

Vyhodnocování statistických charakteristik náhodných procesů

Stanislav Topor

Bakalářská práce
2019



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
akademický rok: 2018/2019

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Ing. Stanislav Topor**
Osobní číslo: **A15105**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Informační a řídicí technologie**
Forma studia: **kombinovaná**

Téma práce: **Vyhodnocování statistických charakteristik náhodných procesů**
Téma anglicky: **An Analysis of the Statistical Characteristics of Random Processes**

Zásady pro vypracování:

1. V teoretické části práce popište základní statistické charakteristiky vhodné pro popis náhodných signálů.
2. Simulujte průchod náhodného signálu s normálním rozdělením vhodně zvolenou lineární soustavou. Porovnejte základní statistické charakteristiky vstupního a výstupního signálu. Stejným způsobem proměřte rovněž reálnou tepelnou soustavu a vyhodnoťte statistické charakteristiky signálů.
3. Simulujte soubor realizací náhodného procesu jako odezvu lineárního systému na vstupní náhodný signál s normálním rozdělením. Navrhněte a realizujte způsob ověření stacionárnosti náhodného procesu s využitím vhodně zvolených statistických charakteristik.
4. Proměřte simulační model i reálnou soustavu rovněž pseudonáhodným binárním signálem. Realizujte korelační analýzu na základě naměřených a nasimulovaných signálů.
5. Realizujte v prostředí Matlab/Simulink.
6. Navrhněte zadání laboratorních úloh a vypracujte vzorové protokoly.

Rozsah bakalářské práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

1. ZAPLATÍLEK, Karel a Bohuslav DOŇAR. MATLAB: začínáme se signály. Praha: BEN – technická literatura, 2006. 271s., ISBN 80-7300-200-0
2. OPPENHEIM, Alan., WILLSKY, Alan. Signals and Systems. N.J. USA: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1997, 957s. ISBN 0-13-814757-4
3. Bobál Vladimír. Identifikace systémů. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009, 128s., ISBN 978 - 80 - 7318 - 888 - 7
4. Noskovič, Petr. Modelování a identifikace systémů. Montanex, Ostrava, 1999, 276 s., ISBN: 80-7225-030-2
5. KAY, Steven. Fundamentals of Statistical Signal processing: Estimation Theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, Inc., 1993, 595s. ISBN 978-0135041352

Vedoucí bakalářské práce:

doc. Ing. Marek Kubalčík, Ph.D.

Ústav řízení procesů

Datum zadání bakalářské práce:

21. prosince 2018

Termín odevzdání bakalářské práce:

15. května 2019

Ve Zlíně dne 21. prosince 2018

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.
děkan



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.
ředitel ústavu

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užit své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne

.....
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cieľom bakalárskej práce je prostredníctvom vhodne zvolených štatistických charakteristík analyzovať náhodné procesy. Teoretická časť práce sa zaoberá popisom základných charakteristík vhodných pre popis náhodných procesov. Ich prostredníctvom definujem podmienky silnej a slabej stacionárnosti náhodného procesu, ako aj súboru realizácií náhodných procesov. V praktickej časti je realizovaný priechod náhodného signálu lineárnou tepelnou sústavou, pričom na výstupe sústavy sa sledujú zmeny základných štatistických charakteristík výstupného signálu. Odhad priebehu impulznej funkcie sústavy prostredníctvom korelačnej analýzy pseudonáhodného vstupného signálu je nadväzujúcou oblasťou uplatnenia štatistických charakteristík. Následne je simulovaný priebeh súboru realizácií náhodného signálu lineárnym systémom s overením stacionárnosti prostredníctvom podmienok definovaných v teoretickej časti. Praktické realizácie sa súčasne simulujú aj v rámci aproximovaného modelu tepelnej sústavy, ktorý je identifikovaný v prvej časti práce. Jednotlivé parciálne úlohy sú naformulované v podobe laboratórnych úloh a z nich vypracovaných vzorových protokolov.

Kľúčová slova: stochastický proces, štatistické charakteristiky, rozptyl, korelačné metódy, kovariančná funkcie, hustota pravdepodobnosti, distribučná funkcia

ABSTRACT

The aim of the bachelor thesis is to analyze random processes by application of sufficient statistical characteristics. The theoretical part describes basic statistical characteristics suitable for description of random processes. In line with it the conditions of weak stationarity, strong stationarity, and weak dependence are derived. Basic characteristics used are mean, variance, covariance and correlation coefficient. The practical part aims at realization of random signal passing through real thermic system while the parameters of regulation system are being modelled. The comparison of results of real as well as modelled system is realized and statistically evaluated. Finally the analysis is realized on ensemble of random processes realization. All the particular aim of the thesis are performed in the form of laboratory exercises.

Keywords: stochastic process, statistical characteristics, mean, variance, covariance, correlation methods, distribution function, density distribution function

Týmto chcem poďakovať vedúcemu diplomovej práce doc. Ing. Marekovi Kubalčíkovi,
Ph.D.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG
jsou totožné.

OBSAH

ÚVOD.....	9
I. TEORETICKÁ ČÁST	10
1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY ZÁKLADNÝCH ŠTATISTICKÝCH CHARAKTERISTÍK.....	11
1.1 ZÁKLADNÉ ŠTATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY	11
1.1.1 STREDNÁ HODNOTA	11
1.1.2 ROZPTYL	12
1.1.3 KOVARIANCIA	13
1.1.4 KORELAČNÝ KOEFICIENT	14
1.2 AUTOKORELAČNÁ A AUTOKOVARIAČNÁ FUNKCIA	14
1.2.1 AUTOKORELAČNÁ FUNKCIA	14
1.2.2 AUTOKOVARIAČNÁ FUNKCIA (ACF)	15
1.3 VZÁJOMNÁ KORELAČNÁ A VZÁJOMNÁ KOVARIAČNÁ FUNKCIA	16
1.3.1 VZÁJOMNÁ KORELAČNÁ FUNKCIA.....	16
1.3.2 VZÁJOMNÁ KOVARIAČNÁ FUNKCIA	16
2 STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU	17
2.1 STOCHASTICKÝ PROCES.....	17
2.1.1 DISTRIBUČNÁ FUNKCIA A HUSTOTA PRAVDEPODOBNOTI.....	18
2.1.2 HUSTOTA PRAVDEPODOBNOTI A DISTRIBUČNÁ FUNKCIA NORMÁLNEHO ROZDELENIA	19
2.2 VÝCHODISKÁ PRE DEFINOVANIE STACIONARITY	19
2.2.1 SILNÁ STACIONARITA	19
2.2.2 SLABÁ STACIONARITA	21
2.2.3 ODHADY MOMENTOVÝCH CHARAKTERISTÍK	21
II. PRAKTICKÁ ČÁST.....	25
3 ŠTATISTICKÁ ANALÝZA SIGNÁLU S NORMÁLNYM ROZDELENÍM.....	26
3.1 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ.....	26
3.1.1 IDENTIFIKÁCIA MODELU REGULOVANEJ SÚSTAVY.....	28
3.1.2 POROVNANIE VÝSTUPOV REÁLNEJ A APROXIMOVANEJ SÚSTAVY	33
3.2 VZOROVÝ PROTOKOL	34
3.2.1 ZADANIE	34
3.2.2 REALIZÁCIA NÁHODNÉHO SIGNÁLU V REÁLNEJ TEPELNEJ SÚSTAVE	34
3.2.3 REALIZÁCIA NÁHODNÉHO SIGNÁLU V SIMULOVANEJ TEPELNEJ SÚSTAVE.....	34
3.2.4 ANALÝZA ŠTATISTICKÝCH CHARAKTERISTÍK VSTUPNÝCH A VÝSTUPNÝCH SIGNÁLOV.....	35
3.2.5 DISKUSIA A ZÁVER	43
4 PREMERANIE SÚSTAVY PSEUDONÁHODNÝM BINÁRNÝM SIGNÁLOM	45
4.1 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ.....	45

4.2	VZOROVÝ PROTOKOL	46
4.2.1	ZADANIE	46
4.2.2	BUDENIE PNBS SIGNÁLU A PRECHOD TEPELNOU SÚSTAVOU	46
4.2.3	SIMULÁCIE BUDENIA SÚSTAVY PNBS SIGNÁLOM	50
4.2.4	DISKUSIA A ZÁVER	53
5	VYHODNOTENIE STACIONÁRNOSTI SÚBORU REALIZÁCIÍ NÁHODNÉHO PROCESU.....	54
5.1	TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ.....	54
5.2	VZOROVÝ PROTOKOL	55
5.2.1	ZADANIE	55
5.2.2	SIMULÁCIA SÚBORU REALIZÁCIÍ NÁHODNÉHO PROCESU.....	55
5.2.3	ANALÝZA STACIONÁRNOSTI SÚBORU REALIZÁCIÍ NÁHODNÉHO PROCESU	56
5.2.4	DISKUSIA A ZÁVER	57
ZÁVER		59
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....		61
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....		64
SEZNAM OBRÁZKŮ		65
SEZNAM TABULEK.....		67
SEZNAM PŘÍLOH.....		68
PRÍLOHY.....		70

ÚVOD

Pri skúmaní náhodných procesov v lineárnych sústavách má kľúčový význam otázka, ako sa zmenia štatistické charakteristiky realizácie náhodného procesu po prechode skúmanou sústavou. Pokiaľ je vstupná veličina náhodná, ergodická a stacionárna, bude výstupná veličina tiež náhodná, ergodická a stacionárna, avšak so zmenenými štatistickými charakteristikami. Pre vyhodnotenie vplyvu dynamických procesov na priebeh náhodných procesov je najvhodnejšie sledovať základné štatistické charakteristiky, korelačné funkcie a výkonovú spektrálnu hustotu. Táto práca sa prioritne zameriava na analýzu základných štatistických charakteristík s dôrazom na korelačné funkcie, ktoré sú kľúčové pre posúdenie vlastnosti procesov. Zmena spektrálnych charakteristík signálu po jeho prechode lineárnou sústavou nie je apriórnym zámerom tejto práce.

V prvej kapitole sú vysvetlené základné pojmy spájajúce sa s danou problematikou, a ktoré sú v ďalších kapitolách ďalej rozvinuté a použité. Zameriavam sa na definovanie základných štatistických charakteristík predovšetkým stredných hodnôt, rozptylov a korelačných funkcií.

Druhá kapitola nadväzuje na základné štatistické charakteristiky a načrtáva ich vzťah k stacionarite procesu. Východiskom je definovanie pojmu náhodný, resp. stochastický proces.

Tretia, štvrtá a piata kapitola sú súčasťou praktickej časti práce. Jednotlivé parciálne úlohy sú spracované formou laboratórnych zadaní do predmetu „*Modelovanie a identifikácia náhodných procesov*“, vrátane vypracovania ich vzorových riešení v podobe protokolov. V tretej kapitole je realizovaný prechod náhodného signálu s normálnym rozdelením reálnou aj identifikovanou modelovou sústavou. Ďalšia kapitola skúma vlastnosti zadanej sústavy po prechode pseudonáhodného binárneho signálu a analyzuje impulznú funkciu vo vzťahu ku korelačným charakteristikám signálov. Predmetom poslednej kapitoly je stacionaritu v širšom poňatí pri spracovaní súboru realizácií náhodných procesov. K zadaniam sú vypracované vzorové protokoly a programy v Matlabe verzia R2016b.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY ZÁKLADNÝCH ŠTATISTICKÝCH CHARAKTERISTÍK

Pri analýze súboru s veľkým počtom jednotiek, kde zisťovanie hodnôt každého prvku základného súboru by bolo neefektívne, využívame rôzne štatistické premenné. Ich prostredníctvom sme schopní aproximovať vlastnosti vybranej vzorky súboru na vlastnosti celého základného súboru. Nevyhnutným predpokladom je náhodný výber vzorky. Jednou zo základných možností spracovania údajov je ich usporiadanie do kontingenčných súborov a frekvenčných tabuliek. Z dôvodu prehľadnosti, ako aj jednoduchosti pri porovnávaní viacerých súborov je jednoduchšie vyjadrovať vlastnosti štatistického súboru pomocou len jednej veličiny-čísla. Rôzne štatistické veličiny tak poskytujú rôzne pohľady na rovnaký súbor jednotiek. V praxi často používame pojem deskriptívne štatistiky, ktoré zahŕňajú celú škálu štatistických veličín – od charakteristík polohy ako sú napr. stredné hodnoty, priemery, modusy a intervalové charakteristiky cez charakteristiky variability až po charakteristiky šikmosti a špičatosti rozdelenia [1].

1.1 Základné štatistické charakteristiky

1.1.1 Stredná hodnota

Charakteristiky polohy udávajú stred základného súboru, resp. vzorky okolo ktorej kolísajú všetky ostatné hodnoty. Predstavuje jeden zo spôsobov merania stredových charakteristík súboru. Medzi charakteristiky strednej hodnoty patria [2]:

- *Aritmetický priemer* je podiel úhrnu hodnôt voči početnosti súboru definovaný vzťahom (1)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

V prípade, ak zohľadňujeme váhy jednotlivých prvok súboru jedná sa o vážený aritmetický priemer súboru.

- *Modus* je najčastejšie sa vyskytujúca hodnota znaku v súbore znakov.
- *Medián* je definovaný ako stredná hodnota výberu usporiadaného podľa veľkosti. V prípade, že je počet jednotiek súboru párný, za medián sa považuje priemer dvoch susedných stredných hodnôt.

Pri práci s náhodnými veličinami možno odhad strednej hodnoty určiť nasledovne: [2] [3].

Majme náhodnú veličinu X s distribučnou funkciou $F(x)$. Potom $E(X)$ predstavuje strednú hodnotu náhodnej veličiny X . Vzťah (2) predstavuje strednú hodnotu pre diskrétno rozdelenie s pravdepodobnostnou funkciou $P(x)$. Ak predpokladáme súbor s rovnakou pravdepodobnosťou stavov náhodnej veličiny X s početnosťou N ,

t.j. $x(k) = 1, 2, 3, \dots, N$ platí pre odhad strednej hodnoty vzťah (3).

$$E(x) = \sum_x xP(x) \quad (2)$$

$$E(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) \quad (3)$$

Strednú hodnotu označujeme aj symbolom μ_x .

V prípade spojitého rozdelenia s hustotou $f(x)$ [2] platí vzťah (4).

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (4)$$

1.1.2 Rozptyl

Rozptyl udáva mieru variability náhodnej veličiny okolo jej strednej hodnoty [2]. Je definovaný ako stredná hodnota kvadrátu odchýlky náhodnej veličiny od jej strednej hodnoty. V prípade diskrétného rozdelenia s pravdepodobnostnou funkciou $P(x)$ platí [2]

$$D(x) = \sum_x (x - E(X))^2 P(x) \quad (5)$$

Následne pre spojité rozdelenie s hustotou $f(x)$ platí (6)

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \quad (6)$$

Pri odhade rozptylu náhodnej veličiny v tejto práci sa vychádza zo vzťahu [1]:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x(k) - \mu_x]^2 \quad (7)$$

Veličina σ je smerodajná odchýlka, $\mu + \sigma$ vymedzuje interval na funkcii rozdelenia hustoty pravdepodobnosti, v ktorom sa náhodná veličina nachádza s pravdepodobnosťou 68%. Je odmocninou z rozptylu [4].

1.1.3 Kovariancia

Udáva stupeň lineárnej závislosti medzi dvoma náhodnými veličinami X a Y . Je definovaná ako stredná hodnota súčiny odchýlok [2].

$$cov_{xy} = E(X - \mu_x)(Y - \mu_y) \quad (8)$$

Zo vzťahu zároveň vyplýva, že $cov_{xx} = D(X)$, t.j. kovariancia rovnakých náhodných veličín je rovná rozptylu.

Pokiaľ je kovariancia dvoch náhodných veličín rôzna od nuly, predpokladá to existenciu závislosti medzi nimi. Zo vzťahu (8) vyplýva [5]:

- Ak $C(X, Y) > 0$, medzi X a Y existuje priamy lineárny vzťah (9)
- Ak $C(X, Y) < 0$, medzi X a Y existuje nepriamy lineárny vzťah
- Ak $C(X, Y) = 0$, medzi X a Y neexistuje lineárny vzťah (nekorelovanosť).

Z hodnoty kovariancie sme schopní určiť smer lineárneho vzťahu, ale nie silu. Je to preto, lebo kovariancia závisí od jednotiek, v ktorých sú náhodné veličiny merané a nadobúda hodnoty z intervalu $(-\infty, \infty)$.

Zo vzťahu (8) zároveň vyplýva, že kovariancia charakterizuje nie len závislosť náhodných veličín, ale aj ich rozptyl [6]. V prípade, ak sa X len málo odlišuje od svojej strednej hodnoty bude celková kovariancia relatívne malá (vzhľadom na hodnoty premennej X a Y) aj napriek skutočnosti, že lineárna závislosť medzi nimi je veľká.

Kovarianciu mnohorozmernej náhodnej veličiny zapisujeme vo forme kovariačnej matice [2] (10).

$$Cov = \begin{bmatrix} Cov_{uu} & \cdots & Cov_{uy} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov_{yu} & \cdots & Cov_{yy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Jedná sa o symetrickú maticu, kde na diagonále sú rozptyly jednotlivých premenných.

