4], [8].

II. PRAKTICKÁ ČÁST

4 ODR ŘEŠENÉ POMOCÍ MOCNINNÝCH ŘAD

4.1 Řešené příklady

4.1.1 ODR 1. řádu

Příklad 4.1 Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y' = x^2 y, \qquad y(0) = 1.$$

Jedná se o ODR 1. řádu se separovanými proměnnými.

Řešení metodou separace proměnných.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y,$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx,$$

$$\ln|y| = \ln \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} + \ln|C|.$$

Obecné řešení je ve tvaru

$$y = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky $y(0) = 1$ do obecného řešení dostáváme $C = 1$ a partikulární řešení tedy je

$$y_P = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}.$$

Řešení rozvojem do mocninné řady.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru Maclaurinovy řady

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}, \tag{30}$$

kde hodnoty $y^{(n)}(0)$ a následně a_n určíme takto:

- $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, z počáteční podmínky $y(0) = 1$, tedy $a_0 = \frac{1}{1} = 1$.

- $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$, ze zadání $y' = x^2y \Rightarrow y'(0) = 0^2 \cdot y(0) = 0 \cdot 1 = 0$. Koeficient a_1 má pak hodnotu $a_1 = \frac{0}{1!} = 0$.
- $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, zadanou rovnici zderivujeme, pak $y'' = 2xy + x^2y'$.

  $y''(0) = 2 \cdot 0 \cdot y(0) + 0^2 \cdot y'(0) = 0$. Koeficient $a_2 = \frac{0}{2!} = 0$.

Postupně pro derivace vyšších řádů a koeficienty a_n platí:

-	$y(0) = 1$	$a_0 = 1$
$y' = x^2y$	$y'(0) = 0$	$a_1 = 0$
$y'' = 2x \cdot y + x^2y'$	$y''(0) = 0$	$a_2 = 0$
$y''' = 2y + 4xy' + x^2y'$	$y'''(0) = 2$	$a_3 = \frac{2}{3!}$
$y^{(4)} = 6y' + 6xy'' + x^2y'''$	$y^{(4)}(0) = 0$	$a_4 = 0$
$y^{(5)} = 12y'' + 8xy''' + x^2y^{(4)}$	$y^{(5)}(0) = 0$	$a_5 = 0$
$y^{(6)} = 20y''' + 10xy^{(4)} + x^2y^{(5)}$	$y^{(6)}(0) = 40$	$a_6 = \frac{40}{6!}$
$y^{(7)} = 30y^{(4)} + 12xy^{(5)} + x^2y^{(6)}$	$y^{(7)}(0) = 0$	$a_7 = 0$
$y^{(8)} = 42y^{(5)} + 14xy^{(6)} + x^2y^{(7)}$	$y^{(8)}(0) = 0$	$a_8 = 0$
$y^{(9)} = 56y^{(6)} + 16xy^{(7)} + x^2y^{(8)}$	$y^{(9)}(0) = 2240$	$a_9 = \frac{2240}{9!}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y^{(12)} = 110y^{(9)} + 22xy^{(10)} + x^2y^{(11)}$	$y^{(12)}(0) = 246400$	$a_{12} = \frac{246400}{12!}$

Nyní dosadíme koeficienty a_n do (30) a po úpravě dostaneme

$$y = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12} + \cdots \tag{31}$$

$$y = 1 + \frac{1}{3^1 \cdot 1!}x^{3\cdot 1} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!}x^{3\cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 3!}x^{3\cdot 3} + \cdots,$$

z čehož plyne

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n!}x^{3n}. \tag{32}$$

a porovnáme s Maclaurinovým rozvojem funkce e^t

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots.$$

Substitucí $t = \frac{x^3}{3}$ obdržíme

$$\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} = 1 + \frac{\frac{x^3}{3}}{1!} + \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)^3}{3!} + \cdots.$$

Tento rozvoj lze vyjádřit také následovně

$$\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n!} x^{3n}. \tag{33}$$

Porovnáním vztahů (32) a (33) vidíme, že partikulární řešení, které nám vyšlo, má totožné vyjádření jako rozvoj funkce $\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}$. Výsledek lze tedy zapsat ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}.$$

Výsledek souhlasí s partikulárním řešením zjištěným metodou separace proměnných.

Příklad 4.2 Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$xy' + 3xy - x\mathrm{e}^{3x} = 0, \qquad y(0) = \frac{7}{6}.$$

Jedná se o lineární ODR 1. řádu.

