

Optimalizace a koordinace provozu v městské dopravě

Filip Schenk

Bakalářská práce
2021



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Ústav informatiky a umělé inteligence

Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Filip Schenk**
Osobní číslo: **A18508**
Studijní program: **B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor: **Softwarové inženýrství**
Forma studia: **Prezenční**
Téma práce: **Optimalizace a koordinace provozu v městské dopravě**
Téma práce anglicky: **The Optimisation and Coordination of City Traffic**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se se základními pojmy z oblasti matematické optimalizace a teorie grafů. Ve druhé fázi se zaměřte zejména na modely dopravních úloh.
2. Zpracujte literární rešerši zaměřenou na obsluhu a řízení městské dopravy světelnými signalizačními zařízeními.
3. Navrhněte model a přístup vhodný pro řízení zvolené dopravní sítě.
4. Identifikujte pozitiva i negativa navržených přístupů a vyzkumte výzkumné směry vhodné pro další práci.

Forma zpracování bakalářské práce: **Tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. BOON, Marko A. A. *Polling models: from theory to traffic intersections*, Eindhoven, 2011. Dizertační práce. Technische Universiteit Eindhoven. DOI: 10.6100/IR702638.
2. GÖTTLICH, Simone, Michael HERTY a Ute ZIEGLER. Modeling and optimizing traffic light settings in road networks. *Computers & Operations Research*. 2015, č. 55, s. 36-51. ISSN 0305-0548.
3. GHIANI, Gianpaolo, Gilbert LAPORTE a Roberto MUSMANNNO. *Introduction to logistics systems planning and control*. Hoboken, NJ, USA: J. Wiley, c2004. ISBN 0-470-84917-7.
4. PLANING, Patrick, Patrick, MÜLLER, Payam, DEHDARI a Thomas, BÄUMER. *Innovations for Metropolitan Areas: Intelligent Solutions for Mobility, Logistics and Infrastructure designed for Citizens*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2020. ISBN 978-3-662-60805-0.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Dušan Hrabec, PhD.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. ledna 2021**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17. května 2021**

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D. v.r.
děkan



prof. Mgr. Roman Jašek, Ph.D. v.r.
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 15. ledna 2021

Jméno, příjmení: Filip Schenk

Název bakalářské/diplomové práce: Optimalizace a koordinace provozu v městské dopravě

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním diplomové/bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že diplomová/bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk diplomové/bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji diplomovou/bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – diplomovou/bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování diplomové/bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové/bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem diplomové/bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považuji se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na diplomové/bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne 15. 5. 2021

Filip Schenk, v. r. ...
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zaměřuje na optimalizaci a koordinaci provozu v městské dopravě. Předmětem práce je tvorba modelu idealizované sítě dvou dopravních křižovatek se světelnou signalizací pro účely optimalizace světelného řízení. V teoretické části byly probrány aparáty a metody používané při matematickém modelování. V praktické části jsou popsána používaná zjednodušení a sestavení modelu. Model byl sestavován na idealizované dopravní síti.

Klíčová slova: matematická optimalizace, teorie grafů, optimalizace v dopravě, signální plán

ABSTRACT

This bachelor thesis focuses on the optimization and coordination of traffic in urban transport. The subject of the work is the creation of a model of an idealized network of two traffic intersections with traffic lights for the purpose of traffic control optimization. In the theoretical part, the apparatuses and methods used in mathematical modeling were discussed. The practical part describes the used fibers and model assembly. The model was built on an idealized transport network.

Keywords: mathematical optimization, graph theory, optimization in transport, signal plan

Zde bych chtěl poděkovat své rodině, přítelkyni a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali. Dále bych chtěl poděkovat všem mým vyučujícím za celou dobu mého bakalářského studia za předané informace a zkušenosti. Zvláštní poděkování patří panu Ing. Dušanovi Hrabcovi Ph.D. za jeho vedení při této bakalářské práci, jeho trpělivost, rady a připomínky.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské/diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