1.1.4 Korelačný koeficient

Najpoužívanejšou charakteristikou intenzity lineárneho vzťahu medzi dvoma náhodnými veličinami je korelačný koeficient. V praxi najviac používané typy korelačných koeficientov predstavujú Pearsonov koeficient korelácie a Spearmanov koeficient korelácie¹. Pearsonov koeficient korelácie definujeme ako strednú hodnotu súčinu štandardizovaných náhodných veličín [5]:

$$r(X, Y) = E \left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right) = \frac{C(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \quad (11)$$

pre $\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} > 0$

Štandardizáciou náhodných veličín tak získavame bezrozmernú mieru lineárnej závislosti, ktorá nadobúda hodnoty z intervalu $<-1, 1>$. Zo vzťahu (11) vyplýva, že znamienko korelačného koeficienta závisí od kovariancie, podľa ktorej hodnotu koeficienta interpretujeme (9). Platí, že čím viac sa hodnota $|R|$ blíži k 1, tým je lineárna závislosť silnejšia a naopak. Extrémne hodnoty t.j. $(-1, 1)$ nadobúda v prípade, ak všetky realizácie X a Y ležia na priamke [5]. Na druhej strane pri nulovom koeficiente R veličiny X a Y považujeme za nekorelované, čo je nutnou avšak nie dostačujúcou podmienkou nezávislosti veličín X a Y .²

1.2 AUTOKORELAČNÁ A AUTOKOVARIAČNÁ FUNKCIA

1.2.1 Autokorelačná funkcia

V súlade s literatúrou [2] autokorelačná funkcia poskytuje informáciu o sile závislosti medzi veličinami x_t a x_{t+k} . Korelácia medzi náhodnými veličinami x_t a x_{t+k} však môže byť spôsobená ich koreláciou s veličinami $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t+k-1}$

Platí teda, že pokiaľ sa korelačná funkcia vzťahuje k sebe samej, tak sa jedná o autokorelačnú funkciu v tvare [8]:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (12)$$

¹ Spearmanov koeficient korelácie sleduje tzv. poradovú korelácu, kedy sa hodnoty realizácií X a Y nahrádzajú ich poradovými číslami. Popisuje monotónnu závislosť, nie len lineárnu, ale obecnú rastúcu alebo klesajúcu [5]. Vzhľadom na zameranie tejto práce sa ďalej využíva Pearsonov koeficient korelácie.

² Nekorelovanosť odpovedá nezávislosti v prípade, že veličiny X a Y pochádzajú z dvojrozmerného normálneho rozdelenia. [5]

resp .

$$R_{xx}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} x(k)x(k+i) \quad (13)$$

Prostřednictvím autokorelační funkce možno hodnotit vnútornú štruktúru náhodnej veličiny. Vyjadruje tak tesnosť väzby medzi poradnicami veličiny $x(t)$ posunutými o τ . Pokiaľ je v časovom okamžiku t_1 hodnota náhodnej veličiny $x(t_1)$ veľká, je málo pravdepodobné, že v časovom okamžiku $t_1 + \tau_1$, pričom τ_1 je veľmi malé, bude hodnota $x(t_1 + \tau_1)$ veľmi malá. Medzi členmi $x(t)$ a $x(t_1 + \tau_1)$ je veľmi tesná väzba a hodnota autokorelačnej funkcie sa preto blíži k maximálnej hodnote. Pokiaľ naopak uvažujeme o členoch $x(t_1 + \tau_2)$, kde τ_2 je veľké, je väzba medzi poradnicami už voľnejšia a hodnota autokorelačnej funkcie bude malá [6].

1.2.2 Autokovariačná funkcia (ACF)

Skúma tesnosť väzby medzi náhodnými veličinami x_t a x_{t+k} . Na rozdiel od autokorelačnej funkcie však charakterizuje aj rozptyl náhodných veličín. Pre autokovariačnú funkciu platia vzťahy [9]:

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [(x(t) - \mu)(x(t + \tau) - \mu)] dt \quad (14)$$

$$C_{xx}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} (x(k) - \mu)(x(k+i) - \mu) \quad (15)$$

V praxi sa často používa aj normované vyjadrenie autokovariačnej funkcie, ktoré je upravené o rozptyl náhodnej premennej [10].

Autokovariačná funkcia je symetrická okolo $k=0$ a nadobúda hodnoty v intervale $\langle -1, 1 \rangle$. Graf závislosti C_{xx} na k sa nazýva periodogram, pričom platí, $\rho_0 = 1$ a $|\rho_k| \leq 1$ pre $k \neq 0$.

Súhrn vlastností ACF v prípade stacionárneho stochastického procesu je nasledujúci [4]:

- ACF nultého rádu je rovná jednej ($\rho_0 = 1$)
- Absolútna hodnota autokovariačnej funkcie k -teho rádu je menšia alebo rovná hodnote autokovariačnej funkcie nultého rádu a absolútna hodnota ACF k -teho rádu je menšia alebo rovná jednej ($|\gamma_k| \leq \gamma_0$ $|\rho_k| \leq 1$)

- ACF je pre všetky k symetrická okolo $k=0$ ($\gamma_k = \gamma_{-k}$ a $\rho_k = \rho_{-k}$), čo znamená, že ACF sú párne a možno sa obmedziť len na $k \geq 0$.

1.3 VZÁJOMNÁ KORELAČNÁ A VZÁJOMNÁ KOVARIAČNÁ FUNKCIA

1.3.1 Vzájomná korelačná funkcia

Vzájomná korelačná funkcia je funkciou dvoch náhodných veličín $x(k)$ a $y(k)$. Vyjadruje tesnosť väzby medzi veličinou $x(k)$ a veličinou $y(k+i)$ ³ posunutú o i [6].

$$R_{xy}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} x(k)y(k+i) \quad (16)$$

1.3.2 Vzájomná kovariačná funkcia

Vzájomná kovariačná funkcia skúma tesnosť väzby medzi veličinami x_k a y_{k+i} . Na rozdiel od vzájomnej korelačnej funkcie charakterizuje aj rozptyly náhodných premenných. Platí, že v prípade ak sa niektorá z premenných x alebo y len málo odlišuje od svojho priemeru, bude hodnota kovariačnej funkcie malá aj napriek skutočnosti, že medzi obidvoma veličinami existuje silný lineárny vzťah [7]. Platí:

$$C_{yx}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} (x(k) - \mu)(y(k+i) - \mu) \quad (17)$$

³ V praktickej časti práce je kôli jednoznačnosti posunutie i pre diskkrétne veličiny uvádzané prostredníctvom symbolu τ .

2 STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

Javy, ktoré prebiehajú v čase, nazývame deje alebo procesy. Podľa charakteru rozlišujeme dve základné kategórie procesov, ktoré delíme na deterministické a stochastické. Deterministické deje sú tie, ktoré možno popísať analytickým vzťahom a dajú sa opakovať, ako napr. harmonický signál získaný z generátora [11].

2.1 Stochastický proces

Väčšinu veličín, ktoré pôsobia na reálny proces, má náhodný charakter, resp. zložky týchto veličín sú rušené náhodnými poruchami-šumom. Náhodnými veličinami rozumieme veličiny, ktoré nemožno vyjadriť analyticky. Pri týchto veličinách ich hodnota $x(t)$ v čase t neurčuje hodnotu $x(t+\Delta t)$ v čase $t+\Delta t$. Môžeme určiť len pravdepodobnosť $P(x,t)$, že hodnota tejto veličiny bude ležať v určitom intervale. V realite nemožno náhodné veličiny skúmať v časovom intervale $\langle -\infty, \infty \rangle$ a preto definujeme realizáciu náhodnej veličiny $x^{(l)}(t) = X(t)$ pre $0 \leq t \leq T_z$ a $x^{(l)}(t) = 0$ pre ostatné hodnoty t . (T_z -interval pozorovania). Súhrn všetkých realizácií je náhodný proces a môžeme ho popísať náhodnou funkciou $X(t)$. Náhodný, resp. stochastický proces definujeme ako funkciu času, ktorá môže nadobúdať pri jednotlivých časoch rôzne tvary [7].

V súlade s ďalšou literatúrou [13] je stochastický proces v čase usporiadaná množina náhodných čísel $\{y(s,t), s \in S, t \in T\}$, kde S predstavuje výberový priestor a T je indexová rada. Pre každé $t \in T$ je $y(.,t)$ náhodná veličina definovaná na výberovom priestore S . Pre každé $s \in S$ je $y(s,.)$ realizácia stochastického procesu definovaná na indexovej rade T , tj. usporiadaná rada čísel, z ktorej každé zodpovedá jednej hodnote indexovej rady. Časovú radu tak chápeme ako realizáciu stochastického procesu.

Náhodný proces $\{y(t), t \in T\}$ sa nazýva proces so spojitými stavmi (spojitý proces), ak stavový priestor S je interval. Ak je množina S spočítateľná, náhodný proces $\{y(t), t \in T\}$ sa nazýva proces s diskretnými stavmi.

Náhodný proces $\{y(t), t \in T\}$ sa nazýva proces so spojitým časom, ak časový priestor T je interval. Ak je množina T spočítateľná, ide o proces s diskretným časom, alebo náhodnú postupnosť.

Pre stochastický proces je vhodné odvodiť nasledujúce vzťahy, ktoré sú odvodené zo vzťahov (2),(3),(4),(5) [14]:

- Stredná hodnota $\mu_t = E(y_t)$
- Rozptyl $\sigma^2 = D(y_t) = E(y_t - \mu_t)^2$
- Distribučná funkcia $F(x)$, resp. hustota pravdepodobnosti $f(x)$
- Kovariačná funkcia C_{xy}
- Korelačná funkcia R_{xy} .

2.1.1 Distribučná funkcia a hustota pravdepodobnosti

Distribučná funkcia každému reálnemu číslu priraduje pravdepodobnosť, že náhodná veličina nenadobudne hodnoty väčšie ako toto číslo. Platí:

$$F(x) = P[X \leq x] \quad (18)$$

Vlastnosti distribučnej funkcie [7] [14]:

- $F(x)$ je nezáporná funkcia ohraničená 0 a 1
- Pravdepodobnosť, že náhodná veličina X leží v intervale $\langle a, b \rangle$ je daná:

$$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a)$$
- $F(x)$ je neklesjúca funkcia svojho argumentu t.j. pre $x_2 > x_1$ platí:

$$F(x_2) \geq F(x_1)$$
- Na koncoch intervalu $(-\infty, \infty)$ argumentu x platí pre distribučnú funkciu :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 .$$

Hustota pravdepodobnosti je deriváciou distribučnej funkcie [14]. Má základné vlastnosti :

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$

Distribučná funkcia, prípadne hustota pravdepodobnosti úplne charakterizujú náhodnú premennú [14].

2.1.2 Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia normálneho rozdelenia

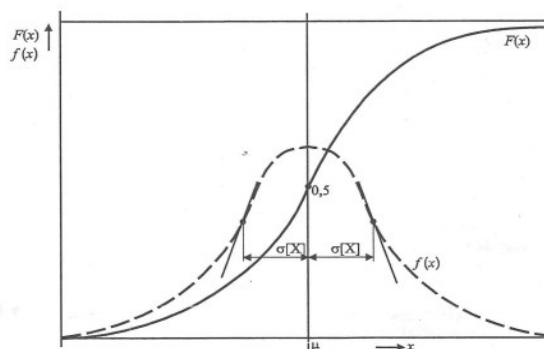
Náhodná veličina X má normálne rozdelenie s parametrami $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ pokiaľ má funkciu hustoty pravdepodobnosti [14]:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (19)$$

a distribučnú funkciu

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (20)$$

Predstavuje najdôležitejšie rozdelenie spojitej náhodnej veličiny. Používa sa v prípadoch, kde kolísanie náhodnej veličiny je spôsobené súčtom veľkého počtu malých vzájomne nezávislých javov a vplyvov.



Obrázok č. 1 Graf distribučnej funkcie a hustoty pravdepodobnosti pre normálne rozdelenie

Pre náhodnú veličinu X s normálnym rozdelením platí [14]:

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

2.2 Východiská pre definovanie stacionarity

2.2.1 Silná stacionarita

Náhodný proces $\{x(t), t \in T\}$ je striktné stacionárny (stacionárny v užšom zmysle), ak pre každé $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$, $x_1, \dots, x_n \in S$ a ľubovoľné $h \in T$ také, že $t_1+h, \dots, t_n+h \in T$ platí [4] [7]:

$$F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (21)$$

kde - ak S je spočítateľná množina, $\{X_t, t \in T\}$ predstavuje náhodný proces s diskrétnymi stavmi; ak S je interval, $\{X_t, t \in T\}$ predstavuje náhodný proces so spojitémi stavmi;

Z definície vyplýva, že v stacionárnom procese majú všetky náhodné veličiny $X_t, t \in T$ identické rozdelenie, pretože distribučná funkcia je invariantná voči posunutiu v čase [4].

Ako dôsledok toho, že združená distribučná funkcia jednoznačne určuje marginálne rozdelenia náhodných veličín, stacionarita n -tého rádu implikuje stacionaritu k -tého rádu pre $k \leq n$. Striktná stacionarita zaručuje, že všetky náhodné veličiny z procesu majú rovnaké rozdelenie a v prípade, že $E X_t^2 < \infty$ sú stredná hodnota procesu μ_t a rozptyl procesu σ_t^2 konštantné funkcie. Ak označíme $E X_t = \mu$, potom pre autokovariačnú funkciu striktné stacionárneho procesu platí [16]:

$$\gamma(t_1, t_2) = (X_{t_1}, X_{t_2}) - \mu^2 = E(X_{t_1+k} X_{t_2+k}) - \mu^2 \quad (22)$$

pre ľubovoľné $t_1, t_2, k \in Z$.

Rovnosť $E(X_{t_1} X_{t_2}) = E(X_{t_1+k} X_{t_2+k})$ plyní z faktu, že vektory $(X_{t_1}, X_{t_2})^T$ a $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k})^T$ majú rovnaké rozdelenie.

Pomocou substitúcie $t_1 = t - k, t_2 = t$ dostaneme [16]:

$$\gamma(t - k, t) = \gamma(t, t + k) = \gamma_k \quad (23)$$

Autokovariačná funkcia teda nezávisí na konkrétnych časoch t_1, t_2 , ale je funkciou rozdielu $t_2 - t_1$. Rovnaká vlastnosť platí aj pre autokorelačnú funkciu.

Striktná stacionarita zabezpečuje mnoho užitočných vlastností, ale v reálnych aplikáciách je len ťažko overiteľná, pretože vyžaduje znalosť združených distribučných funkcií. Preto sa v analýze časových radov častejšie používa stacionarita do momentov 2. rádu označovaná aj ako slabá stacionarita [4].

2.2.2 Slabá stacionarita

Hovoríme, že náhodný proces $\{X(t), t \in T\}$ je slabo stacionárny, ak má v čase konštantnú strednú hodnotu a rozptyl a kovariačnú funkciu γ_k invariantnú voči posunutiu v čase, t.j. ak platia podmienky: [4]

$$1. E(X_t) = \mu = \text{konšt.}$$

$$2. \sigma_t^2 = D(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2 \quad \text{pre } t=1, \dots, n$$

3. $\gamma(s, r) = \text{cov}(X_s, X_r) = E[(X_s - \mu_s)(X_r - \mu_r)]$ t.j. *korelačná funkcia je len funkciou (s-r), t.j. závisí len od toho, ako sú od seba X_s, X_r v čase vzdialené a nie od toho, na akom úseku časovej osi sa nachádzajú. Rozdiel s-r nazývame posunutie a označujeme ho k ($k=s-r$).*

Časový rad ako jedna realizácia stochastického procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ je teda slabo stacionárny, ak základné štatistické charakteristiky (stredná hodnota, rozptyl, a kovariancia) ostanú konštantné v priebehu celého časového radu. Stacionárny rad je rovnomerne vyvážený (t.j. s konštantným rozptylom) okolo konštantnej úrovne (t.j. má konštantnú strednú hodnotu), pričom závislosť medzi jeho dvoma ľubovoľnými pozorovaniami závisí len od ich vzájomnej časovej vzdialenosti (t.j. na počte časových úsekov k, ktoré medzi nimi ležia) a nie na ich skutočnej polohe v čase. Stacionárny proces s nulovou strednou hodnotou sa nazýva centrovaný stacionárny proces [17].

2.2.3 Odhady momentových charakteristík

Pri väčšine náhodných veličín, aj keď sú ich realizácie už na prvý pohľad veľmi rozdielne, môžeme odhadovať ich štatistické charakteristiky, nakoľko pri dostatočne dlhej dobe pozorovania T_z sú pre realizáciu rovnakej náhodnej veličiny identické [7].

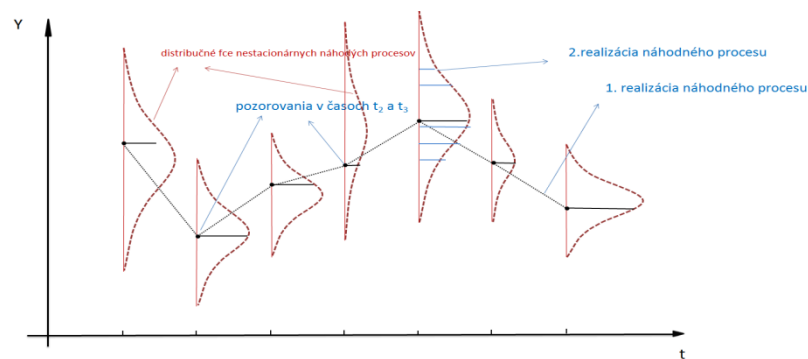
Definícia jednotlivých štatistických charakterisík, vychádza z tvz. zákona veľkých čísel, ktorý je základným zákonom pravdepodobnosti a hovorí, že všetky štatistické predpoklady sú platné len v prípade, ak skúmame daný jav vo veľkom súbore, t.j. ak skúmame veľké množstvo prípadov.