Řešení metodou variace konstanty.

$$y' = -3y + \mathrm{e}^{3x}. \tag{34}$$

Rovnici zhomogenizujeme a nalezneme její obecné řešení

$$y' = -3y,$$

$$y_H = C\mathrm{e}^{\int -3dx} = C\mathrm{e}^{-3x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Najdeme obecné řešení nehomogenní rovnice

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-3x}, \tag{35}$$

$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-3x} + C(x)\mathrm{e}^{-3x}(-3).$$

Dosadíme y a y' do rovnice (34)

$$C'(x)\mathrm{e}^{-3x} + C(x)\mathrm{e}^{-3x}(-3) = -3C(x)\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{3x},$$

$$C'(x) = \mathrm{e}^{6x},$$

$$C(x) = \int \mathrm{e}^{6x} dx,$$

$$C(x) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení $C(x)$ do vztahu (35) dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$y = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-3x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počáteční podmínky $y(0) = \frac{7}{6}$ do obecného řešení dostáváme $C = 1$ a partikulární řešení tedy je

$$y_P = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}.$$

Řešení rozvojem do mocninné řady.

Partikulární řešení opět hledáme ve tvaru Maclaurinovy řady (30), kde hodnoty $y^{(n)}(0)$ a koeficienty a_n určíme následujícím způsobem:

- $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, z počáteční podmínky $y(0) = \frac{7}{6}$, tedy $a_0 = \frac{\frac{7}{6}}{1} = \frac{7}{6}$.
- $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$, ze zadání $y' = -3y + \mathrm{e}^{3x} => y'(0) = -3y(0) + \mathrm{e}^0 = -3 \cdot \frac{7}{6} + 1$.

  $y'(0) = -\frac{5}{2}$. Koeficient a_1 má pak hodnotu $a_1 = \frac{-\frac{5}{2}}{1!} = -\frac{5}{2}$.
- $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, zadanou rovnici zderivujeme, pak $y'' = -3y' + 3\mathrm{e}^{3x}$.

  $y''(0) = -3y'(0) + 3\mathrm{e}^0 = -3\left(-\frac{5}{2}\right) + 3 = \frac{21}{2}$. Koeficient $a_2 = \frac{\frac{21}{2}}{2!} = \frac{21}{4}$.

Postupně pro derivace vyšších řádů a koeficienty a_n platí:

-	$y(0) = \frac{7}{6}$	$a_0 = \frac{7}{6}$
$y' = -3y + \mathrm{e}^{3x}$	$y'(0) = -\frac{5}{2}$	$a_1 = -\frac{5}{2}$
$y'' = -3y' + 3\mathrm{e}^{3x}$	$y''(0) = \frac{21}{2}$	$a_2 = \frac{21}{4}$
$y''' = -3y'' + 9\mathrm{e}^{3x}$	$y'''(0) = -\frac{45}{2}$	$a_3 = -\frac{15}{4}$
$y^{(4)} = -3y''' + 27\mathrm{e}^{3x}$	$y^{(4)}(0) = \frac{189}{2}$	$a_4 = \frac{63}{16}$

Nyní dosadíme koeficienty a_n do (30) a po úpravě dostaneme

$$y = \frac{7}{6} - \frac{5}{2}x + \frac{21}{4}x^2 - \frac{15}{4}x^3 + \frac{63}{16}x^4 - \cdots \tag{36}$$

a porovnáme s Maclaurinovým rozvojem funkce e^t

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots.$$

Substitucemi $t = \mathrm{e}^{3x}$ a $t = \mathrm{e}^{-3x}$ obdržíme

$$\mathrm{e}^{3x} = 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \cdots,$$

$$\mathrm{e}^{-3x} = 1 + \frac{-3x}{1!} + \frac{(-3x)^2}{2!} + \frac{(-3x)^3}{3!} + \cdots$$

a dosadíme do $\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}$

$$\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x} = \frac{1}{6}\left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{6} + \cdots\right) + \left(1 - 3x + \frac{9x^2}{2} - \frac{27x^3}{6} + \cdots\right).$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x} = \frac{7}{6} - \frac{5}{2}x + \frac{21}{4}x^2 - \frac{15}{4}x^3 + \cdots. \tag{37}$$

Porovnáním vztahů (36) a (37) vidíme, že partikulární řešení, které nám vyšlo, má totožné vyjádření jako rozvoj funkce $\frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}$. Výsledek lze tedy zapsat ve tvaru

$$y = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}.$$

Výsledek souhlasí s partikulárním řešením zjištěným metodou charakteristické rovnice.