OBSAH

ÚVOD.....	9
I TEORETICKÁ ČÁST	11
1 MATEMATICKÁ OPTIMALIZACE	12
1.1.1 Deterministické a stochastické modely	13
1.1.2 Statické a dynamické modely.....	13
1.1.3 Mikroskopické a makroskopické modely	14
1.1.4 Modely se spojitou a diskrétní reprezentací času.....	14
1.3 ROZBOR METOD MATEMATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ	15
1.3.1 Lineární programování	15
1.3.2 Smíšené celočíselné lineární programování.....	16
1.3.3 Nelineární programování	17
2 TEORIE GRAFŮ	18
2.1 DŮLEŽITÉ POJMY	19
2.1.1 Násobnost hrany	19
2.1.2 Sled.....	19
2.1.3 Dostupnost vrcholu	20
2.1.4 Smyčka.....	20
2.2 DRUHY GRAFŮ	20
2.2.1 Orientovaný a neorientovaný graf.....	20
2.2.2 Úplný graf	20
2.2.3 Podgraf	21
2.2.4 Multigraf	21
2.2.5 Prostý graf	21
2.3 MATEMATICKÁ REPREZENTACE GRAFU	21
2.3.1 Matice sousednosti	23
2.3.2 Matice incidence	24
2.3.3 Matice vzdáleností	25
3 OPTIMALIZACE ŘÍZENÍ DOPRAVY	27
3.1 POJMY	27
3.1.1 Signální plán.....	27
3.1.2 Dopravní proud	27
3.1.3 Fáze	28
3.1.4 Mezičas	28
3.1.5 Kolizní pruh	28
3.1.6 Zácpa	28
3.2 RELEVANTNÍ MODEL Y DOPRAVNÍCH SÍTÍ.....	28
3.2.1 Hydrodynamické modely dopravního toku.....	28
3.2.2 Model mezibuněčného přechodu	29
II PRAKTICKÁ ČÁST	31
4 ZNÁZORNĚNÍ DOPRAVNÍ SÍŤE	32

4.1	GRAFICKÝ MODEL SÍTĚ KŘIŽOVATEK	32
4.1.1	Statický signální plán	33
4.1.2	Spojitosť mezi pruhy v křižovatce	33
5	REPREZENTACE DOPRAVNÍ SÍTĚ V GRAFU	36
5.1	GRAF SÍTĚ BEZ PODGRAFŮ KŘIŽOVATEK.....	36
5.2	GRAF SÍTĚ S PODGRAFY KŘIŽOVATEK.....	37
6	PROCES MODELOVÁNÍ DOPRAVNÍ SÍTĚ.....	39
6.1	APLIKOVANÉ ZJEDNODUŠENÍ A POSTUPY.....	39
6.1.1	Rychlost jako konstanta	39
6.1.2	Omezení počtu signálů na dva	39
6.1.3	Rozšíření grafu za účelem časové diskretizace	39
6.2	MNOŽINY	41
6.3	PARAMETRY	41
6.4	PROMĚNNÉ	42
6.5	MODEL	42
7	POPIS MODELU	44
	ZÁVĚR	45
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	46
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....	49
	SEZNAM OBRÁZKŮ	50
	SEZNAM TABULEK.....	51
	SEZNAM PŘÍLOH.....	52

ÚVOD

Potřeba městské dopravy a jejího řízení provází člověka, pokud pomineme jiné hůře zdokumentované případy, už od dob Římské říše. V 1. století našeho letopočtu bylo město Řím jedním z největších měst na celém světě, nicméně jeho dopravní síť byla nedostačující pro provoz způsobený zásobováním a přirozeným pohybem obyvatelstva. Julius Caesar proto vydal nařízení, podle kterého mohly vozy cestovat městem pouze v noci. Tyto opatření se brzy rozšířily i do jiných měst Římské říše. Později musel císař Hadrian dokonce ustanovit maximální počet vozů, které mohly do Říma vjet. Dalším výrazným krokem v optimalizaci dopravy bylo řešení Leonarda da Vinciho, který navrhoval oddělit kolovou dopravu od pěších pomocí paralelní vyvýšené cesty pro chodce [14]. První elektronický semafor na světě byl použit ve městě Cleveland, státě Ohio v USA, a to konkrétně dne 5. 8. 1914 [15].