Neznáme stredné hodnoty náhodných veličín z obecného časového radu tak môžeme odhadnúť skupinovým priemerom v prípade, ak máme k dispozícii dostatok realizácií.

V praxi ale často máme v konkrétnom čase t k dispozícii iba jedinú realizáciu, z ktorej nemá zmysel počítať skupinový priemer [7].

Predpokladáme realizáciu stochastického procesu časového radu údajov $y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_T$, kde index t - časový index, index T - vybraná vzorka časového radu údajov.

Každá realizácia y_t je odvodená z funkcie hustoty rozdelenia pravdepodobnosti náhodne premennej. Jedna realizácia náhodného procesu predstavuje spojnicu náhodných pozorovaní v jednotlivých časových intervalov t (obrázok č.2) [18]



Obrázok č. 2 Momentové charakteristiky stochastického procesu nestacionárneho

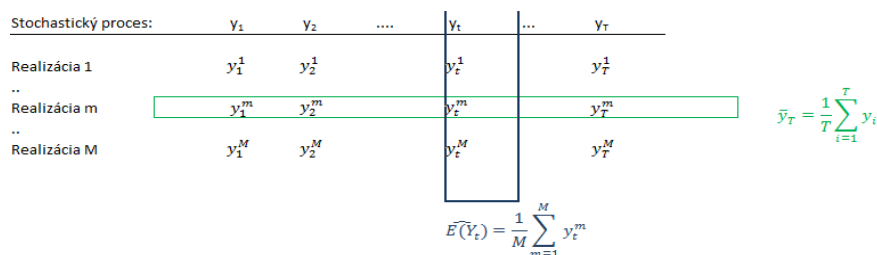
Priemer súboru realizácií v zvolených časových intervaloch T , tak predstavuje priemer viacerých (vzorkových) realizácií stochastického procesu. Prvý moment súboru realizácií náhodného procesu, t.j.strednú hodnotu možno potom odhadnúť vzťahom [18]

$$\widehat{E}(Y_t) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M y_t^m \tag{24}$$

V porovnaní so strednou hodnotou jednej realizácie stochastického procesu t.j.

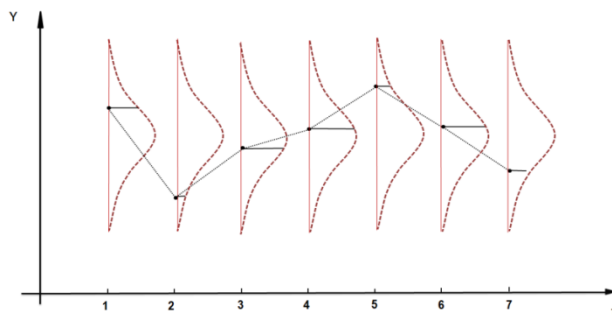
$$\bar{y}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T y_i \tag{25}$$

je jednoznačné, že sa jedná o odlišné momenty (obrázok č.3) [18].



Obrázok č. 3 Skupinové momentové charakteristiky

U stacionárných časových radov je však možné nahradit' strednú hodnotu súboru realizácií priemerom 1 realizácie v čase $t \in \langle 1, T \rangle$ (t.j. vzťah (24) vzťahom (25)) vzhľadom k tomu, že za predpokladu stacionarity majú všetky náhodné veličiny rovnakú strednú hodnotu (obrázok č.4)



Obrázok č. 4 Stacionárny súbor realizácií náhodného procesu

V obrázku je prezentovaný stacionárny proces s rovnakou strednou hodnotou každej realizácie, rovnakým rozptylom a kovarianciou (y_t, y_{t-h}) závislou na hodnote rozdielu $(t-h)$. Pri zohľadnení predpokladu tzv. slabej závislosti, t.j. že časové rady y_t a y_{t-h} sú nezávislé pre $h \rightarrow \infty$ platí, že [18]:

$$\bar{y}_T \rightarrow E(y_t) \quad (26)$$

za predpokladu, že máme k dispozícii realizáciu X_1, \dots, X_n stacionárneho časového radu.

Odhadom strednej hodnoty je potom výberový priemer \bar{X}_n , pre ktorý platí [12]:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \quad (27)$$

Odhad autokovariačnej funkcie γ_k získame obdobne ako u strednej hodnoty, t.j. časovým priemerom:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+k} - \bar{X}_n) \quad (28)$$

Výberovú autokorelačnú funkciu definujeme pomocou výberovej autokovariačnej funkcie predpisom [16]:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+k} - \bar{X}_n)}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_n)^2} \quad (29)$$

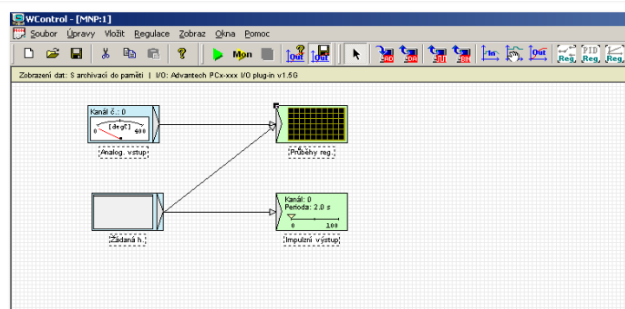
II. PRAKTICKÁ ČÁST

3 ŠTATISTICKÁ ANALÝZA SIGNÁLU S NORMÁLNÝM ROZDELENÍM

Praktická časť práce sa zameriava na využitie vhodných štatistických charakteristík pre porovnanie vlastností náhodného signálu po prechode lineárnou sústavou. Predmetom skúmania sú dva typy náhodných signálov na vstupe do lineárnej sústavy. Náhodný signál s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$ so strednou hodnotou μ , $\mu \in (-\infty, \infty)$ a rozptylom σ^2 , $\sigma^2 > 0$, resp. s Gausovým rozdelením s $\mu=0$ a rozptylom σ^2 . Pseudonáhodný binárny signál o konštatnej a reprodukovateľnej perióde, generovaný podľa jednoznačne definovaného rekurentného vzorca, so strednou hodnotou μ , $\mu \in (0, 1)$ a rozptylom σ^2 , $\sigma^2 = 1$. Pre jeho inicializáciu sa využívajú prvky číslicovej techniky, resp. n-stupňový posuvný register so spätnou väzbou. Úloha je spracovaná v podobe laboratórneho zadania spolu s vypracovaným riešením a vzorovým protokolom.

3.1 Teoretické východiská

Obsahom kapitoly je generovanie náhodného signálu, realizácia jeho prechodu lineárnou sústavou a vyhodnotenie jeho štatistických charakteristík. Praktické merania prebiehajú na reálnej tepelnej sústave (sústave s teplotne premenlivým odporom). Na vstup sústavy je privedený signál, ktorý zabezpečuje náhodné skokové zmeny príkonu. Vstupná veličina, predstavuje žiadanú úroveň príkonu zdroja a je riadená prostredníctvom riadiaceho a regulačného programového systému „WCONTROL“.



Obrázok č. 5 Programové prostredie WControl

Pri realizácii prechodových dejov je potrebné zabezpečiť ustálenie teploty na východiskovej hodnote w . Následne zvyšujem akčnú veličinu o náhodnú hodnotu na novú úroveň žiadanej hodnoty w_2 , pričom ju ponechám pôsobiť konštantnú, dostatočne dlhú dobu, aby bolo možné sledovať zmenu chovania sústavy pri novej úrovni žiadanej hodnoty. Potom opätovne skokom mením žiadanú hodnotu mimo úrovne pracovného bodu a opäť sledujem zmenu správania sústavy.

Náhodný signál na vstupe do sústavy bol generovaný v prostredí Matlab príkazom *randn()*, ktorý generuje pseudonáhodné čísla s normálnym (Gaussovým) rozdelením. Náhodne generovaná sekvencia čísel s $\mu = -0,267$ bola posunutá do kladnej časti reálnej osi tak, aby sme získali signál s $\sigma^2 <0, \infty>$ a $\mu >0$. Následne bol realizovaný prepočet tak, aby ustálená hodnota bola rovná jednej (*Tabuľka č.1*). Ako vhodný interval pôsobenia žiadanej hodnoty bol zvolený interval 30 sekúnd. Perióda realizácie sústavy bola upravená na 2100 sekúnd.

Zaznamenané úrovne výstupu sú zobrazené v obrázku č.6.



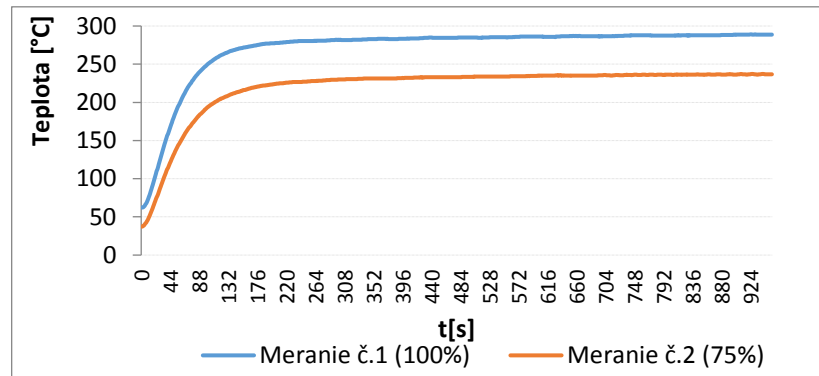
Obrázok č. 6 Výstupy z merania regulačnej sústavy-Wcontrol

Súčasťou praktickej časti zadania bolo aj simulovanie realizácie náhodného signálu v modelovej sústave tak, aby bolo možné navzájom porovnať výstupy. Model sústavy bol identifikovaný tak, aby v čo najvyššej miere zodpovedal reálnej tepelnej sústave. Pri jeho identifikácii som postupoval v zmysle dostupnej literatúry [13] [14].

3.1.1 Identifikácia modelu regulovanej sústavy

3.1.1.1 Prechodová charakteristika

Pre realizácií regulovanej sústavy bola dva-krát zmeraná prechodovú charakteristiku sústavy. Hodnota jednotkového skoku na vstupe bola nastavená v prvom prípade na úroveň 75% príkonu, druhá na úrovni 100% príkonu sústavy (obrázok č.7).



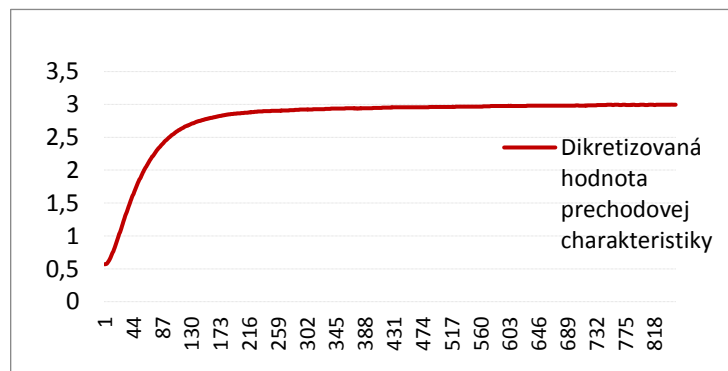
Obrázok č. 7 Namerané prechodové charakteristiky

Namerané prechodové charakteristiky boli následne diskretizované podľa

$$f_i = \frac{\sum_{k=1}^N \text{sign}(\Delta u_k) y_{ik}}{\sum_{k=1}^N |\Delta u_k|} \quad (30)$$

kde N -počet meraní, Δu_k -skoková zmena vstupnej veličiny, y_i -výstupná hodnota i -teho vzorkovacieho intervalu pre k -te meranie.

Výsledná prechodová charakteristika tak vznikla ako priemer poradníc obidvoch meraní, pričom zohľadňuje aj dané zosilnenie sústavy.



Obrázok č. 8 Výstupná priemerná prechodová charakteristika

Pri stanovení zosilnenia sme vyšli zo vzťahu [6]:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta u} \left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\%} \right] \quad (31)$$

Maximálny možný príkon (100%, hodnota 1) je jednotkový skok. Zosilnenie k je potom 3,39. Z nameraných hodnôt prechodovej charakteristiky aproximujeme prechodovú funkciu. Funkciu aproximujeme statickou sústavou druhého rádu s rôznymi časovými koeficientami, nakoľko počiatkové posunutie predpokladám nízke a vzhľadom na hodnotu $\tau_u < 0.1$. Pomocou Strejcovej metódy boli odhadnuté počiatkové hodnoty časových konštánt T_1 a T_2 sústavy.

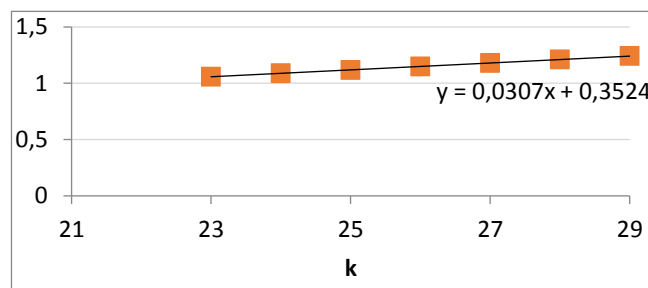
V prvom kroku sme identifikovali inflexný bod podľa [6] [7] [8]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t^i) - y(t^{i-1})}{t^i - t^{i-1}} = \max \quad (32)$$

Inflexný bod je v bode maximálnej zmeny diskretizovanej prechodovej charakteristiky, t.j. $\frac{\Delta y}{\Delta t} = 0,0312551$ pre $k=27$.

Odhad regresnej priamky pre inflexný bod vychádzajúci z rovnice priamky je nasledovný:

$$y = 0,0307x + (0,3524 - 05692)$$



Obrázok č. 9 Odhad regresnej priamky

3.1.1.2 Strejcova metóda - určenie aproximačného prenosu $F_a(s)$

A) výpočet doby prietahu a doby nábehu

Doba prietahu T_u a doba nábehu T_n sú časové úseky vymedzené dotyčnicou k prechodovej charakteristike. Vychádzame z koeficientov regresnej priamky $y_t = a + b_t x$:

$$T_u = -\frac{a}{b} \quad \text{resp.} \quad T_n = \frac{\Delta y(t^m)}{b} \quad (33)$$

$$T_u = 7,06 \text{ s}$$

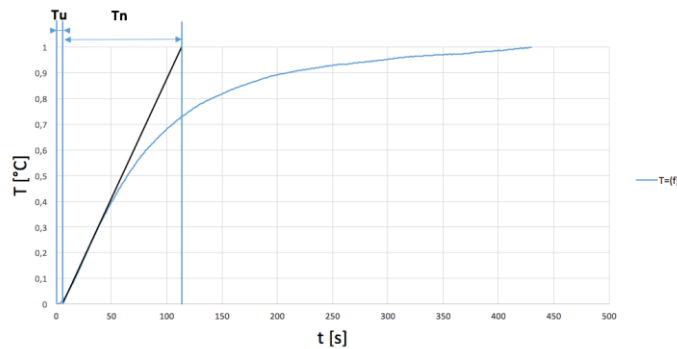
$$T_n = 90,74s$$

Pomer časových konštánt τ_u predstavuje počiatočný odhad časových konštánt T_1 a T_2 , t.j. prvá iterácia v rámci uplatnených numerických metód aproximácie.

$$\tau_u = \frac{T_u}{T_n} = 0,049$$

Nakoľko $\tau_u < 0.1$ pre aproximáciu prechodovej sústavy bola zvolená sústava n-tého rádu s rôznymi časovými konštántami. Prenos sústavy bol aproximovaný podľa vzťahu [21, 6]:

$$G(s) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad (34)$$



Obrázok č. 10 Určenie parametrov regulovanej sústavy pomocou Strejcovej metódy

3.1.1.3 Strejcova metóda - výpočet časových konštánt T_1 , T_2

Z prechodovej charakteristiky sa zistia hodnoty pre $y(t_1)=0,72\Delta y_{\max}$ [21]

$$y(t_1)=0,72\Delta y_{\max}(t)$$

$$y(t_1)=2,574 \rightarrow t_1=80$$

Súčet časových konštánt T_1+T_2 :

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1,2564} = \frac{80}{1,2564} = 63,69$$

Pokiaľ je známy súčet časových konštánt dopočítame hodnotu t_2 :

$$t_2 = 0,3574x(T_1 + T_2) =$$

$$t_2 = 0,3574 * t_1$$

$$t_2 = 22,76s$$

Pre túto hodnotu odčítame príslušnú poradnicu prechodovej charakteristiky:

$$y(t_2) = 0,20$$

Z grafu pre $y(t_2)/\Delta y_{max}(t)$ určíme hodnotu τ .

$$y(t_2)\Delta y_{max}(t) = 0,10$$

$$\tau = \frac{T_2}{T_1} = 0,33$$

Výpočet časových konštánt T_1 a T_2 :

$$T_1 + T_2 = 63,69 \rightarrow T_1 = 63,69 - T_2$$

$$\tau = \frac{T_2}{63,69 - T_2}$$

$$\tau * (63,69 - T_2) = T_2$$

$$T_2 = 0,33 * (63,69 - T_2)$$

$$T_2 = 10,616$$

$$T_1 = 63,69 - T_2$$

$$T_1 = 53,058s$$

Prenos aproximačnej sústavy druhého rádu s rôznymi časovými konštantami podľa vzťahu (35):

$$G(s) = \frac{3,39}{(53,058s+1)+(10,616s+1)} = \frac{3,39}{563,26s^2+63,674s+1} \quad (35)$$