4.1.2 ODR 2. řádu

Příklad 4.3 Řešte diferenciální rovnici při počátečních podmínkách

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Jedná se o homogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty.

Řešení metodou charakteristické rovnice.

Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$.

Obecné řešení je ve tvaru

$$y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 x \mathrm{e}^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počátečních podmínek $y(0) = 1, y'(0) = 1$ do obecného řešení dostáváme $C_1 = 1, C_2 = -1$ a partikulární řešení tedy je

$$y_P = \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x}.$$

Řešení rozvojem do mocninné řady.

Partikulární řešení opět hledáme ve tvaru Maclaurinovy řady (30), kde hodnoty $y^{(n)}(0)$ a koeficienty a_n určíme následujícím způsobem:

- $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, z počáteční podmínky $y(0) = 1$, tedy $a_0 = \frac{1}{1} = 1$.
- $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$, z počáteční podmínky $y'(0) = 1$, tedy $a_1 = \frac{1}{1} = 1$.
- $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, ze zadání $y'' = 4y' - 4y$, pak $y''(0) = 4y'(0) - 4y(0)$.

  $y''(0) = 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 0$. Koeficient $a_2 = \frac{0}{2!} = 0$.

Postupně pro derivace vyšších řádů a koeficienty a_n platí:

-	$y(0) = 1$	$a_0 = 1$
-	$y'(0) = 1$	$a_1 = 1$
$y'' = 4y' - 4y$	$y''(0) = 0$	$a_2 = 0$
$y''' = 4y'' - 4y'$	$y'''(0) = -4$	$a_3 = \frac{-4}{3!}$
$y^{(4)} = 4y''' - 4y''$	$y^{(4)}(0) = -16$	$a_4 = \frac{-16}{4!}$
$y^{(5)} = 4y^{(4)} - 4y'''$	$y^{(5)}(0) = -48$	$a_5 = \frac{-48}{5!}$
$y^{(6)} = 4y^{(5)} - 4y^{(4)}$	$y^{(6)}(0) = -128$	$a_6 = \frac{-128}{6!}$

Nyní dosadíme koeficienty a_n do (30)

$$y = 1 + x - \frac{4}{3!}x^3 - \frac{16}{4!}x^4 - \frac{48}{5!}x^5 - \frac{128}{6!}x^6 - \cdots \tag{38}$$

a porovnáme s Maclaurinovým rozvojem funkce e^t

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots.$$

Substitucí $t = 2x$ obdržíme

$$\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \cdots$$

a dosadíme do rozdílu $\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x}$

$$\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x} = \left(1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \frac{32x^5}{5!} + \cdots\right) -$$

$$\left(x + 2x^2 + \frac{4x^3}{2!} + \frac{8x^4}{3!} + \frac{16x^5}{4!} + \cdots\right).$$

Po úpravě dostaneme

$$\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x} = 1 + x - \frac{4}{3!}x^3 - \frac{16}{4!}x^4 - \frac{48}{5!}x^5 - \cdots. \tag{39}$$

Porovnáním vztahů (38) a (39) vidíme, že partikulární řešení, které nám vyšlo, má totožné vyjádření jako rozvoj funkcí $\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x}$. Výsledek lze tedy zapsat ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x}.$$

Výsledek souhlasí s partikulárním řešením zjištěným metodou charakteristické rovnice.

Příklad 4.4 Řešte diferenciální rovnici při počátečních podmínkách

$$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Jedná se o homogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty.

Řešení metodou charakteristické rovnice.

Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 + 4 = 0$. Má dva komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

Obecné řešení je ve tvaru

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dosazením počátečních podmínek $y(0) = 1, y'(0) = 2$ do obecného řešení dostáváme $C_1 = 1, C_2 = 1$ a partikulární řešení tedy je

$$y_P = \cos 2x + \sin 2x.$$

Řešení rozvojem do mocninné řady.

Partikulární řešení opět hledáme ve tvaru Maclaurinovy řady (30), kde hodnoty $y^{(n)}(0)$ a koeficienty a_n určíme následujícím způsobem:

- $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, z počáteční podmínky $y(0) = 1$, tedy $a_0 = \frac{1}{1} = 1$.
- $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$, z počáteční podmínky $y'(0) = 2$, tedy $a_1 = \frac{2}{1} = 2$.
- $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, ze zadání $y'' = -4y$, pak $y''(0) = -4y(0)$.