V současnosti nabývá otázka řízení městské dopravy a její optimalizace na čím dál větší důležitosti, jelikož je dopravní síť vlivem rostoucího počtu vozidel, zejména ve městech, extrémně vytěžována. Děje se tak jednak z důvodu vysokých nároků na dopravu v oblasti logistiky a dopravy zboží, která vytěžuje dopravní uzly a druhá čím dál tím větší dostupností osobních motorových vozidel v kombinaci s kumulací populace v oblasti měst. V České republice byl v roce 2010 počet aut na 1000 obyvatel 429. O 9 let později, v roce 2019, tento počet vyrostl na 554 [16]. Motivací optimalizace dopravy není jen úspora času minimalizací čekacích časů, a tím pádem i financí. Důležitý je i environmentální aspekt. Maximalizováním plynulosti dopravy ve městech se, v případě zážehových a spalovacích motorů, také snižuje produkce CO_2 . Plynulost dopravy navíc může ovlivňovat i její bezpečnost.

Oblastí zájmu této práce je optimalizace řízení světelné signalizace v rámci idealizované sítě křižovatek, a to tak, aby se minimalizoval čekací čas vozidel. V oblasti optimalizace světelného řízení dopravy existuje dvojice přístupů. Jedním z nich je adaptivní optimalizace založená na datech a pracující v reálném čase. Druhý přístup je poté takový, že se sestavuje signální plán na základě jednoho či několika vzorcích dat, který je ale poté používán staticky. Při tomto přístupu se může vytvářet více statických signálních plánů, které se poté v průběhu dne střídají podle předpokládané vytíženosti sítě, nedokáží ale reagovat na neočekávané změny. První přístup je finančně náročnější, jelikož je vyžadována instalace indikátorů a detektorů, které do systému dodávají data. Zároveň se kvůli své komplexnosti a výpočetní náročnosti nehodí pro optimalizaci větších dopravních sítí. V této práci se budeme zabývat

adaptivní optimalizací. Cílem bylo vytvořit lineární celočíselný matematický model pro optimalizaci provozu v idealizované dopravní síti.

V první kapitole teoretické části jsou popsány metody a techniky použité pro matematickou optimalizaci. Pro reprezentaci sítě byla použita teorie grafů, která je představena ve druhé kapitole. Přístupy pro modelování dopravních sítí a důležité pojmy z oblasti řízení dopravy jsou vysvětleny v kapitole 3. V praktické části potom ve 4. kapitole přecházíme ke grafické modelaci naší sítě křižovatek, na kterou navazuje 5. kapitola, kde převádíme tuto síť do reprezentace v grafu a je znázorněn zápis grafů do matic. V 6. kapitole jsou posány zjednodušení aplikované při matematickém modelování a také proces modelování společně s modelem. Popis modelu je obsáhnut v 7. kapitole. Závěr je pak věnován diskuzi k modelu a jeho použitelnosti pro třídu Tomáše Bati ve Zlíně.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 MATEMATICKÁ OPTIMALIZACE

Úloha matematická optimalizace, neboli matematické programování, je disciplína zabývající se nácházením řešení, která jsou pro definovanou účelovou funkci optimální – čili minimální nebo maximální v závislosti na požadovaných podmínkách. Slovo programování pochází z anglického slova „program“ a nemá nic společného s v češtině používaným slovem programování. Jedná se o hledání extrémů funkcí na množině, která může být definována buď lineárními nebo nelineárními rovnicemi, popřípadě může být neomezená. Účelem matematického programování pak je sestavení a řešení rozhodovacích úloh s co nejlepším řešením vzhledem k optimalizačnímu kritériu.

S úlohami optimalizace se setkáváme, byť možná nevědomky, každý den: při volbě cesty do práce, úklidu či jiných činnostech, pro které existuje neprázdná množina možností provedení, ze kterých můžeme vybírat právě to optimální, čili pro nás nejlepší[10]. Už v dávnověku dokázali lidé optimalizovat například rozložení opěrných sloupů či zavlažovací systém metodou pokusu a omylu. Tento způsob optimalizace však nenacházel nutně nejlepší řešení. Dokonce i zvířata vybírají optimální trasu na cestě ke své kořisti.

Ale abychom mohli proces optimalizace vyjádřit, otestovat a znovupoužívat, musíme mu dodat jisté míry exaktnosti. K tomu používáme matematický aparát a techniky matematické optimalizace. Jmenovitě potom mluvíme o metodách pro podporu rozhodování, které dělíme na metody exaktní a metody heuristické. Tyto techniky jsou úspěšně nasazovány v široké škále oborů od přírodovědy, přes ekonomii, fyziku, informatiku až po sociologii[12].