3.1.1.4 Výpočet prechodovej funkcie a diskretizácia odvodenie diferenčnej

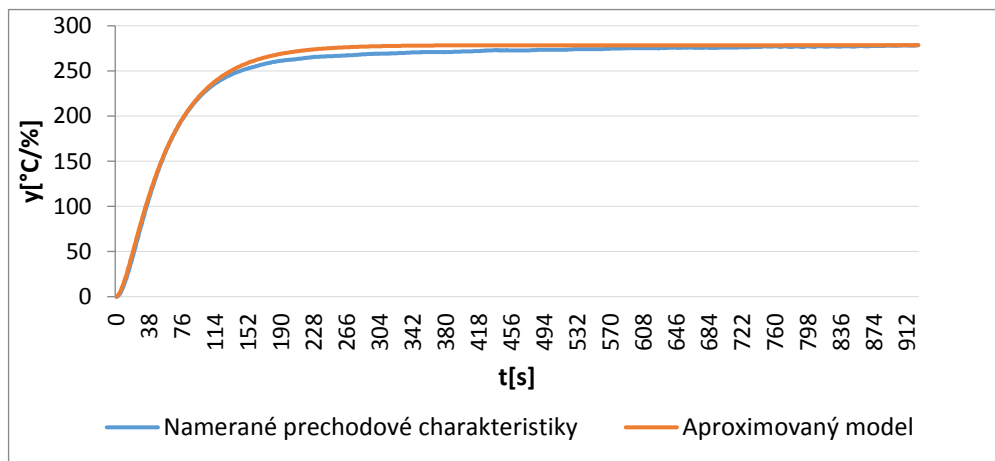
Následne sa pomocou Heavisidovho rozvoja a Laplaceovej transformácie získa prechodová funkcia $h(t)$ daná [6]:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (36)$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{3,39}{s(53,058s + 1) + (10,616s + 1)} \right\}$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{3,39}{s} - \frac{224,8566}{53,058s + 1} + \frac{7,397}{10,616s + 1} \right\}$$

$$h(t) = 3,39 - 1,77e^{-0,0941t} + 4,237e^{-0,188t}$$



Obrázok č. 11 Porovnanie priebehov prechodovej funkcie

Zadaný spojité model bol analyticky prepočítaný na diskretný z-model. Pri výbere periódy vzorkovana T_v , bol použitý rovnaký vzorkovací interval ako pri reálnej tepelnej sústave, t.j. $T_\theta = 30$ vzorkov. Pomocou slovníku Laplaceovej a Z-transformácie bola prevedená diskretizácia prechodovej funkcie:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{3,39}{s} - \frac{4,238}{\frac{1}{53,058} + s} + \frac{0,6968}{s + \frac{1}{10,616}} \right\}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ 3,39 \frac{z}{z-1} - 4,238 \frac{z}{z - e^{-0,0189T}} + 0,696 \frac{z}{z - e^{-0,0942T}} \right\}$$

Po úpravách pre $T=30$ dostaneme vzťah:

$$G(z) = \frac{1,033z + 0,3447}{z^2 - 0,6274z + 0,03366} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Následne prevedieme prepis $G(z)$ na diferenčnú rovnicu:

$$G(z^{-1}) = \frac{1,033z^{-1} + 0,3447z^{-2}}{1 - 0,6274z^{-1} + 0,03366z^{-2}} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}$$

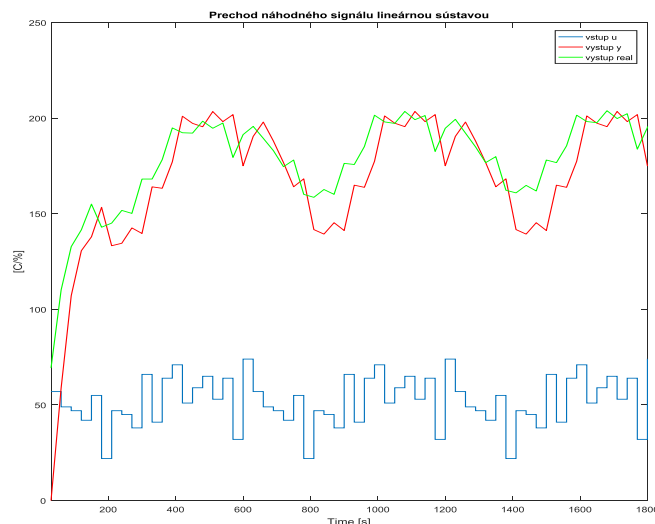
$$y(k) = 0,627y(k-1) - 0,03366y(k-2) + 1,033u(k-1) + 0,3447u(k-2) \quad (37)$$

Riešenie danej diferenčnej rovnice pre postupnosť vstupnej veličiny spočíva v rekurentnom výpočte poradníc výstupnej veličiny $y(k)$ pre $k=1,2,\dots,N$. Riešenie bolo realizované v systéme Matlab (*príloha č.1*).

3.1.2 Porovnanie výstupov reálnej a aproximovanej sústavy

Náhodný signál po prechode reálnou aj aproximovanou lineárnou sústavou dosahuje obdobné charakteristiky. Je zrejmé, že výstupná veličina y je lineárne závislá na zmene vstupného signálu. Platí to s určitým oneskorením, resp. nábehom sústavy na pracovnú teplotu, ktorú sústava dosiahla pri $t \approx 150$ s. Vstupná skoková zmena príkonu je zobrazená ako schodová funkcia s dĺžkou schodku rovnú perióde snímania, t.j. 30 s.

Z obrázka je tiež evidentný relatívne zhodný priebeh výstupnej veličiny reálnej tepelnej sústavy a aproximovanej modelovanej sústavy (výstup y).



Obrázok č. 12 Prechod náhodného signálu lineárnou tepelnou sústavou-modelovaná vs. reálna sústava

Identifikovaná sústava tak zodpovedá reálnej sústave a bola preto použitá v úlohách pri simulačných procesoch.

3.2 Vzorový protokol

3.2.1 Zadanie

1. V lineárnej sústave t.j. v prostredí reálnej tepelnej sústavy simulujte prechod náhodného signálu s normálnym rozdelením.
2. V prostredí Matlab nasimulujte prechod náhodného signálu s Gaussovým rozdelením lineárnou sústavou.
3. Porovnajzte štatistické charakteristiky vstupného a výstupného signálu v reálnej a modelovej sústave a zhodnoťte zistenia.

3.2.2 Realizácia náhodného signálu v reálnej tepelnej sústave

V súlade s východiskami definovanými v kapitole 3.1 bol v laboratórnom prostredí realizovaný náhodný signál s Gaussovým rozdelením, ktorým bola cez rozhranie WControl riadená sústava s výstupnou veličinou $t[^\circ\text{C}/\%]$. Vstupná veličina určuje žiadanú hodnotu príkonu zdroja, ktorým sa budí teplotne premenlivý odpor. Meranie bolo uskutočnené v časovom intervale $t \in \langle 0, 1800 \rangle$. Vstupnú veličinu som zobrazil schodovitou funkciou s periódou vzorkovania $t = 30\text{s}$. Priebehy vstupnej a výstupnej veličiny sú zaznamenané v obrázku č.12.

3.2.3 Realizácia náhodného signálu v simulovanej tepelnej sústave

Pri simulácii tepelnej sústavy bol použitý aproximovaný model reálnej tepelnej sústavy. Identifikácia modelu a odvodenie prechodových funkcií sú súčasťou prechádzajúcich kapitol. Výsledná použitá prenosová funkcia je uvedená v kapitole 3.2. a modelovanie v prostredí matlab je súčasťou prílohy č.1. Porovnanie priebehov výstupných signálov reálnej a modelovej sústavy je v obrázku č. 12.

3.2.4 Analýza štatistických charakteristík vstupných a výstupných signálov

3.2.4.1 Zhodnotenie štatistických charakteristík signálov reálnej tepelnej sústavy

Z priebehu vstupného aj výstupného signálu sú evidentné obdobné vlastnosti základných štatistických charakteristík. Stredná hodnota vstupného signálu bola vypočítaná podľa vzorca (3) pri rozptyle vychádzame zo vzťahu (7).

	u	y_r
Stredná hodnota	52,1	179,16
Rozptyl	208	815,92
Štandardná odchýlka	14,48	28,56

Tabuľka č. 1 Stredné hodnoty a rozptyly
vstupného a výstupného signálu

Prechodom signálu došlo k značnému posunu stredných hodnôt ako aj variability amplitúdy výstupného signálu.

Stupeň lineárnej závislosti medzi vstupnou a výstupnou veličinou sledujem prostredníctvom kovariancie, resp. koeficientu korelácie (8), resp. (11).

	u, y
Kovariancia	226,19
Koef. korelácie	0,55

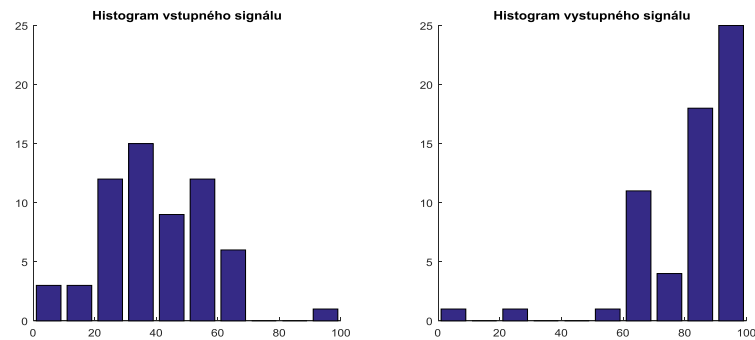
Tabuľka č. 2 Kovariancia a
koeficient korelácie

Je evidentné, že výstupný signál je do istej miery pozitívne korelovaný (stredná úroveň korelácie) so vstupným signálom. Keďže kovariancia aj korelačný koeficient sú kladné, možno predpokladať pozitívnu lineárnu závislosť medzi obidvoma signálmi.

Zo vzťahu (10) vychádzam pri výpočte korelačnej matice:

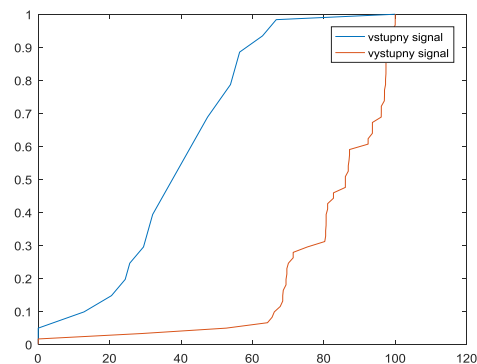
$$C(X) = \begin{pmatrix} 208 & 63,7 \\ 63,7 & 1308,4 \end{pmatrix}$$

V ďalšej časti porovnávam zmienu signálu z pohľadu distribučnej funkcie a funkcie hustoty pravdepodobnosti:



Obrázok č.13 Histogram rozdelenia početností vstupného a výstupného signálu

Z histogramu rozdelenia početností je evidentný jednak už spomínaný posun stredných hodnôt výstupného signálu, ako aj asymetria tvaru rozdelenia početností. Vstupný signál nadobúda (s ohľadom na skreslenie dané počtom pozorovaní) tvar krivky blízky tvaru normálneho rozdelenia početností. Výstupný signál nadobúda po prechode sústavou špičatejšie rozdelenie so sklonom k negatívnej (pravostrannej) asymetrii. Je to spôsobené malým počtom meraní, v simulovanej sústave bol preto počet meraní zvýšený.

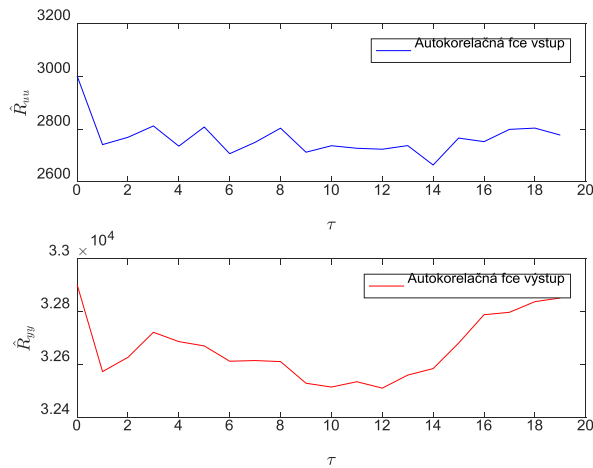


Obrázok č.14 Graf kumulatívnej distribučnej funkcie vstupného a výstupného signálu

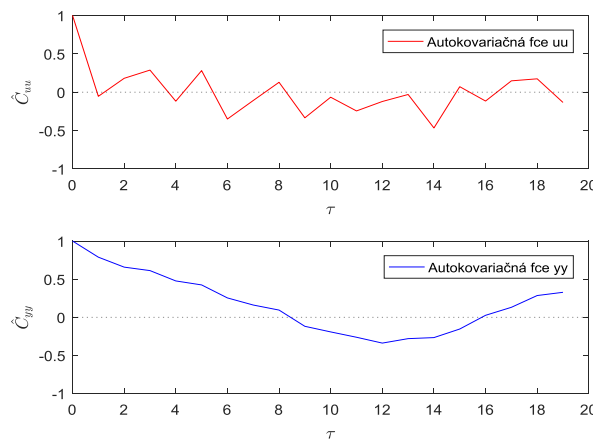
Graf distribučnej funkcie, resp. kumulovanej distribučnej funkcie tiež poukazuje na posun v distribúcií početností výstupného signálu smerom k špičatejšiemu, pravostranne asymetrickému rozdeleniu. K ideálnemu tvaru distribučnej funkcie by bolo možné dospieť zvyšovaním počtu meraní.

V poslednej časti štatistickej analýzy skúmam autokorelačné a vzájomné korelačné funkcie vstupov a výstupov. Odhad autokorelačnej funkcie poukazuje v súlade

s očekávaniami, že vzájomná závislosť medzi poradnicami vstupného signálu s rastúcim τ^4 klesá, resp. kolíše okolo konštantnej hodnoty (príloha č.2). Pre výstupný signál je evidentný (po počiatocnom poklese) konštantnejší priebeh autokorelačnej funkcie s rastúcim τ .



Obrázok č.15 Graf autokorelačnej funkcie vstupného a výstupného signálu

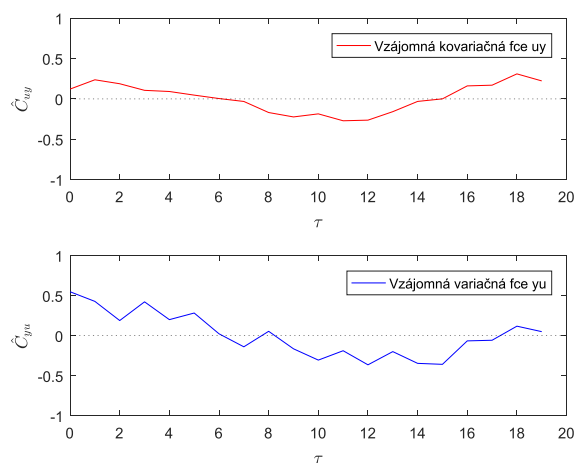


Obrázok č.16 Graf autokovariačnej funkcie vstupného a výstupného signálu

⁴ τ -posunutie pre diskrétny systémy. Vzhľadom na používanie v dostupnej literatúre vo vzťahoch (13),(15),(16) a (17) nahrádza posunutie i .

Priebeh autokovariačnej funkcie bol kôli prehľadnosti normalizovaný, tak aby hodnota pre $\tau=0$ bola 1⁵. Na rozdiel od korelačnej funkcie charakterizuje nie len závislosť náhodných veličín, ale aj ich rozptyl (*príloha č.3*).

Z pohľadu analýzy signálu je kľúčové overenie, či pre dané posunutie ($\tau=n/4$) sa hodnota autokovariačnej funkcie významne odlišuje od nuly⁶. V našom prípade možno pre všetky skúmané τ konštatovať, že hodnota \hat{C}_{UU} je blízka nulovej hodnote, čo napovedá stochastičnosti vstupného signálu. Pri analýze priebehu výstupného signálu je evidentný miernejší pokles \hat{C}_{yy} smerom k nule, čo je typický prejav autoregresného procesu [11]. Platí, že až po $\tau \leq 3$ je úroveň \hat{C}_{yy} štatisticky významná a až od $\tau > 3$ sa štatisticky neodlišuje od 0.



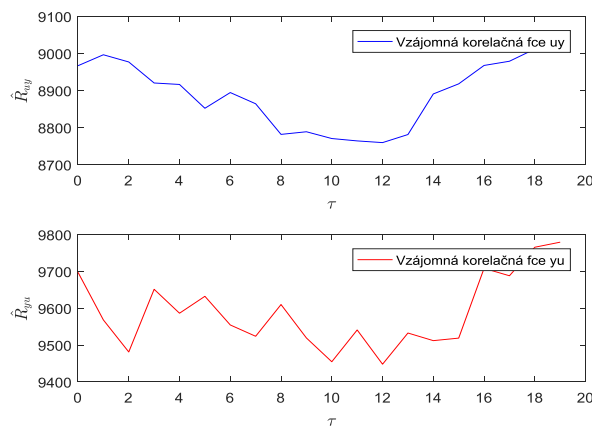
Obrázok č.17 Graf vzájomnej kovariačnej funkcie vstupného a výstupného signálu

Vzájomné kovariačné funkcie medzi $u(k)$ a $y(k+\tau)$ ako aj medzi $y(k)$ a $u(k+\tau)$ boli dopočítané podľa vzťahu (15) a zobrazené v Matlab prostredí (*príloha č.4*). Z priebehu je zrejماً pomerne silná pozitívna závislosť medzi vstupnou a reálne nameranou výstupnou veličinou, ktorá podľa očakávania s rastúcim posunutím klesá a kolíše okolo nulovej hodnoty.