  $y''(0) = -4 \cdot 1 = -4$. Koeficient $a_2 = \frac{-4}{2!} = -2$.

Postupně pro derivace vyšších řádů a koeficienty a_n platí:

-	$y(0) = 1$	$a_0 = 1$
-	$y'(0) = 2$	$a_1 = 2$
$y'' = -4y$	$y''(0) = -4$	$a_2 = -2$
$y''' = -4y'$	$y'''(0) = -8$	$a_3 = \frac{-4}{3}$
$y^{(4)} = -4y''$	$y^{(4)}(0) = 16$	$a_4 = \frac{2}{3}$
$y^{(5)} = -4y'''$	$y^{(5)}(0) = 32$	$a_5 = \frac{4}{15}$
$y^{(6)} = -4y^{(4)}$	$y^{(6)}(0) = -64$	$a_6 = \frac{-4}{45}$

Nyní dosadíme koeficienty a_n do (30)

$$y = 1 + 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 - \cdots \tag{40}$$

a porovnáme s Maclaurinovým rozvojem funkcí $\cos t$ a $\sin t$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots.$$

Substitucí $t = 2x$ obdržíme

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots$$

a dosadíme do $\cos 2x + \sin 2x$

$$\cos 2x + \sin 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots.$$

Po úpravě dostaneme

$$\cos 2x + \sin 2x = 1 + 2x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^5 - \cdots. \tag{41}$$

Porovnáním vztahů (40) a (41) vidíme, že partikulární řešení, které nám vyšlo, má totožné vyjádření jako rozvoj funkce $\cos 2x + \sin 2x$. Výsledek lze tedy zapsat ve tvaru

$$y = \cos 2x + \sin 2x.$$

Výsledek souhlasí s partikulárním řešením zjištěným metodou charakteristické rovnice.

Příklad 4.5 Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + 9y = 0.$$

Řešení metodou charakteristické rovnice.

Jedná se o homogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty. Charakteristická rovnice je tvaru $\lambda^2 + 9 = 0$. Má dva komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 3i$.

Obecné řešení je ve tvaru

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Řešení rozvojem do mocninné řady.

Obecné řešení hledáme ve tvaru

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots. \tag{42}$$

Pro derivace této funkce platí

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots.$$

Dosazením do diferenciální rovnice dostáváme

$$2a_2 + 6a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots + 9a_0 + 9a_1 x + \cdots + 9a_{n-2} x^{n-2} + \cdots = 0,$$

pak po úpravě sečtením koeficientů u stejných mocnin

$$(2a_2 + 9a_0) + (6a_3 + 9a_1)x + \cdots + (n(n-1)a_n + 9a_{n-2})x^{n-2} + \cdots = 0,$$

z čehož plyne

$$n(n-1)a_n + 9a_{n-2} = 0 \quad => \quad a_n = \frac{-9a_{n-2}}{n(n-1)}.$$

Z výše uvedených vztahů je zřejmé, že určení koeficientů a_n závisí na volbě a_0, a_1. Mějme tyto dva případy.

1) Zvolíme $a_0 = 0$. Potom

$$a_2 = \frac{-9a_0}{2(2-1)} = 0, \quad a_4 = \frac{-9a_2}{4(4-1)} = 0.$$

Z čehož plyne $a_{2n} = 0$, tj. v řadě jsou pouze liché členy.

Předpis pro liché členy $a_{2n+1} = \frac{-9a_{n-1}}{2n(2n+1)}$.

$$a_3 = -\frac{9a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{9a_1}{3!},$$

$$a_5 = -\frac{9a_3}{4 \cdot 5} = \frac{9^2 a_1}{5!},$$

$$a_7 = -\frac{9a_5}{6 \cdot 7} = -\frac{9^3 a_1}{7!}.$$

Pak pro $a_1 \in \mathbb{R}$ libovolné dostáváme

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{9^n a_1}{(2n+1)!}.$$

Nyní dosadíme koeficienty a_n do (42)

$$y_1 = a_1 x - \frac{9a_1}{3!} x^3 + \frac{9^2 a_1}{5!} x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{9^n a_1}{(2n+1)!} x^{2n-1} + \cdots.$$

$$y_1 = a_1 \left[x - \frac{9}{3!} x^3 + \frac{9^2}{5!} x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{9^n}{(2n+1)!} x^{2n-1} + \cdots \right]$$

a porovnáme s Maclaurinovým rozvojem funkce $\sin t$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots.$$