Pro správnou funkci matematické optimalizace musíme definovat několik důležitých pojmů. Jedná se o *množinu přípustných* řešení, což jsou všechny řešení, která splňují omezující podmínky optimalizační úlohy. *Optimalizační kritérium* je hledisko, pomocí kterého pak posuzujeme kvalitu nalezeného přístupného řešení. Definujeme-li optimalizační kritérium jako funkční vztah, hovoříme o *účelové funkci*. Zkombinujeme-li účelovou funkci a množinu omezujících podmínek s definicemi proměnných, popřípadě konstant, dostáváme *matematický optimalizační model*.

Obecnou optimalizační úlohu můžeme zapsat takto:

$$\arg \min_{x \in \Omega} f$$
$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

kde ω je množina (prostor) přípustných řešení a f účelová funkce. Prostor přípustných řešení zpravidla omezuje nerovnostmi a omezujícími podmínkami pro hodnoty proměnných.

1.1 Matematické modelování

Matematické modelování patří mezi exaktní metody optimalizace. Jeho účelem je sestavení a řešení matematických modelů vycházejících z reálných problémů. Při analýze těchto reálných problémů můžeme použít buď analytický, nebo numerický přístup.

Matematické modelování jako takové slouží k matematickému popisu dějů z reálného světa. Při matematické formulaci těchto reálných problémů se však často potýkáme s příliš velkou komplexností, proto zpravidla volíme nějakou možnost zjednodušení – například vynecháváme nedůležité proměnné[13]. Při identifikaci takovýchto proměnných musíme být velmi opatrní, jelikož nešikovně zvolené vynechání části systému může velmi ovlivnit výsledek. Matematické modely můžeme dělit podle několika kritérií. V následujícím dělení se zaměříme na jejich dělení podle reprezentace parametrů a proměnných a pojetím jejich hodnot.

1.1.1 Deterministické a stochastické modely

Model můžeme označit za deterministický, pokud můžeme všechny hodnoty konstantních parametrů vstupujících do vytvářeného modelu přesně určit. Naopak za stochastický označujeme model takový, který nemá danou hodnotu alespoň jednoho konstantního parametru v tom smyslu, že se s každým pozorováním reálného systému, který si přejeme modelovat, mění. Musíme proto použít náhodnou hodnotu z rozsahu odpozorovaných hodnot. Do stochastického modelu zkrátka vstupuje prvek nejistoty, přesněji náhody, díky čemuž vyhovuje stochastický model konkrétním situacím jen s určitou mírou pravděpodobnosti. V případě stochastických modelů musíme používat speciální metody pro validaci optimálního výsledku.

1.1.2 Statické a dynamické modely

Mezi statickým a dynamickým modelem je pouze jeden rozdíl, a to ten, zda se při sestavování zohledňuje čas. Statické modely ve své definici neobsahují žádnou proměnnou času, proto dokáží pracovat jen pro konkrétní situaci, kdežto dynamické modely čas

zohledňují, díky čemuž mohou rozhodovat i výhledově, čili jsou adaptivní na vývoj modelu v čase.

1.1.3 Mikroskopické a makroskopické modely

Mluvíme-li o mikroskopickém modelu, myslíme tím model, v němž provádíme řešení a zohledňujeme každý jeden prvek nějakého systému. Pokud můžeme jednotlivé prvky zanedbat, o čemž se rozhodujeme podle jejich počtu a nároků na výpočetní složitost optimalizace, a uvažovat pouze o množinách takovýchto prvků, pak mluvíme o makroskopickém modelu.

1.1.4 Modely se spojitou a diskrétní reprezentací času

Dynamické modely se spojitou reprezentací času mají nejpřesnější výsledky. Při uvažování je také spojitý čas nejlépe uchopitelný. Modely se spojitou reprezentací času musejí být založeny na diferenciální reprezentaci rovnic. Nicméně pokud chceme při optimalizaci používat výpočetní techniku, musíme tak či tak použít nějaký diskretizační algoritmus – ten může čas diskretizovat buďto rovnoměrně, čili nám vznikne množina stejně velkých časových úseků, a nebo můžeme veličinu času diskretizovat adaptivně, což je efektivnější a přesnější přístup, není ale vhodný pro každý model se spojitou reprezentací času[5]. Optimalizace takovýchto modelů má také zpravidla vyšší výpočetní složitost.