⁵ V súlade s literatúrou [14] ak je X náhodná veličina s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma)$, potom normovaná náhodná veličina U k náhodnej veličine X má normálne rozdelenie $N(0,1)$. Normované korelačné koeficienty sú v pomere k súčinu štandardných odchýliek premenných X a Y .

⁶ V súlade s literatúrou [11]

Vzájomnú závislosť medzi náhodnými veličinami u a y (resp. ich poradnicami) pričom sa neberie do úvahy rozptyl obidvoch veličín zobrazuje priebeh vzájomnej korelačnej funkcie (príloha č.5).



Obrázok č.18 Graf vzájomnej korelačnej funkcie vstupného a výstupného signálu

3.2.4.2 Zhodnotenie štatistických charakteristík signálov modelovej sústavy

Po prechode náhodného signálu s normálnym rozdelením v simulačnej sústave boli vyhodnotené rovnaké štatistické charakteristiky ako v prípade reálnej sústavy. Stredná hodnota a rozptyl boli nasledovné:

	u	y_r
Stredná hodnota	52,1	168,37
Rozptyl	208	616,3
Štandardná odchýlka	14,48	36,17

Tabuľka č.3 Stredná hodnota a rozptyl aproximovanej sústavy

Obdobne ako v prípade reálnej sústavy došlo prechodom signálu sústavou k jeho posunutiu k vyššej strednej hodnote a väčšiemu rozptylu v porovnaní so vstupným signálom. V simulovanej sústave je rozptyl o niečo väčší v dôsledku zosilnenia sústavy.

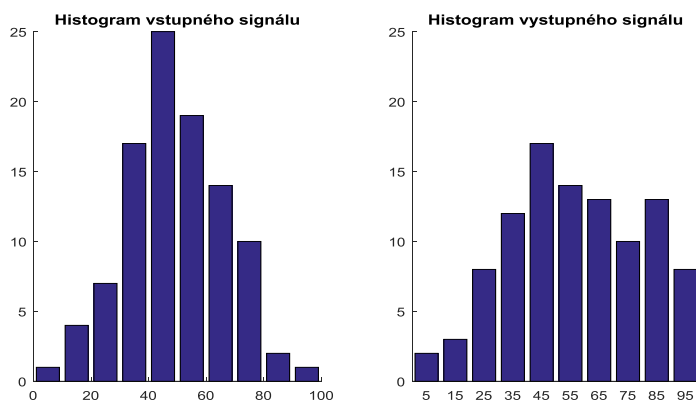
Dopočet kovariačnej matice:

$$C(X) = \begin{pmatrix} 208 & 226,19 \\ 226,19 & 815,92 \end{pmatrix}$$

	u,y
Kovariancia	63,7
Koef. korelácie	0,12

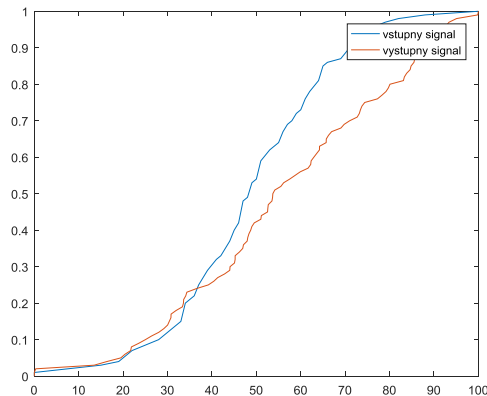
Tabuľka č.3 Kovariancia a koeficient korelácie aproximovanej sústavy

Koeficient korelácie a kovariancia pre simulovanú sústavu sú nižšie, čo si možno vysvetliť posunutím simulovaného modelu oproti reálnemu modelu, čo je evidentné aj z obrázka č.11.



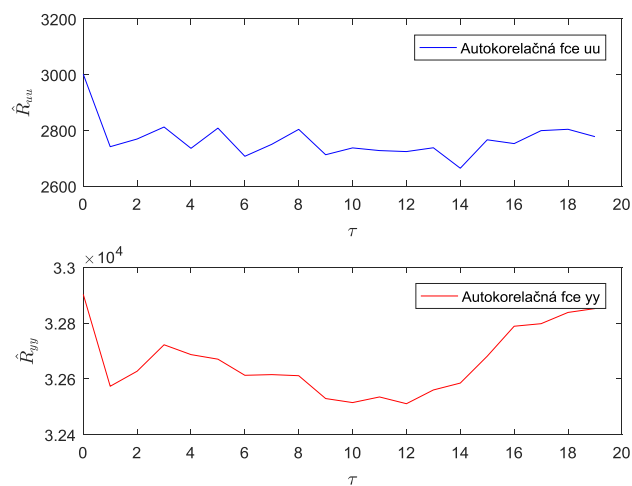
Obrázok č.19 Histogram rozdelenia početností vstupného a výstupného signálu, modelová sústava

Pre simulačný model bol zdvojnásobený počet meraní. Rozdelenie početností hodnôt výstupného signálu je tak v simulovanej sústave rovnomernejšie okolo strednej hodnoty skôr s ľavostrannou asymetriou. Celkovo však nadobúda kontúry normálneho rozdelenia. K reálnejšiemu tvaru Gaussovho rozdelenia by sme dospeli zvyšovaním počtu analyzovaných hodnôt.



Obrázok č.20 Graf kumulatívnej distribučnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava

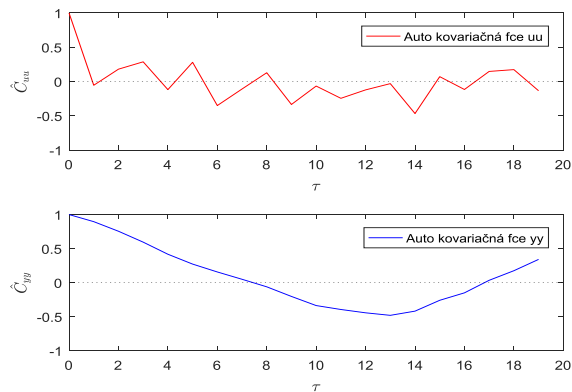
Kumulovaná distribučná funkcia modelovanej sústavy svojím priebehom viac zodpovedá distribučnej funkcií normálneho rozdelenia. Z tohto pohľadu možno uviesť, že signál z modelovanej sústavy z pohľadu overovaných štatistík viac zodpovedá charakteristikám náhodnej veličiny s normálnym rozdelením, čo možno považovať za dôsledok zvýšenia počtu pozorovaní.



Obrázok č.21 Graf autokorelačnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava

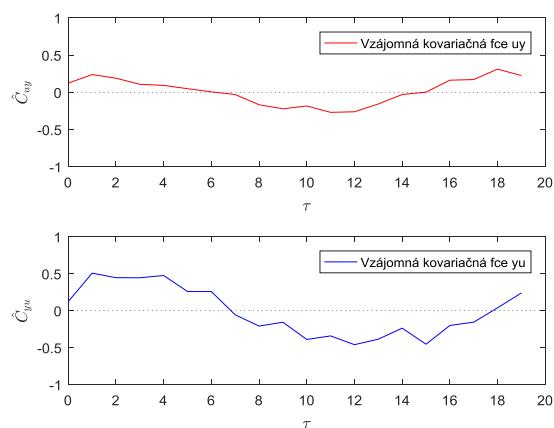
Pre priebeh autokorelačnej funkcie výstupu z modelovanej sústavy možno konštatovať len malé odchýlky v porovnaní s reálnym výstupom sústavy. Po počiatnom poklese, s rastom τ jej hodnota kolíše okolo konštantnej hodnoty.

Veľmi podobný priebeh v porovnaní s reálnou sústavou je aj v prípade autokovariačnej funkcie, kedy hodnoty postupne klesajúcej autokovariancie (pre $\tau \leq 3$) výstupu poukazujú na autoregresný proces.



Obrázok č.22 Graf autokovariačnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava

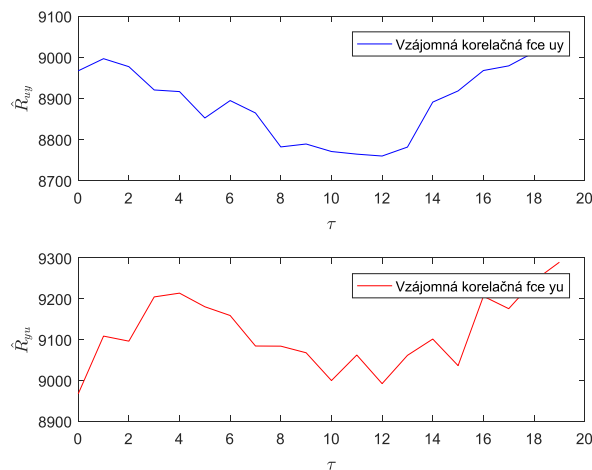
Vzájomná kovariačná funkcia pre $\tau=0$ zodpovedá korelačnému koeficientu medzi u a modelovaným výstupom.



Obrázok č.23 Graf vzájomnej kovariačnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava

Z tohto pohľadu je zaujímavý nárast pre $\tau=1$ čo opätovne indikuje možné posunutie modelovanej sústavy oproti reálnej sústave. Samotný priebeh vzájomných kovariačných funkcií poukazuje na nízku mieru korelácie medzi u a y .

Z priebehu vzájomných korelačných funkcií medzi $u(k)$ a $y(k+\tau)$ resp. $y(k)$ a $u(k+\tau)$ je evidentná pomerne silná závislosť medzi poradnicami vstupnej a výstupnej veličiny, pričom najvyššie hodnoty dosahuje pri $\tau =3$, čo opätovne poukazuje na omeškanie modelovaného výstupu oproti vstupnému signálu (obrázok č.24).



Obrázok č.24 Graf vzájomnej korelačnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava

3.2.5 Diskusia a záver

Výsledné štatistické charakteristik vychádzali podľa predpokladov. Po prechode sústavou došlo k posunutiu strednej úrovne signálu ($\mu_u \rightarrow \mu_y$) [°C/%] z 52,1 na 179,1 v prípade reálnej sústavy resp. na 168,3 v prípade simulačného modelu zhodného s reálnou sústavou. Rozptyl výstupného signálu sa zväčšil (vzhľadom na zosilnenie sústavy 3,39) z 208 na 815 resp. 616 v prípade simulácie reálnej sústavy. Z pohľadu distribučnej funkcie sú charakteristiky skreslené počtom meraní reálnej sústavy ($n=61$) v dôsledku čoho je tvar krivky y špičatý so sklonom k pravostrannej asymetrii. Tieto skreslenia boli obmedzené zvýšením počtu meraní v aproximovanom modeli reálnej sústavy ($n=120$), kde krivky distribučnej funkcie a hustoty pravdepodobnosti nadobúdajú tvar blízky normálnemu rozdeleniu. Na dosiahnutie ideálneho tvaru by bolo potrebné zvýšiť počet meraní na

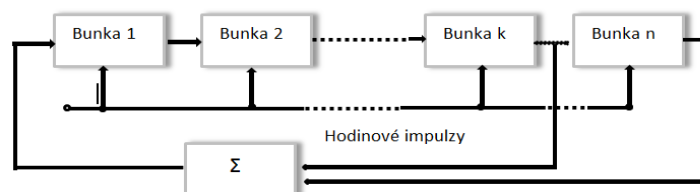
úroveň $n > 1000$. Z pohľadu vlastností autokorelačných resp. autokovariačných funkcií platia predpoklady definované v kap. 1.22 (ACF), t.j. najvyššie hodnoty sú dosiahnuté pre $\tau = 0$. Následne je evidentná oslacia autokorelácie, resp. kovariancie okolo konštantnej resp. nulovej hodnoty. V prípade autokovariancie výstupného signálu sa (pre $\tau \leq 3$) prejavujú charakteristiky autoregresného procesu. Celkovo možno zhrnúť, že v prípade simulovanej sústavy boli dosiahnuté o niečo lepšie charakteristiky vzhľadom na väčší počet meraní. Platí, že stochastičnosť vstupného signálu sa po jeho prechode lineárnou sústavou aj napriek posunu v štatistických charakteristikách, nezmenila.

4 PREMERANIE SÚSTAVY PSEUDONÁHODNÝM BINÁRNÝM SIGNÁLOM

4.1 Teoretické východiská

V ďalšej kapitole sa zameriame na analýzu charakteristík pseudonáhodného binárneho signálu po jeho prechode rovnakou lineárnou, tepelnou sústavou ako v prípade kapitoly 3. Jedná sa o deterministický binárny signál o konštantnej reprodukovateľne perióde, generovaný podľa jednoznačne definovaného rekurentného vzorca [2]. Signál je generovaný tak, aby v rámci signálu nebolo možné identifikovať opakujúce sa periódy. Svojimi vlastnosťami sa približuje bielemu šumu, t.j. signálu s konštantnou výkonovou spektrálnou hustotou pre všetky frekvencie. Hlavnou časťou generátora je n-stupňový posuvný register so spätnou väzbou. Výstup k-tého a n-tého stupňa registra je vyvedený do sčítanky modulov 2 s logickou funkciou – nonekvivalencie. Jednotlivé stupne registra sa prepínajú hodinovými impulzami a obsah registra sa tak posúva o jeden stupeň. Dĺžka periódy je závislá napočte stupňov registra a na usporiadaní spätnej väzby. Na výstupe ľubovoľného stupňa registra získame diskretný signál s vlastnosťami [7]:

- nadobúda iba dve hodnoty – log 0 a log 1
- postupnosť výstupných binárnych signálov je periodická s periódou , $T_G = N\Delta t$ pre $N=2^n-1$ (určujúci počet možných stavov registra bez nultého stavu), Δt interval hodinových impulzov
- k prechode medzi log 0 a log 1 môže dôjsť len v čase celistvých násobkov hodinových impulzov

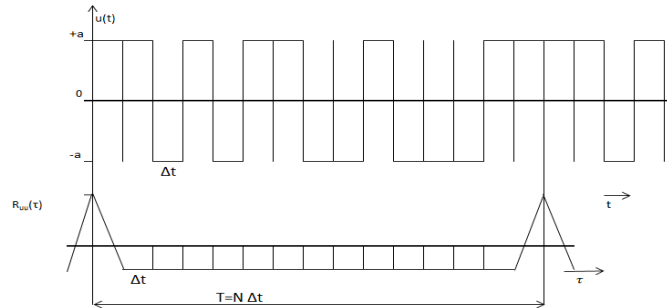


Obrázok č. 25 Bloková schéma generátora PNBS

Postupnosť, ktorú získame z generátora PNBS, je periodická pričom pre jej autokorelačnú funkciu platí vzťah [6]:

$$\text{pre } |\tau| < \Delta t \dots \dots \dots R_{uu} = a^2 \left[1 - \frac{|\tau| N + 1}{\Delta t N} \right] \quad (38)$$

$$\text{pre } \Delta t \leq |\tau| \leq (N - 1)\Delta t \dots \dots \dots R_{uu} = -\frac{a^2}{N}$$



Obrázok č. 26 Priebeh PNBS a jeho autokorelačná funkcia

4.2 Vzorový protokol

4.2.1 Zadanie

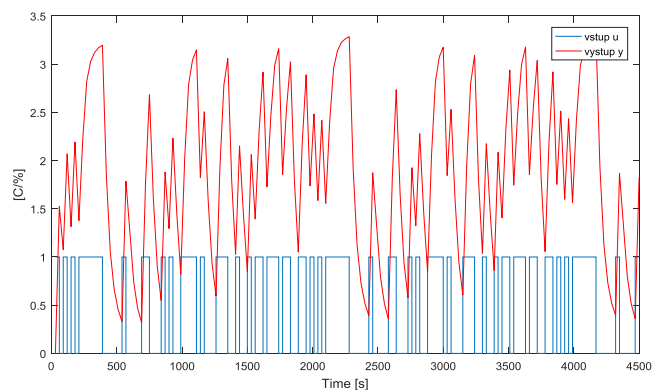
1. Simulujte priebeh PNBS lineárnym modelom 2 rádu.
2. Získajte hodnoty autokorelačných a vzájomných korelačných funkcií vstupého a výstupného signálu.
3. Na základe hodnôt korelačnej analýzy určite hodnoty impulznej funkcie a určite poradnice prechodovej funkcie.
4. Analyzujte výsledky a porovnajte so Simuláciou v Matlabe.

4.2.2 Budenie PNBS signálu a prechod tepelnou sústavou

V laboratórnych podmienkach bola prostredníctvom generátora PNBS signálu budená reálna sústava. Generátor bol vytvorený, resp. nasimulovaný v prostredí Matlab a pripojený na reálnu sústavu cez kartu Advantec (*príloha č.6*). Výstupy boli následne opätovne zaznamenané v prostredí Matlab prostredníctvom RealTime Toolbox. Po zohľadnení časovej konštanty tepelnej sústavy bol interval hodinových impulzov Δt zvolený identický ako v predchádzajúcom prípade, t.j. 30s, počet stupňov posuvného registra $n=6$. Pri meraní prebehli dve opakovacie periódy generátora PNBS. Nakoľko

menovitú hodnotu príkonu na vstupe nepoznáme, na výstupe zodpovedá 10V na karte, hodnote 300°C na teplomery, čo v Matlabe bude zaznamenané hodnotou 1. Amplitúda PNBS predstavuje maximálny možný príkon (100% príkonu) tepelného odporu, čo vzhľadom na rozsah prevodníka znamená, že 1 zodpovedá 10V.