Substitucí $t = 3x$ dostaneme

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots,$$

$$\sin 3x = 3(x - \frac{9x^3}{3!} + \frac{9^2 x^5}{5!} - \cdots)$$

a řešení rovnice je

$$y_1 = 3a_1 \sin 3x.$$

2) Zvolíme $a_1 = 0$. Potom

$$a_3 = \frac{-9a_1}{3(3-1)} = 0, \quad a_5 = \frac{-9a_3}{5(5-1)} = 0,$$

z čehož plyne $a_{2n+1} = 0$, tj. v řadě jsou pouze sudé členy.

Předpis pro sudé členy $a_{2n} = \frac{-9a_{2n-2}}{2n(2n-1)}$.

$$a_2 = -\frac{9a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{9a_0}{2!},$$

$$a_4 = -\frac{9a_2}{4 \cdot 3} = \frac{9^2 a_0}{4!},$$

$$a_6 = -\frac{9a_4}{6\cdot 5} = -\frac{9^3 a_0}{6!}.$$

Pak pro $a_0 \in \mathbb{R}$ libovolné dostáváme

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{9^n a_0}{(2n)!}.$$

Nyní dosadíme koeficienty a_n do (42)

$$y_2 = a_0 - \frac{9a_0}{2!}x^2 + \frac{9^2 a_0}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{9^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,$$

$$y_2 = a_0 \left[1 - \frac{9}{2!}x^2 + \frac{9^2}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{9^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right].$$

a porovnáme s Maclaurinovým rozvojem funkce $\cos t$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots.$$

Substitucí $t = 3x$ dostaneme

$$\cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \cdots$$

a řešení rovnice je

$$y_2 = a_0 \cos 3x.$$

Dohromady je obecné řešení rovnice

$$y = a_0 \cos 3x + 3a_1 \sin 3x, \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Po označení $C_1 = a_0, C_2 = 3a_1$ lze toto řešení psát ve tvaru

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

což odpovídá obecnému řešení zjištěného metodou charakteristické rovnice.

Příklad 4.6 Řešte diferenciální rovnici při počátečních podmínkách

$$y'' - \mathrm{e}^x y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Jedná se o homogenní lineární ODR 2. řádu.

Řešení rozvojem do mocninné řady.

Partikulární řešení opět hledáme ve tvaru Maclaurinovy řady (30), kde hodnoty $y^{(n)}(0)$ a koeficienty a_n určíme následujícím způsobem:

- $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, z počáteční podmínky $y(0) = 2$, tedy $a_0 = \frac{2}{1} = 2$.
- $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$, z počáteční podmínky $y'(0) = 1$, tedy $a_1 = \frac{1}{1} = 1$.
- $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, ze zadání $y'' = \mathrm{e}^x y$, pak $y''(0) = \mathrm{e}^0 y(0)$.

  $y''(0) = 1 \cdot 2 = 2$. Koeficient $a_2 = \frac{2}{2!} = 1$.

Postupně pro derivace vyšších řádů a koeficienty a_n platí:

-	$y(0) = 2$	$a_0 = 2$
-	$y'(0) = 1$	$a_1 = 1$
$y'' = \mathrm{e}^x y$	$y''(0) = 2$	$a_2 = 1$
$y''' = \mathrm{e}^x y + \mathrm{e}^x y'$	$y'''(0) = 3$	$a_3 = \frac{1}{2}$
$y^{(4)} = \mathrm{e}^x y + 2\mathrm{e}^x y' + \mathrm{e}^x y''$	$y^{(4)}(0) = 6$	$a_4 = \frac{1}{4}$
$y^{(5)} = \mathrm{e}^x y + 3\mathrm{e}^x y' + 3\mathrm{e}^x y'' + \mathrm{e}^x y'''$	$y^{(5)}(0) = 14$	$a_5 = \frac{14}{5!}$

Nyní dosadíme koeficienty a_n do (30) a dostáváme partikulární řešení

$$y = 2 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{14}{5!}x^5 + \cdots.$$

Příklad 4.7 Řešte diferenciální rovnici při počátečních podmínkách

$$y'' - y\cos x - x = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Jedná se o nehomogenní lineární ODR 2. řádu.

Řešení rozvojem do mocninné řady.