Priebeh vstupnej veličiny z generátora PNBS a výstupného signálu z tepelnej sústavy sú zobrazené na obrázku č.27

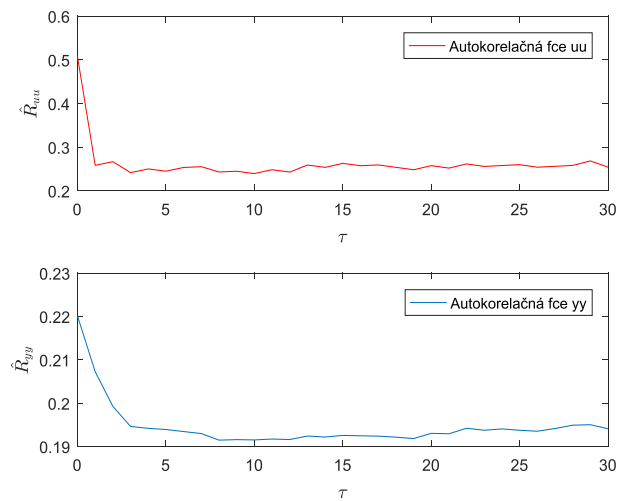


Obrázok č. 27 Budenie tepelnej sústavy signálom PNBS

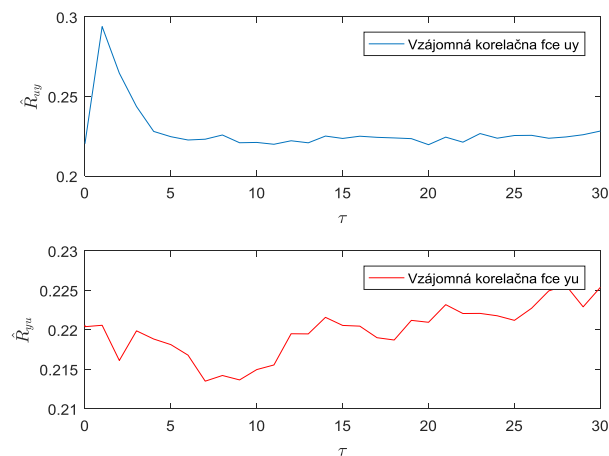
V grafe sú viditeľné dve opakovacie periódy, ktoré prebehli pri spracovaní signálu. Celkový počet meraní bol $k=152$, čo pri $\Delta t = 30$ s zodpovedá 4560s.

4.2.2.1 Korelačná analýza vstupného a výstupného signálu

Autokorelačné a vzájomné korelačné funkcie boli vygenerované v Matlabe. Pri korelačných funkciách sme volili posunutie $\tau=30$



Obrázok č. 28 Autokorelačné funkcie –korelačná analýza reálnej sústavy



Obrázok č. 29 Vzájomné korelačné funkcie –korelačná analýza reálnej sústav

A) Získanie hodnôt impulznej funkcie

Poradnice impulznej funkcie získaváme z rovnice

$$r = R g \tag{39}$$

kde g -hodnoty poradnic impulznej funkcie

Pomocou skriptu v Matlabe (príloha č.7) bola vytvorená matica R s rozmermy 30×30 (podľa zvoleného posunutia). Matica má tvar:

$$R = \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(\Delta t) & \dots & R_{uu}(N\Delta t) \\ R_{uu}(\Delta t) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}((N-1)\Delta t) \\ R_{uu}(2\Delta t) & R_{uu}(\Delta t) & \dots & R_{uu}((N-2)\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{uu}(N\Delta t) & R_{uu}((N-1)\Delta t) & \dots & R_{uu}(0) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Následne bola vytvorená matica r , ktorá má tvar:

$$r = \begin{bmatrix} \frac{R_{uy}(0)}{\Delta t} \\ \frac{R_{uy}(\Delta t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{R_{uy}(N\Delta t)}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Následne bola úpravou vzťahu získaná matica (vektor) g , ktorý vyjadruje postupnosť poradníc prechodovej funkcie.

$$g = R^{-1} r \quad (42)$$

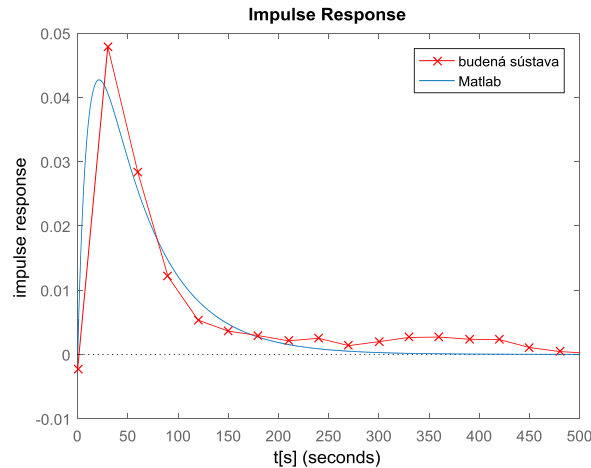
B) Pribeh impulznej funkcie

Impulzná funkcia získaná pomocou korelačnej analýzy pre sústavu budenú PNBS signálom:

Poradnice	g	Poradnice	g	Poradnice	g
1	-0.0022	11	0.0020	21	-0.0002
2	0.0479	12	0.0026	22	0.0015
3	0.0283	13	0.0027	23	0.0001
4	0.0121	14	0.0024	24	0.0019
5	0.0053	15	0.0023	25	0.0003
6	0.0036	16	0.0011	26	0.0009
7	0.0029	17	0.0004	27	0.0007
8	0.0021	18	0.0002	28	0.0002
9	0.0025	19	-0.0001	29	0.0007
10	0.0014	20	0.0004	30	0.0013

Tab.č.5 Hodnoty poradníc impulznej funkcie sústavy

Zobrazenie priebehu impulznej funkcie sústavy a jej porovnanie s priebehom impulznej funkcie získanej z Matlabu (funkcia *impulse ()*).



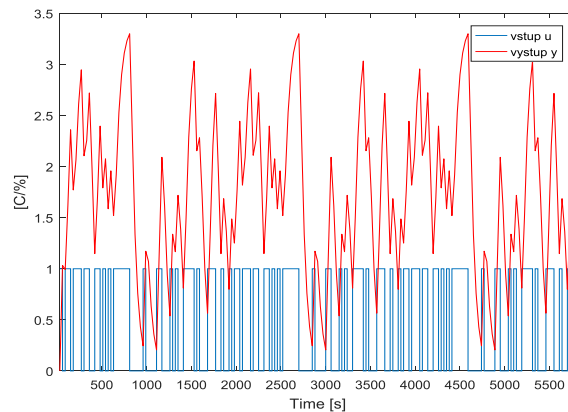
Obrázok č.30 Priebek impulznej funkcie tepelnej sústavy
budenej PNBS

Z porovnania priebehov impulzných funkcií možno konštatovať pomerne významnú zhodu, pričom presnejší priebeh by bolo možné získať skrátením intervalu vzorkovania.

4.2.3 Simulácie budenia sústavy PNBS signálom

Signál PNBS bol generovaný v prostredí Matlab s počtom stupňov registra $n=6$ a časovým intervalom hodnových impulzov rovnakým ako pri reálnej sústave, t.j. 30. Šesť bitovému stupňovému posuvnému registru zodpovedá dĺžka periódy $N=2^n-1$, t.j. 63 krokov, pričom k -ty stupeň, ktorý vstupuje do logickej funkcie non-ekvivalencie možno voliť ako stupeň 1 alebo 5 (porovnaj s obrázkom č.26). V našom prípade sme v kóde porovnávali register č.6 (n -tý) a register č.5 ($n-1$). Výstup logickej funkcie predstavuje $n+1$ register a predstavuje ďalší stupeň posuvného registra. Generovaný PNBS signál vstupuje do simuláčného modelu, zadaného rekurentnou rovnicou (37).

Výstupný signál modelu je zobrazený v obrázku č.31

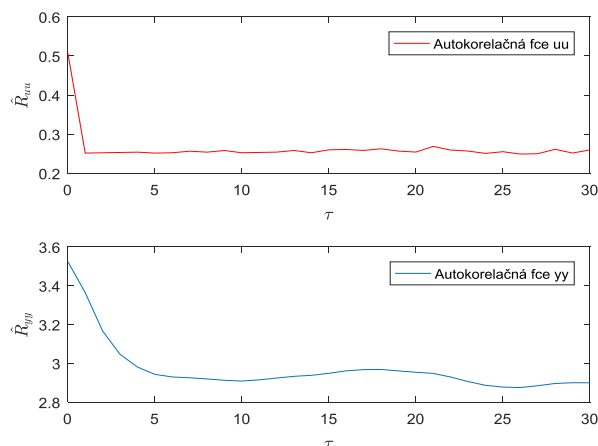


Obrázok č. 31 Budenie simulovanej sústavy signálom PNBS

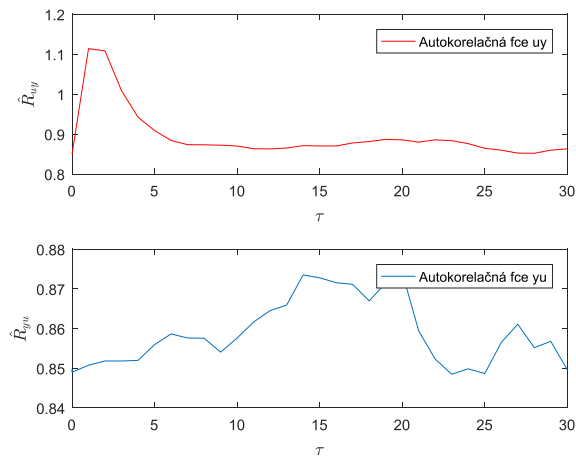
V simulácii bol rozšírený počet pozorovaní $k=200$, pričom z grafu sú evidentné tri opakovacie periódy, ktoré prebehli pri spracovaní signálu. Celkový počet meraní bol $k=200$, čo pri $\Delta t=30$ s zodpovedá 6000s.

4.2.3.1 Korelačná analýza vstupného a výstupného signálu

Rovnako ako pri reálnej sústave boli autokorelačné a vzájomné korelačné funkcie vygenerované v Matlabe. Pri korelačných funkciách sme volili posunutie $\tau=30$.



Obrázok č. 32 Priebeh autokorelačnej funkcie –korelačná analýza simulovanej sústavy



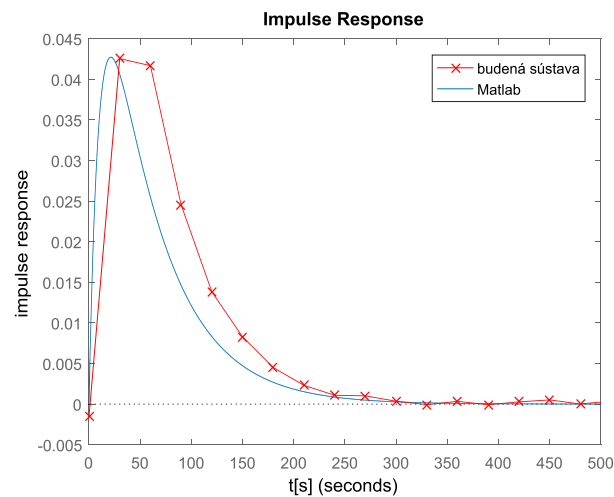
Obrázok č. 33 Vzájomná korelačná funkcia modelovanej sústavy –korelačná analýza korelačná analýza simulovanej sústavy

Obdobne ako pri reálnej sústave použitím vzťahov (39-42) bola získaná výsledná matica g , ktorá vyjadruje poradnice impulznej funkcie.

Poradnice	g	Poradnice	g	Poradnice	g
1	-0.0017	11	0.0007	21	0.0001
2	0.0425	12	0.0008	22	-0.0003
3	0.0409	13	0.0008	23	-0.0005
4	0.0247	14	0.0009	24	-0.0007
5	0.0138	15	0.0001	25	-0.0009
6	0.0082	16	0.0005	26	-0.0009
7	0.0051	17	0.0007	27	-0.0002
8	0.0033	18	0.0008	28	-0.0006
9	0.0016	19	0.0009	29	0.0000
10	0.0005	20	0.0009	30	-0.0004

Tab.č.6 Hodnoty poradníc impulznej funkcie modelovanej sústavy

Priebeh impulznej funkcie modelovanej sústavy vykazuje väčšie odchýlky v porovnaní s impulznou funkciou generovanou Matlabom.



Obrázok č. 34 Priebek impulznej funkcie simulovanej sústavy
budenej PNBS

4.2.4 Diskusia a záver

Cieľom zadania bolo prakticky overiť korelačné analýzy prostredníctvom analýzy budenia lineárnej sústavy PNBS. Priebeky autokorelačných aj vzájomných korelačných funkcií vychádzali podľa predpokladov. Získané impulzné odozvy vyšli v dobrej zhode s impulznou charakteristikou sústavy získanej v Control System Toolboxe Matlabu.

5 VYHODNOTENIE STACIONÁRNOSTI SÚBORU REALIZÁCIÍ NÁHODNÉHO PROCESU

5.1 Teoretické východiská

Pri spracovávaní veľkého súboru realizácií, kde v rámci každej realizácie náhodného procesu máme k dispozícii len obmedzený počet pozorovaní, sme schopní odvodiť charakteristiky individuálneho náhodného procesu na základe posúdenia vlastností vybranej skupiny realizácií. To znamená, že charakteristiku vybraného súboru realizácií napr. strednú hodnotu vybranej realizácie náhodného procesu T , t.j. \bar{y}_T , kde T patrí do množiny realizácií m nadobúdajúcej hodnoty z intervalu $\langle 1, \dots, T, \dots, M \rangle$ odhadujeme na základe strednej hodnoty vzorky

$$\overline{E(y_t)} = \frac{1}{m} \sum_{m=1}^M y_t^m$$

kde y_t^m predstavuje hodnotu m -tej realizácie v čase t .

Podmienkou aproximácie je, že náhodné pozorovania vybrané z jednej realizácie náhodného procesu v čase t sa vzťahujú na identické rozdelenia pravdepodobnosti (resp. rozdelenia s fixnou distribučnou funkciou). Inak povedané, pokiaľ je hustota pravdepodobnosti vybraného súboru realizácií stochastického procesu v čase t a $t+n$, kde $n \in \langle 1, \infty \rangle$ identická, možno na základe analýzy obmedzeného počtu pozorovaní jedného stochastického procesu aproximovať vlastnosti celého súboru realizácií a vice versa (podrobnejšie v kapitole 2.2.3).⁷ Podmienky platia v prípade stacionárneho procesu, t.j. v každom časovom okamihu t je distribučná funkcia každého pozorovania rovnaká.

⁷ V prípade prierezových dát, kde jednotlivé pozorovania x_1, \dots, x_n sú odvodené z fixnej distribučnej funkcie, t.j. sú nezávislé s rovnkou distribučnou funkciou, platí v súlade so zákonom veľkých čísel: $\mu_i = N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i = E(x_i)$.

5.2 Vzorový protokol

5.2.1 Zadanie

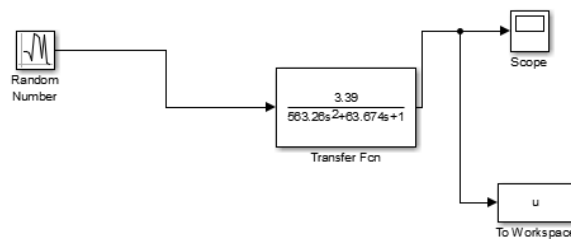
1. Nasimulujte náhodné procesy tvorené súborom 1000 realizácií. Na vstup sústavy druhého rádu prived'te náhodný signál s normálnym rozdelením s počtom hodnôt 1000 (t.j. rozsah simulácie = interval snímania x1000).
2. Na základe štatistík vyhodno'te, či je náhodný proces stacionárny. Stacionaritu skúmajte v závislosti na veľkosti vzorky pozorovaní v rámci fixne stanovaných intervaloch pozorovania.
3. Diskutujte vplyv veľkosti vzorky pozorovaní náhodne vybranej z celého súboru pozorovaní na časový priebeh stredných hodnôt, rozptylov a korelačných funkcií.

5.2.2 Simulácia súboru realizácií náhodného procesu

Súbor realizácií náhodného procesu bol realizovaný v prostredí Malab–Simulink. Sekvencie náhodných reťazcov čísel (1000 reťazcov po 1100 hodnotách) sú generované prostredníctvom bloku-Random Number generator, a to zmenou vstupného parametra seeds. Sekvencie „náhodných“ čísel sú predikovateľné, t.j. generované na základe deterministického algoritmu, ktorý je dostatočne komplexný na tvorbu sekvencií čísel, ktoré v daných limitoch plnia podmienky pre náhodné čísla. Platí teda, že poznaním algoritmu sme schopní opakovať sekvencie náhodných čísel. Pre generovanie rôznych sekvencií náhodných čísel je potrebné meniť vstupný parameter seeds, ktorý zabezpečí neopakovateľnosť postupnosti náhodných čísel⁸.

V našom prípade bola zvolená cyklická inkrementácia počiatocnej hodnoty seeds o 1 jednotku. Sekvencie generovaného vstupného signálu následne pomocou skriptu (*príloha č.8*) budia lineárnu sústavu s prenosovou funkciou (32):

⁸ Príkladom je algoritmus $X_{n+1} = (aX_n + b) \bmod m$, ktorý generuje pseudonáhodné sekvencie čísel na základe poznania predchádzajúcich stavov. X_0 predstavuje seeds, ktorého zmenou sa mení celá sekvencia generovanej postupnosti X_0, X_1, \dots, X_n .



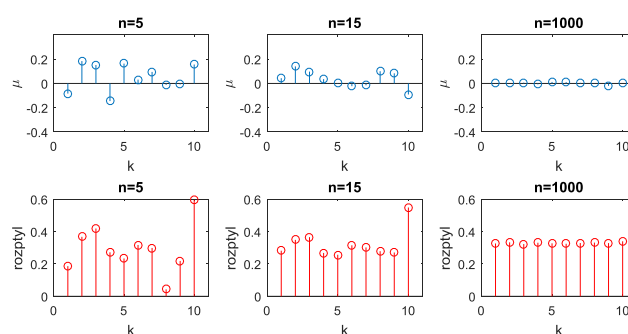
Obrázok č. 35 Realizácia prechodu súboru náhodných vstupov cez lineárnu sústavu

Generovaný náhodný signál, resp. sekvencia 1100 náhodných signálov má strednú hodnotu $\mu=0$ a rozptyl $\sigma^2=1$.

5.2.3 Analýza stacionárnosti súboru realizácií náhodného procesu

Štatistické vlastnosti súboru realizácií boli skúmané na vzorke $n=5$, $n=15$, $n=1100$ realizácií. V rámci analýzy bolo vynechaných prvých 100 realizácií, ktoré simulujú nábeh systému na pracovnú teplotu sústavy. Časová konštanta sústavy bola zvolená približne desatinu maximálnej časovej konštanty sústavy, t.j. 1.2s. Štatistické charakteristiky boli analyzované na fixných intervaloch $t_{10} = [200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100]$. V rámci týchto intervalov bol generovaný náhodný výber 5, 15 a všetkých realizácií náhodného procesu.

Zazmenané stredné hodnoty a rozptyly náhodne zvolených realizácií sú nasledovné:



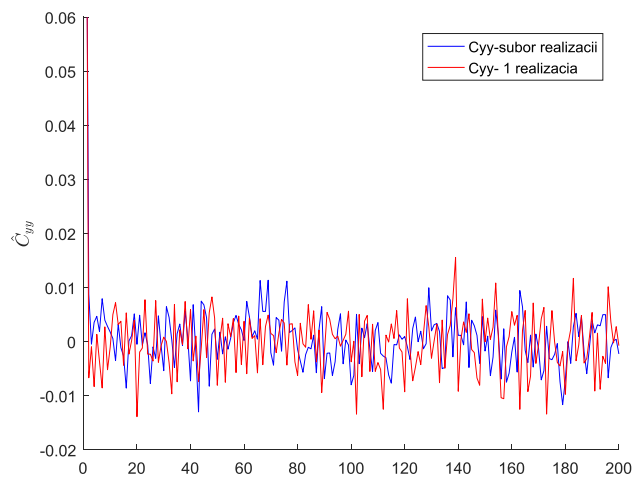
Obrázok č. 36 Stredné hodnoty a rozptyly súboru realizácií výstupného signálu

Vypočítaná autokovariačná matica je nasledovná:

0.0973	-0.0044	0.0133	-0.0374	-0.0301	-0.0346	-0.0089	0.0280	-0.0124	-0.0109
-0.0044	0.0824	-0.0083	0.0029	0.0001	-0.0129	0.0387	0.0183	0.0399	-0.0080
0.0133	-0.0083	0.1207	0.0018	0.0395	-0.0117	-0.0200	-0.0021	0.0272	0.0008
-0.0374	0.0029	0.0018	0.1223	-0.0247	0.0217	0.0297	-0.0242	-0.0032	-0.0272
-0.0301	0.0001	0.0395	-0.0247	0.1210	-0.0366	-0.0191	-0.0150	0.0164	0.0065
-0.0346	-0.0129	-0.0117	0.0217	-0.0366	0.1164	0.0076	-0.0099	-0.0038	0.0498
-0.0089	0.0387	-0.0200	0.0297	-0.0191	0.0076	0.0902	-0.0071	0.0001	0.0237
0.0280	0.0183	-0.0021	-0.0242	-0.0150	-0.0099	-0.0071	0.0892	-0.0019	0.0002
-0.0124	0.0399	0.0272	-0.0032	0.0164	-0.0038	0.0001	-0.0019	0.0805	-0.0203
-0.0109	-0.0080	0.0008	-0.0272	0.0065	0.0498	0.0237	0.0002	-0.0203	0.1332

Obrázok č. 37 Kovariačná matica pre súbor realizácií

Autokovariačná funkcia pre súbor realizácií sa realizovala skriptom (príloha č.9). Zo súboru realizácií sa náhodne vyberá 1 realizácia, ktorej autokovariačná funkcia sa porovnáva s náhodne vybraným súborom 30 realizácií. Počet posunutí (lags) bol kôli prehľadnosti zobrazenia obmedzený na 200. Priebeh autokovariačnej funkcie bol nasledovný (obrázok č.38).



Obrázok č. 38 Autokovariačná fce pre súbor realizácií

5.2.4 Diskusia a záver

Cieľom úlohy bolo zistiť stredné hodnoty, rozptyly a autokovariačné funkcie náhodného signálu na jednej realizácii ako aj na súbore realizácií.

Ako vidno z obrázku č.35, tak stredné hodnoty sa v rôznych skúmaných časových intervaloch pohybujú okolo nuly. S rastom počtu realizácií je evidentná stabilizácia stredných hodnôt na konštantnú úroveň 0. Rozptyl jednej realizácie náhodného procesu predstavoval 0,11 a štandardná odchýlka 0,32. Zväčšením výberu vzorky vo vybraných intervaloch sa hodnota rozptylu ustálila na hodnote 0,31. Pri zohľadnení počtu realizácií možno konštatovať, že pomerne presné hodnoty možno dosiahnuť už pri počte realizácií nad 15.

Analýza autokovariačných funkcií potvrdila, že kovariačná závislosť závisí od posunutia τ časového radu. Ako vidno z obrázka č.37 platí, že väzby sú s rastúcim časovým posunom na sebe nezávislé. Zatiaľ čo stredná hodnota autokovariačnej funkcie náhodne vybranej realizácie bola 0,00078, stredná hodnota autokovariačnej funkcie súboru realizácií bola polovičná, t.j. 0,00031.

ZÁVER

Cieľom bakalárskej práce bola aplikácia vhodných štatistických charakteristík na popis náhodných signálov. Vychádzalo sa z náhodného signálu s Gausovým rozdelením s ($\mu=0; \sigma^2_1$), ktorý bol pre potreby jeho využitia v tepelnej sústave normalizovaný na signál s kladnou strednou hodnotou a roptylom σ^2_2 . Následne sa skúmali charakteristiky signálu po jeho realizácií v sústave s tepelným odporom, kde náhodný signál predstavoval vstupnú veličinu u [%] lineárnej sústavy, pomocou ktorej bol ovplyvňovaný tepelne premenlivý odpor, ako výstupná veličinu objektu y [°C/%]. Identická sústava bola použitá aj pri analýze pseudonáhodného signálu (PNBS), ktorý bol generovaný v systéme Matlab a prostredníctvom rozhrania Advantec prepojený so sústavou. Výstupné signály boli zaznamenané a štatisticky vyhodnotené v prostredí Matlab. Simulačná časť zadania sa realizovala na modele sústavy, ktorý bol aproximovaný ako statická sústavu druhého rádu s premenlivými časovými konštantami. Na aproximovanom regulačnom obvode bol simulovaný prechod identických náhodných signálov ako v laboratórnych meraniach. Výstupné signály z reálnej sústavy a simulačnej sústavy sa následne štatisticky analyzovali. Ako vhodné charakteristiky na posúdenie zmien výstupných signálov po prechode sústavou boli zvolené stredné hodnoty, rozptyly, distribučná funkcia a korelačné metódy. Korelačné metódy boli použité aj pri skúmaní vlastností pseudonáhodného binárneho signálu po prechode sústavou a pri aproximácií impulznej funkcie sústavy.

Z reálnych aj simulovaných náhodných procesov v lineárnych riadiacich sústavách bolo potvrdené, že pokiaľ je vstupná veličina náhodná, ergodická a stacionárna, je aj výstupná veličina náhodná, ergodická a stacionárna s posunutými strednými hodnotami a rozptylmi. Autokorelačné funkcie výstupných veličín po prechode lineárnou sústavou podľa očakávania vykazujú úroveň korelačných veličín v závislosti od sledovaného posunutia τ .

Na prípade analýzy súboru realizácií náhodného procesu sa potvrdilo, že s rastúcim počtom realizácií sa hodnota štatistických charakteristík stabilizuje so strednou hodnotou blízkou nule a konštantným rozptylom. Stacionarita súboru realizácií bola potvrdená aj priebehom autokovariačných funkcií, kedy hodnota koeficientu nebola závislá na realizácií jednej konkrétnej charakteristiky stochastického procesu, ale len na veľkosti časového posunutia.

Jednotlivé zadania boli sformulované ako laboratórne úlohy a spolu s vzorovým riešením spracované do formy vzorových protokolov.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] PAVELKA F., Klímek, *Aplikovaná statistika*, Zlín: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta Manažmentu a ekonomiky, 2000. ISBN 80-24-1545-2
- [2] NOVOVIČOVÁ J., *Pravděpodobnost a matematická statistika*, ČVUT, Fakulta Dopravní 1999. [cit. 6. červen 2013] Dostupné z: <<http://euler.fd.cvut.cz/publikace/files/skripta3.pdf>>
- [3] HETTLEROVÁ M., *Využití autokorelační funkce při zpracování dat* [online]. . Diplomová práce. Pardubice, 2013: Univerzita Pardubice, Ústav systémového inženýrství a informatiky, [cit.2019-02-20]. Dostupné z: https://dk.upce.cz/bitstream/handle/10195/53669/HettlerovaM_VyuzitiAutokorelacni_JC_2013.pdf;jsessionid=6D632386B3F3B868F856EA4B206C8FE2?sequence=3
- [4] HANČOVÁ M., Skřivánková, *Náhodné procesy a ich aplikácie*, Košice: Univerzita Pavla Jozefa šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta, 2018. ISBN 80-70-9754-23
- [5] BUDÍKOVÁ E.M., *Korelačná analýza v systéme STATISTICA*, Brno, 2018 : Masarykova Univerzita, Fakulta informatiky [cit.2019-02-20]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js18/korelacna_analyza/web/index.html
- [6] KUBALČÍK M., *Cvičení z předmětu identifikace systémů*, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. ISBN 80-7318-497-4
- [7] BOBÁL, *Identifikace systémů*, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2009. ISBN 978-80-7318-888-7
- [8] VROŽINA M, Jančíková, David, *Identifikace systémů*, Ostrava: Vysoká škola baňská, Technická univerzita Ostrava, 2012. ISBN 978-80-248-2594-6
- [9] ŠIMJÁKOVÁ D., *Analýza finančních časových řad* [online]. Bakalárska práca. Praha, 2007: Univerzita Karlova v Prahe, Matematicko-fyzikálna fakulta [cit.2019-02-20]. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/130014462>
- [10] MIHALÍK J., *Náhodné signály a obrazy*, Košice: Tehnická Univerzita Košice, Fakulta električky a informatiky, 2016. ISBN 978-80-553-2510-1

- [11] ZAIONTS C., *Real Statistics Using Excel*, 2012-2019. [Online]. [Cit. 21 2 2019] Available: <http://www.real-statistics.com/time-series-analysis/stochastic-processes/autocorrelation-function/>
- [12] VÉGH Z., *Databáza vzorků hluku*, [online]. Bakalárska práca. Brno, 2011: Vysoké učení technické, Fakulta elektroniky a komunikačných technológií. [cit.2019-02-20] Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=42756
- [13] ARTL J., Artlová, *Finanční časové řady*, Grada Publishing a.s.: 2003. ISBN 80-247-0330-0
- [14] BAŠTINEC J., *Statistika, stochastické procesy, operační výzkum*, [online] Brno, 2014: Vysoké učení technické, FEKT. [cit.2019-02-18] Dostupné z: http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/texty/DMA1/CZ/DMA1_plna_verze_CZ.pdf
- [15] PUTHUSSERYPADY S., „*Applied Signal Processing*, [Online]. Technical University of Denmark,“ 1 2018. [Cit. 21 3 2019]. Dostupné z: <http://bme.elektro.dtu.dk/31610/>
- [16] RATHOUSKÝ M., *Autoregresné modely*, [online] Bakalárska práca Praha, 2017: Karlova Univerzita, Matematicko-fyzikálna fakulta. [cit.2019-02-21]. Dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/130214851>
- [17] LUŠTOŇ D., *ARMA modely s exogénou zložkou*, [online] Bakalárska práca. Bratislava, 2010: STU v Bratislave, Stavebná fakulta. [cit.2019-02-21]. Dostupné z: <http://iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/zaverecneprace>
- [18] TABOR N., *An Introduction to Time Series and Stationarity*, [Online] University of Copenhagen,“ 2016. [Cit. 5 2 2019] Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=K2bK888zGxg..>
- [19] ZAPLATÍLEK, Doňar, *Matlab- začíname se signály*, BEN, 2006. ISBN 978-80-73000-200-0
- [20] NOSKIEVIČ, *Modelování a identifikace systémů*, Montanex. 1999. ISBN 80-7225-030-2
- [21] NAVRÁTIL P., *Automatizace- Vybrané statě*, Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně,

FAI, 2011. ISBN 978-80-7318-935-8

- [23] DAHYOT R., „Stationarity,“ [Online]Trinity College Dublin, 2019. [Cit. 21 3 2019].
[Dostupné na: <<https://www.scss.tcd.ie/Rozenn.Dahyot/ST3454/stationarity.pdf>>],.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

ACF Autokorelačná funkcia

PNBS Pseudonáhodný binárny signál

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázok č. 1	Graf distribučnej funkcie a hustoty pravdepodobnosti pre normálne rozdelenie	19
Obrázok č. 2	Momentové charakteristiky stochastického procesu nestacionárneho časového radu	22
Obrázok č. 3	Skupinové momentové charakteristiky	22
Obrázok č. 4	Stacionárny súbor realizácií náhodného procesu	23
Obrázok č. 5	Programové prostredie WControl	26
Obrázok č. 6	Výstupy z merania regulačnej sústavy-Wcontrol	27
Obrázok č. 7	Namerané prechodové charakteristiky	28
Obrázok č. 8	Výstupná priemerná prechodová charakteristika	28
Obrázok č. 9	Odhad regresnej priamky	29
Obrázok č. 10	Určenie parametrov regulovanej sústavy pomocou Strejcovej metódy.....	30
Obrázok č. 11	Porovnanie priebehov prechodovej funkcie	32
Obrázok č. 12	Prechod náhodného signálu lineárnou tepelnou sústavou-modelovaná vs. reálna sústava.....	33
Obrázok č. 13	Histogram rozdelenia početností vstupného a výstupného signálu.....	36
Obrázok č. 14	Graf kumulatívnej distribučnej funkcie vstupného a výstupného signálu	36
Obrázok č. 15	Graf autokorelačnej funkcie vstupného a výstupného signálu	37
Obrázok č. 16	Graf autokovariačnej funkcie vstupného a výstupného signálu	37
Obrázok č. 17	Graf vzájomnej kovariačnej funkcie vstupného a výstupného signálu	38
Obrázok č. 18	Graf vzájomnej korelačnej funkcie vstupného a výstupného signálu	39
Obrázok č. 19	Histogram rozdelenia početností vstupného a výstupného signálu, modelová sústava.....	40
Obrázok č. 20	Graf kumulatívnej distribučnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava.....	41
Obrázok č. 21	Graf autokorelačnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava.....	41
Obrázok č. 22	Graf autokovariačnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava.....	42

Obrázok č.23	Graf vzájomnej kovariačnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava.....	42
Obrázok č.24	Graf vzájomnej korelačnej funkcie vstupného a výstupného signálu, modelová sústava.....	43
Obrázok č.25	Bloková schéma generátora PNBS.....	45
Obrázok č.26	Priebeh PNBS a jeho autokorelačná funkcia	46
Obrázok č.27	Budenie tepelnej sústavy signálom PNBS	47
Obrázok č.28	Autokorelačné funkcie –korelačná analýza reálnej sústavy.....	48
Obrázok č. 29	Vzájomné korelačné funkcie –korelačná analýza reálnej sústavy	48
Obrázok č.30	Priebeh impulznej funkcie tepelnej sústavy budenej PNBS.....	50
Obrázok č. 31	Budenie simulovanej sústavy signálom PNBS.....	51
Obrázok č.32	Priebeh autokorelačnej funkcie –korelačná analýza simulovanej sústavy	51
Obrázok č.33	Vzájomná korelačná funkcia modelovanej sústavy –korelačná analýza korelačná analýza simulovanej sústavy	52
Obrázok č.34	Priebeh impulznej funkcie simulovanej sústavy budenej PNBS.....	53
Obrázok č. 35	Realizácia prechodu súboru náhodných vstupov cez lineárnu sústavu	56
Obrázok č.36	Stredné hodnoty a rozptyly súboru realizácií výstupného signálu	56
Obrázok č.37	Kovariačná matica pre súbor realizácií	57
Obrázok č.38	Autokovariačná FCE pre súbor realizácií	57

SEZNAM TABULEK

<i>Tabulka č.1: Vstupné a výstupné údaje z lineárnej sústavy.....</i>	<i>76</i>
<i>Tabulka č.2: Stredné hodnoty a rozptyly vstupného a výstupného signálu.....</i>	<i>34</i>
<i>Tabulka č.3: Kovariancia a koeficient korelácie.....</i>	<i>34</i>
<i>Tabulka č.4: Stredná hodnota a rozptyl aproximovanej sústavy.....</i>	<i>38</i>
<i>Tabulka č.5: Kovariancia a koeficient korelácie aproximovanej sústavy.....</i>	<i>38</i>
<i>Tabulka č.6: Hodnoty poradníc impulznej funkcie sústavy.....</i>	<i>48</i>
<i>Tabulka č.7: Hodnoty poradníc impulznej funkcie modelovanej sústavy.....</i>	<i>51</i>