Partikulární řešení opět hledáme ve tvaru Maclaurinovy řady (30), kde hodnoty $y^{(n)}(0)$ a koeficienty a_n určíme následujícím způsobem:

- $a_0 = \frac{y(0)}{0!}$, z počáteční podmínky $y(0) = 1$, tedy $a_0 = \frac{1}{1} = 1$.
- $a_1 = \frac{y'(0)}{1!}$, z počáteční podmínky $y'(0) = 0$, tedy $a_1 = \frac{0}{1} = 0$.
- $a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$, ze zadání $y'' = y\cos x + x$, pak $y''(0) = y(0)\cos 0 + 0$.

  $y''(0) = 1 \cdot 1 + 0 = 1$. Koeficient $a_2 = \frac{1}{2!}$.

Postupně pro derivace vyšších řádů a koeficienty a_n platí:

-	$y(0) = 1$	$a_0 = 1$
-	$y'(0) = 0$	$a_1 = 0$
$y'' = y\cos x + x$	$y''(0) = 1$	$a_2 = \frac{1}{2!}$
$y''' = y'\cos x - y\sin x + 1$	$y'''(0) = 1$	$a_3 = \frac{1}{3!}$
$y^{(4)} = y''\cos x - 2y'\sin x - y\cos x$	$y^{(4)}(0) = 0$	$a_4 = 0$
$y^{(5)} = y'''\cos x - 3y''\sin x - 3y'\cos x + y\sin x$	$y^{(5)}(0) = 1$	$a_5 = \frac{1}{5!}$

Nyní dosadíme koeficienty a_n do (30) a dostáváme partikulární řešení

$$y = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots.$$

4.2 Neřešené příklady

Příklad 1. $y' = 4y, \qquad y(0) = 2,$

$$\left[y = 2\mathrm{e}^{4x} = 2 + 8x + \frac{32x^2}{2!} + \frac{128x^3}{3!} + \cdots\right].$$

Příklad 2. $y' + y = \cos x\,, \qquad y(0) = 1,$

$$\left[y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right].$$

Příklad 3. $y'' + 3y' - 10y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = -3,$

$$\left[y = \mathrm{e}^{-5x} + \mathrm{e}^{2x} = 2 - 3x + \frac{29x^2}{2!} - \frac{117x^3}{3!} + \frac{641x^4}{4!} - \cdots\right].$$

Příklad 4. $y'' - 6y' + 9y = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = 2,$

$$\left[y = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^{3x} = \frac{1}{3} + 2x + \frac{9x^2}{2!} + \frac{36x^3}{3!} + \frac{135x^4}{4!} + \cdots\right].$$

Příklad 5. $y'' + y = 0,$

$[y = a_0 \cos x + a_1 \sin x].$

Příklad 6. $y'' - 4y' = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 4,$

$$\left[y = \mathrm{e}^{4x} = 1 + 4x + \frac{16x^2}{2!} + \frac{64x^3}{3!} + \frac{256x^4}{4!} + \cdots\right].$$

Příklad 7. $y'' - 2y' = 8x, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 0,$

$$\left[y = \mathrm{e}^{2x} - 2x^2 - 2x + 1 = 2 + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \frac{32x^5}{5!} + \cdots\right].$$

Příklad 8. $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 2, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 0,$

$$\left[y = -2\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 2x^2 - 6x + 6 = 2 - 3x^2 + \frac{18x^3}{3!} - \frac{34x^4}{4!} + \cdots\right].$$

K vypracování této kapitoly byly použity zdroje: [3].

5 ODR ŘEŠENÉ POMOCÍ FOURIEROVÝCH ŘAD

5.1 Řešené příklady

Příklad 5.1 Řešte diferenciální rovnici pomocí Fourierovy řady

$$y'' + 3y' + 2y = f(x),$$

kde $f(x) = x^2$, $\quad x \in \langle -1, 1\rangle$.

Jedná se o nehomogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty. Nejprve je třeba určit rozvoj funkce $f(x) = x^2$ do Fourierovy řady. Funkce $f(x) = x^2$ je sudá, proto provedeme její rozvoj v kosinovou Fourierovu řadu. Koeficienty b_n jsou nulové, stačí tedy určit koeficienty a_0, a_n

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Určíme koeficient a_0

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

a koeficient a_n pro $n = 1, 2, \dots.$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} x^2\cos\left(n\frac{\pi}{1}x\right)dx = 2\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)\,dx.$$

Použitím metody per partes dostáváme

$$a_n = \left[\frac{2}{n\pi}x^2\sin(n\pi x)\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx.$$

Po druhém použití metody per partes obdržíme

$$a_n = \left[\frac{2}{n^2\pi^2}x\cos(n\pi x)\right]_0^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi),$$

což lze vyjádřit také následovně

$$a_n = (-1)^n \frac{2}{n^2\pi^2}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Rozvoj sudé funkce $f(x)$ je ve tvaru

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\right]$$

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

Řešení diferenciální rovnice hledáme ve tvaru

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi x) + B_n \sin(n\pi x)].$$

Pro derivace této funkce platí

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} [-n\pi A_n \sin(n\pi x) + n\pi B_n \cos(n\pi x)],$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} [-n^2\pi^2 A_n \cos(n\pi x) - n^2\pi^2 B_n \sin(n\pi x)].$$

Tyto derivace a rozvoj funkce $f(x)$ dosadíme do zadání

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-n^2\pi^2 A_n \cos(n\pi x) - n^2\pi^2 B_n \sin(n\pi x)] +$$

$$3\left\{\sum_{n=1}^{\infty} [-n\pi A_n \sin(n\pi x) + n\pi B_n \cos(n\pi x)]\right\} +$$

$$2\left\{\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi x) + B_n \sin(n\pi x)]\right\} = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

Porovnáním koeficientů na levé a pravé straně rovnice dostaneme

$$2\frac{A_0}{2} = \frac{1}{3},$$

$$-n^2\pi^2 A_n + 3n\pi B_n + 2A_n = (-1)^n \frac{2}{n^2\pi^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$-n^2\pi^2 B_n - 3n\pi A_n + 2B_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Řešením této soustavy rovnic jsou koeficienty

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{6}, \qquad A_n = (-1)^n \frac{2(2 - n^2\pi^2)}{[(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2]n^2\pi^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$B_n = (-1)^n \frac{6}{[(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2]n\pi}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Řešení diferenciální rovnice je

$$y = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{2(2 - n^2\pi^2)}{[(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2]n^2\pi^2} \cos(n\pi x) + \right.$$

$$\left. (-1)^n \frac{6}{[(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2]n\pi} \sin(n\pi x) \right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Příklad 5.2 Řešte diferenciální rovnici pomocí Fourierovy řady

$$y'' + 9y = f(x),$$

kde $f(x) = \sin x$, $\qquad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Jedná se o nehomogenní lineární ODR 2. řádu s konstantními koeficienty. Nejprve je třeba určit rozvoj funkce $f(x) = \sin x$ do Fourierovy řady. Funkce $f(x) = \sin x$ je lichá, proto provedeme její rozvoj v sinovou Fourierovu řadu. Koeficienty a_0, a_n jsou nulové, stačí tedy určit koeficient b_n

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{l} x\right) dx, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin(2nx)\, dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin(2nx)\, dx.$$

Nyní využijeme goniometrický vzorec

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos\beta).$$

Zavedeme substituci

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad 2nx=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\alpha=(2n+1)x,\qquad \beta=(2n-1)x,$$

$$\sin x\cdot\sin(2nx)=-\frac{1}{2}[\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x].$$

Pak platí

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sin(2nx)\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}[\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x]dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)\,x}{2n-1}-\frac{\sin(2n+1)\,x}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}-\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1}\right],$$

což lze vyjádřit také následovně

$$b_n=\frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{8}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{n}{4n^2-1},\qquad n=1,2,....$$

Rozvoj liché funkce $f(x)$ je ve tvaru

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\right]$$

$$f(x)=\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin(n\pi x).$$

Řešení diferenciální rovnice hledáme ve tvaru

$$y=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(2nx)+B_n\sin(2nx)].$$

Pro derivace této funkce platí

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} [-2nA_n \sin(2nx) + 2nB_n \cos(2nx)],$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} [-4n^2 A_n \cos(2nx) - 4n^2 B_n \sin(2nx)].$$

Tyto derivace a rozvoj funkce $f(x)$ dosadíme do zadání

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-4n^2 A_n \cos(2nx) - 4n^2 B_n \sin(2nx)] +$$

$$9\left\{\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(2nx) + B_n \sin(2nx)]\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \sin(2nx).$$

Porovnáním koeficientů na levé a pravé straně rovnice dostaneme

$$9\frac{A_0}{2} = 0,$$

$$-4n^2 A_n + 9A_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$-4n^2 B_n + 9B_n = (-1)^{n+1} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Řešením této soustavy rovnic jsou koeficienty

$$A_0 = 0, \qquad A_n = 0, \qquad B_n = (-1)^{n+1} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)(9 - 4n^2)}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Řešení diferenciální rovnice je