SEZNAM PŘÍLOH

Priloha č.1: Zdrojový kód: Prechod náhodného signálu modelovou sústavou

Priloha č.2: Zdrojový kód: Vypočet autokorelačnej funkcie vstupu a výstupu

Priloha č.3: Zdrojový kód: Výpočet autokovariačnej funkcie vstupu a výstupu

Priloha č.4: Zdrojový kód: Vzájomná kovariačná funkcia vstupu a výstupu

Priloha č.5: Zdrojový kód: Vzájomná korelačná funkcia vstupu a výstupu

Priloha č.6: Zdrojový kód: Budenie sústavy generátorom PNBS

Priloha č.7: Zdrojový kód: Výpočet impulznej funkcie z korelačných funkcií

Priloha č.8: Zdrojový kód: Generovanie vstupného signálu pre súbor realizácii

Priloha č.9: Zdrojový kód: Vypočet autokovariačnej funkcie pre súbor realizácii

PRÍLOHY

Príloha č.1: Zdrojový kód: Prechod náhodného signálu Modelovou sústavou

```
clc
clear all
close all
d(5,1)=0;
% načítanie vstupov-náhodné premenne s normalnym rozdelenim
numa = xlsread('source2.xlsx')
cas=numa(:,1);
vystup=numa(:,2);
vstup=numa(:,3);
% prenosova funkcia
Gs=tf([3.39],[563.26 63.674 1]);
[ci, jmen]=c2dm([3.39],[563.26 63.674 1],30);
a1=jmen(2);
a2=jmen(3);
b1=ci(2);
b2=ci(3);

pocet = numel(vystup);
% rekurentné pocítanie parametrov
for k=1:pocet

    akt=vstup(k);
    akt2=vystup(k);
    u(k)=akt;
    y(k)=-a1*d(1)-a2*d(2)+b1*d(3)+b2*d(4);
    pnbs(k,1)=k;
    pnbs(k,2)=u(k);
    pnbs(k,3)=y(k);
    pnbs(k,4)=akt2;
    pnbs(k,5)=k*30;
    d(2)=d(1);
    d(1)=y(k);
    d(4)=d(3);
    d(3)=u(k);
end
xlswrite('D:\skola\bak\bakalar\pnbs_vystup.xlsx',pnbs);
% graf
vstup=pnbs(:,2);
vystup=pnbs(:,3);
stairs(pnbs(:,5),pnbs(:,2));
hold on
plot(pnbs(:,5),pnbs(:,3),'red')
hold on
plot(pnbs(:,5),pnbs(:,4),'green')
legend('vstup u','vystup y','vystup real');
xlabel('Time [s]'),ylabel('C[%]'),title('Prechod náhodného signálu
lineárnou sústavou')
xlim([30 1800])
```

Príloha č.2: Zdrojový kód: Vypočet autokorelačnej funkcie vstupu a vystupu

```
function autokorel()
clear all

close all
clc
```

```

% Load input
toolbox = xlsread('pnbs_vystup.xlsx');
k=toolbox(:,1);
vstup=toolbox(1:end,2);
vystup=toolbox(:,4);
vystup_real=toolbox(:,3);
cas=toolbox(:,5);
% posunutie
lag=1;
leng=length(vystup);
covariance(2,2)=0;
N_lag=20;
covariancee(N_lag,3)=0;

% vypocet auto korelacie
for m=1:N_lag
    coval=toolbox(lag:end,2);
    cova2=toolbox(1:leng+1-lag,2);
    cova3=toolbox(lag:end,3);
    cova4=toolbox(1:leng+1-lag,3);

    length2=length(coval);
    kor=0;
    suma=0;
    suma2=0;
    for d=1:length2

        kor=coval(d)*cova2(d);
        suma=kor+suma;
        kor2=cova3(d)*cova4(d);
        suma2=kor2+suma2;
    end
    lag=lag+1;
    korrel=suma/length2;
    korrel2=suma2/length2;
    normkor=korrel/(std(coval)/std(cova2));
    covariancee(m,1)=korrel;
    covariancee(m,2)=m-1;
    covariancee(m,3)=korrel2;
% grafy
end
disp(covariancee)

% subplot1 = subplot(2,1,1);
yyaxis left
gr1=plot(covariancee(:,2),covariancee(:,1),'blue');
xlim([-1 21])
ylim([2500 3100]);
yyaxis right
gr2=plot(covariancee(:,2),covariancee(:,3),'red');
xlim([-1 21])
xlabel('posunutie')
ylim([29000 35000])
legend('Autokorelačná fce vstup','Autokorelačná fce výstup');
xlabel('posunutie')

```

Príloha č.3: Zdrojový kód: Výpočet autokovariačnej funkcie vstupu a výstupu

```

function autokovariancia()
% Load input

```

```

toolbox = xlsread('pnbs_vystup.xlsx');
k=toolbox(:,1);
vstup=toolbox(1:end,4);
vystup=toolbox(:,2);
vystup_real=toolbox(:,4);
cas=toolbox(:,5);
% posunutie
lag=1;
leng=length(vystup);
covariance(2,2)=0;
covariancee(10,2)=0;
N_lag=20;
% vypočet krízovej korelacie pomocou kovariancie a súciny STDx * STDY
for m=1:N_lag
    coval=toolbox(lag:end,2);
    cova2=toolbox(1:leng+1-lag,2);
    cova3=toolbox(lag:end,4);
    cova4=toolbox(1:leng+1-lag,4);

    covariance=cov(coval,cova2);
    covariance2=cov(cova3,cova4);
    std1=std(coval);
    std2=std(cova2);
    std3=std(cova3);
    std4=std(cova4);
    res=covariance/(std1*std2);
    res2=covariance2/(std3*std4);
    covariancee(m,1)=res(1,2);
    covariancee(m,2)=m-1;
    covariancee(m,3)=res2(1,2);
    lag=lag+1;
end
disp(covariancee);
% graf
plot(covariancee(:,2),covariancee(:,1),'red');
legend('autokovariačná funkcia u');
hold on
plot(covariancee(:,2),covariancee(:,3),'blue');

plot(xlim,[0 0],':k','Linewidth',0.3);
legend('autokovariačná funkcia u','autokovariačná funkcia y');
xlabel('Posunutie');

```

Príloha č.4: Zdrojový kód: Vzájomná kovariačná funkcia vstupu a výstupu

```

function crosskovar()
clear all

close all
clc
% Load input
toolbox = xlsread('pnbs_vystup.xlsx');
k=toolbox(:,1);
vstup=toolbox(1:end,4);
vystup=toolbox(:,2);
vystup_real=toolbox(:,3);
cas=toolbox(:,5);

lag=1;
leng=length(vystup);

```



```

covariance(2,2)=0;
covariancee(20,3)=0;
N_lag=20;
% vypocet krizovej korelacie pomocou kovariancie a sucinu STDx * STDY
for m=1:N_lag
    coval=toolbox(lag:end,4);
    cova2=toolbox(1:leng+1-lag,2);
    cova3=toolbox(lag:end,2);
    cova4=toolbox(1:leng+1-lag,4);
    covariance=cov(coval,cova2);
    covariance2=cov(cova3,cova4);
    std1=std(coval);
    std2=std(cova2);
    std3=std(cova3);
    std4=std(cova4);
    res=covariance/(std1*std2);
    res2=covariance2/(std3*std4);
    covariancee(m,1)=res(1,2);
    covariancee(m,3)=res2(1,2);
    covariancee(m,2)=m-1;
    lag=lag+1;
end
disp(covariancee);
% graf
hold on
plot(covariancee(:,2),covariancee(:,1),'red');
hold on
plot(covariancee(:,2),covariancee(:,3),'blue');
plot(xlim,[0 0],':k','Linewidth',0.3);
legend('Ryu','Ruy');
xlabel('Posunutie');
ylim([-1 1])
xlim([0 20])

```

Príloha č.5: Zdrojový kód: Vzájomná korelačná funkcia vstupu a výstupu

```

function vzajomnakorelacia()
clear all

close all
clc
% Load input
toolbox = xlsread('pnbs_vystup.xlsx');
k=toolbox(:,1);
vstup=toolbox(1:end,2);
vystup=toolbox(:,4);
vystup_real=toolbox(:,3);
cas=toolbox(:,5);

lag=1;
leng=length(vystup);
covariance(2,2)=0;
N_lag=20;
covariancee(N_lag,3)=0;

% vypocet krizovej korelacie
for m=1:N_lag
    coval=toolbox(lag:end,2);
    cova2=toolbox(1:leng+1-lag,4);

```

```

        cova3=toolbox(lag:end,4);
        cova4=toolbox(1:leng+1-lag,2);

        length2=length(cova1);
        kor=0;
        suma=0;
        suma2=0;
        for d=1:length2

            kor=cova1(d)*cova2(d);
            suma=kor+suma;
            kor2=cova3(d)*cova4(d);
            suma2=kor2+suma2;
        end
        lag=lag+1;
        korrel=suma/length2;
        korrel2=suma2/length2;
        normkor=korrel/(std(cova1)/std(cova2));
        covariancee(m,1)=korrel;
        covariancee(m,2)=m-1;
        covariancee(m,3)=korrel2;
% graf
    end
    disp(covariancee)

% subplot1 = subplot(2,1,1);
% yyaxis left
gr1=plot(covariancee(:,2),covariancee(:,1),'blue');
hold on
xlim([-1 21])
ylim([9100 9800]);

gr2=plot(covariancee(:,2),covariancee(:,3),'red');
xlim([-1 21])
xlabel('posunutie')
ylim([9200 9900])
% title('Autokorelačné funkcie')
legend('Vzájomná korelačná fce xy','Vzájomná korelačná fce yx');
xlabel('posunutie')

```

Príloha č.6: Zdrojový kód: Budenie sústavy generátorom PNBS

```

clear all;
N=1000-1;      %pocet realizaci - kolikrat bude spusteno mereni
n=1000-1;      %pocet hodnot v realizaci -v simulaci
poc=100;

u=0;
a=0;
seed=0;
sim('uloha2');
a=u;
for i=1:N
    u=0;
    seed=seed+1;
    sim('uloha2');
    a=[a u]; %umistení na radek
end

```

Príloha č.7: Zdrojový kód: Výpočet impulznej funkcie z korelačných funkcií

```
function pnbs_kor_fin()
clear all

close all
clc
% Load input
toolbox = xlsread('pnbs2_vstup_load.xlsx');
k=toolbox(:,1);
vstup=toolbox(1:end,2);
vystup=toolbox(1:end,4);
matica(30,30)=0;
    matica2(30,1)=0;
posun=30;
por_c=0;
% korelacne fce
[c,lags]=xcorr(vstup,vstup,30,'unbiased');
[f,lags4]=xcorr(vystup,vstup,30,'unbiased');
k=0;
hold on
disp(f)
    disp(lags4)
    % Matica R a r

for s=1:30

for i=posun+1:posun*2+1-s
    por_c=por_c+1;
    matica(por_c+k,s)=c(i);
    if k==0
        matica2(por_c+k,1)=f(i);
    end

end
posun=30;
i=0;
por_c=0;
k=k+1;
end
A=matica;
MM=matica2;
[m,n] = size(matica);
B=A'+A;
B(1:n+1:end)=diag(A);
A2=inv(B);
% Matica g = Ar
Ar=mtimes(A2,MM);
hold on
disp(Ar)
    t=0:30:870
    plot(t,Ar)
% Impulzna fce
impulse(3.39,[563.26 63.674 1])
```

Príloha č.8: Zdrojový kód: Generovanie vstupného signálu pre súbor realizácií

```
clear all;
N=1000-1;      %pocet realizaci - kolikrat bude spusteno mereni
n=1000-1;      %pocet hodnot v realizaci -v simulaci
poc=100;

u=0;
a=0;
seed=0;
sim ('uloha2');
a=u;
for i=1:N
    u=0;
    seed=seed+1;
    sim ('uloha2');
    a=[a u]; %umistení na radok
end
```

Príloha č.9: Zdrojový kód: Vypočet autokovariačnej funkcie pre súbor realizácií

```
clc
clear all
close all
function srealizaci()
clear all

close all
clc
% Load input
toolbox = xlsread('source_graf.xlsx');

r=randi(1000,1,1);
vystup2=toolbox(r,:);
p=0;
riadok=100;
lag=1;
% leng=length(vystup);
covariance(2,2)=0;
covariancee(200,2)=0;
N_lag=200;
suma(2000,3)=0;
vystupx=0;
% n pocet realizaci zahrnutych do spracovania-100
n=130;
% vypočet krízovej korelácie pomocou kovariancie a súčinu STDX * STDY
for i=100:n
    vystup=toolbox(i,:);
vystupx=horzcat(vystupx,vystup);
end
leng=length(vystupx);
leng2=length(vystup2);
disp (leng);

for m=1:N_lag
    coval=vystupx(1,1-1+lag:leng);
    cova2=vystupx(1,1:leng+1-lag);
    cova3=vystup2(1,1-1+lag:leng2);
```

```

cova4=vystup2(1,1:leng2+1-lag);
covariance=cov(cova1,cova2);
covariance2=cov(cova3,cova4);
res=covariance(1,2);
res2=covariance2(1,2);
covariancee(m,1)=res;
covariancee(m,2)=m;
covariancee(m,3)=res2;
lag=lag+1;
end
avg1=mean(covariancee(:,1));
avg2=mean(covariancee(:,3));
disp(avg1);
disp(avg2);
hold on
bar(covariancee(:,2),covariancee(:,1),0.4,'red');
hold on
plot(covariancee(:,2),covariancee(:,3),'blue');
legend('Cyy-subor realizacii','Cyy- 1 realizacia');
xlabel('Lag'),ylabel('autokovariancia');
ylim([-0.02 0.06])
xlim([0 N_lag])
legend('boxoff');

```

Tabulka č.1: Vstupné a výstupné údaje z lineárnej sústavy

t/[s]	randn	posun do kladnej časti normovaný	výstupný modelovaný
	osy	náhodný signál, U	signál y_r signál- y_m
0	0,1614	4,1614	57 0 69,336
30	-0,2682	3,7318	49 58,85699 110,156
60	-0,4099	3,5901	47 107,1717 132,812
90	-0,7113	3,2887	42 130,6789 141,602
120	0,0614	4,0614	55 137,9479 155,078
150	-1,8461	2,1539	22 153,4168 142,969
180	-0,3983	3,6017	47 133,2834 145,117
210	-0,5435	3,4565	45 134,5697 151,758
240	-0,9119	3,0881	38 142,6076 150,195
270	0,6527	4,6527	66 139,6896 168,164
300	-0,7343	3,2657	41 164,0874 168,164
330	0,5406	4,5406	64 163,3303 178,32
360	0,9758	4,9758	71 177,165 194,922
390	-0,1569	3,8431	51 201,027 192,383
420	0,2778	4,2778	59 197,2932 192,187
450	0,6395	4,6395	65 195,5135 198,437
480	-0,081	3,919	53 203,4759 194,727
510	0,5409	4,5409	64 198,2087 197,461
540	-1,2626	2,7374	32 201,8577 179,492
570	1,1104	5,1104	74 175,0739 191,406
600	-0,9896	3,0104	37 190,4843 195,703
630	-1,8288	2,1712	22 197,9791 189,453
660	1,3845	5,3845	79 188,0413 183,008
690	-0,0627	3,9373	53 176,7312 174,609
720	0,4489	4,4489	62 164,1177 178,125
750	-0,3633	3,6367	48 168,2848 160,156
780	-1,0206	2,9794	36 141,7303 158,594
810	-3,073	0,927	0 139,3685 162,695
840	0,6263	4,6263	65 145,334 160,156
870	-0,2867	3,7133	49 141,2385 176,367
900	-0,1973	3,8027	51 164,9674 175,781
930	0,4056	4,4056	61 163,8303 185,156
960	-1,4193	2,5807	29 177,449 201,562
990	-0,7294	3,2706	41 201,1883 198,047
1020	1,1473	5,1473	74 197,3849 197,266
1050	0,5979	4,5979	65 195,5655 203,516
1080	-1,2813	2,7187	32 203,5055 199,219
1110	-2,2033	1,7967	15 198,2255 201,367
1140	-0,5712	3,4288	44 201,8673 182,617
1170	0,214	4,214	58 175,0793 194,727
1200	0,9424	4,9424	71 190,4874 199,414
1230	0,0937	4,0937	56 197,9809 192,187
1260	-1,1223	2,8777	34 188,0423 184,961
1290	0,3062	4,3062	60 176,7317 176,758
1320	-1,1723	2,8277	34 164,118 179,883
1350	-0,961	3,039	37 168,285 162,305
1380	-0,6537	3,3463	43 141,7304 160,937
1410	-1,2294	2,7706	33 139,3686 164,844
1440	-0,271	3,729	49 145,334 161,914
1470	-0,9	3,1	38 141,2385 178,125
1500	-0,2857	3,7143	49 164,9674 176,758
1530	-0,4624	3,5376	46 163,8303 185,547
1560	-0,4098	3,5902	47 177,449 201,562
1590	-0,5035	3,4965	45 201,1883 198,242
1620	1,2333	5,2333	76 197,3849 197,656
1650	0,6103	4,6103	65 195,5655 203,906
1680	0,0591	4,0591	55 203,5055 199,805
1710	-1,4669	2,5331	28 198,2255 202,344
1740	-1,6258	2,3742	26 201,8673 183,789
1770	-1,9648	2,0352	20 175,0793 195,117
1800	2,6052	6,6052	100 190,4874 290,234