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)(9 - 4n^2)} \sin(2nx), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

5.2 Neřešené příklady

Příklad 1. $y'' + 4y = |x|, \qquad x \in \langle -1, 1\rangle,$

$$\left[y = \frac{1}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{[(2n+1)^2\pi^2 - 4](2n+1)^2\pi^2} \cos(2n+1)\pi x \right].$$

Příklad 2. $y'' + 5y' + 4y = \cos x\,, \qquad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle,$

$$\left[y = \frac{1}{2\pi} + \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{[4(4n^2-1)^2 + 25n^2](4n^2-1)\pi} 5\mathrm{n} \sin(2nx) + 2(1-n^2)\cos(2nx) \right].$$

Příklad 3. $y'' + 9y = \max\{\sin x, 0;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\},$

$$\left[y = \frac{1}{9\pi} + \frac{1}{16} \sin x + (A_1 \cos 3x + B_1 \sin 3x) + \right.$$

$$\left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\pi(4n^2-1)(4n^2-9)} \cos(2nx) \right],$$

kde A_3, B_3 jsou libovolné konstanty.

K vypracování této kapitoly byly použity zdroje: [9].

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo poskytnutí náhledu do problematiky řešení obyčejných diferenciálních rovnic s využitím nekonečných řad. Na začátku byly zmíněny základní pojmy z teorie diferenciálních rovnic a nekonečných řad. Praktická část pak byla věnována příkladům řešeným i neřešeným. Nejprve byly uvažovány rozvoje diferenciálních rovnic v řady mocninné, a to konkrétně v řady Maclaurinovy. Kromě podrobného postupu řešení pomocí rozvoje byly stručně ukázány i některé klasické metody řešení diferenciálních rovnic, jejichž výsledek pak sloužil k ověření správnosti řešení pomocí rozvoje v mocninnou řadu. U některých příkladů se zjistilo, že jejich řešení pomocí tradičních metod (variace konstant, metoda neurčitých koeficientů nebo třeba Laplaceova transformace) by bylo krajně obtížné, a proto se znalost rozvoje v mocninnou řadu ukázala jako velmi výhodná. V poslední kapitole byly probrány možnosti rozvoje diferenciálních rovnic v řady Fourierovy, čehož se s úspěchem využívá u lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s periodickou funkcí na pravé straně rovnice.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] BRONSON, Richard. a Gabriel B. COSTA. *Schaum's outlines of differential equations*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, c2006. ISBN 0071456872.

[2] WEIR, Maurice D., Joel. HASS, George B. THOMAS a Ross L. FINNEY. *Thomas' calculus*. 11th ed., media upgrade. Boston: Pearson Addison Wesley, c2008. ISBN 032148987x.

[3] DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. *Nekonečné řady*. Brno: Masarykova univerzita, 1998. ISBN 80-210-1949-2.

[4] KUFNER, Alois a Jan KADLEC. *Fourierovy řady*. 1. vyd. Praha: Academia, 1969, 346 s.

[5] KAREL REKTORYS A SPOLUPRACOVNÍCI. *Přehled užité matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 8071961795.

[6] RÁB, Miloš. *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. 3. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. ISBN 8021034165.

[7] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Vyd. 2. Brno: Masarykova univerzita, 2001. ISBN 80-210-2589-1.

[8] ŘEZNÍČKOVÁ, Jana. *Diferenciální rovnice* [online]. Zlín, 2015 [cit. 2017-05-16]. Dostupné z: http://vyuka.fai.utb.cz/

[9] HRABALOVÁ, Jana. *Řešení obyčejných diferenciálních rovnic metodou nekonečných řad*. Brno, 2008. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

DR Diferenciální rovnice.

PDR Parciální diferenciální rovnice.

ODR Obyčejná diferenciální rovnice.

resp. Respektive.

např. Například.

IK Interval konvergence.

OK Obor konvergence.

OAK Obor absolutní konvergence.

$\mathbb{R}$ Množina všech reálných čísel.

$\mathbb{N}$ Množina všech přirozených čísel.

$\in$ Prvek množiny.

$\cup$ Sjednocení.

$\equiv$ Ekvivalentně rovno.

$\neq$ Nerovná se.

$\sum$ Suma.

$\int$ Integrál.

‘ Derivace.

lim Limita.