V případě modelu s diskrétním pojetím času diskretizujeme jeho průběh už při modelaci. Při této činnosti však musíme být ostražití. Jedná se především o to, abychom zvolili správný rozsah diskretizace. Čím jemnější bude dělení času, tím přesnějšího budeme dosahovat výsledku, nicméně budeme zvyšovat výpočetní složitost. Pokud naopak zvolíme příliš velký časový krok, snižujeme výpočetní složitost, nemusíme ale dojít k optimálnímu řešení. Jde tedy o to najít vhodný kompromis. Při velmi jemné diskretizaci času si poté při použití výpočetní techniky musíme také pohlídat případné nesprávné zaokrouhlování hodnot některých algoritmů. Pokud chceme dosahovat optimalizačních výsledků v reálném čase, je k tomu nejvhodnější nespojitě pojetí času.

Matematické modely můžeme dělit i podle dalších kritérií, těm se ale v této práci dále nebudeme věnovat.

1.2 Dělení modelů podle přístupu k modelování

Obecně platí, že přístupy při matematickém modelování můžeme dělit na tři skupiny.

1.2.1 Deduktivní přístup

Pro modelování systému čistě deduktivním přístupem musíme být schopni popsat každý proces v takovém systému exaktními vztahy (např. Newtonovými zákony). Výsledky z modelů na které byl při modelování aplikován deduktivní přístup bývají nejpřesnější, tento přístup se však bohužel nedá aplikovat na každý systém.

1.2.2 Induktivní přístup

Induktivní přístup můžeme chápat také jako datově orientovaný. Spočívá v tom, že můžeme modelovaný systém jednoduše popsat vstupními a výstupními daty, neznáme však přesný popis dějů uvnitř systému. Při induktivním přístupu modelace se poté často uplatňují neuronové sítě pro odhad reálných výsledků založených na naměřených datech.

1.2.3 Přístupy mezi deduktivními a induktivními

Základem těchto přístupů bývá model, který je založen čistě deduktivně, ale který neodpovídá přesně pozorovanému systému. Nad takovýmto modelem poté musí proběhnout tzv. „kalibrace“ doplňujícími parametry, jejichž hodnoty získáme indukčním postupem, čili z reálných dat.

1.3 Rozbor metod matematického programování

Modely matematického programování dělíme do několika skupin podle toho, jakého typu jsou funkce, které definují vztahy mezi proměnnými a také podle množin hodnot, které mohou proměnné či konstanty nabývat. V této kapitole vysvětlíme význam tří skupin,

1.3.1 Lineární programování

Podstatou modelu lineárního programování je to, že každá rovnice obsažená v matematickém modelu musí být lineární a přitom proměnné mohou nabývat libovolné hodnoty. V angličtině se označuje jako linear programming a častou se uvádí pod zkratkou LP. Jedná se o nejjednodušší a nejstarší disciplínu matematické optimalizace. Tento přístup byl popsán ruským matematikem Leonidem Kantorovichem v průběhu druhé světové války pro řešení a optimalizaci armádní logistiky a poté nasazován Georgem Dantzigem pro

optimalizaci logistických úloh [12]. Nejčastěji používaným algoritmem pro řešení úloh tohoto typu je simplexová metoda.

Z definice lineárního modelu vyplývá několik zákonitostí. Díky tomu, že i účelová funkce musí být lineární, můžeme prohlásit, že každé nalezené lokální maximum či minimum je zároveň maximum či minimum globálním. Dále platí, že jestliže je možné najít optimální řešení, nachází se vždy ve vrcholu. Popřípadě, pokud je optimálním řešením úlohy řešené ve dvourozměrném prostoru dvojice vrcholů, je optimálním řešením zároveň také celá úsečka spojující tyto body. Ve třírozměrném prostoru potom můžeme mluvit o trojici optimálních bodů, které definují stěnu daného útvaru jako množinu optimálních řešení.

Každý lineární model se dá obecně upravit do tohoto tvaru:

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ \text{s. t. } Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{aligned}$$

Přičemž x je proměnná a A, b jsou konstanty. Abychom dodrželi podmínku obecného zápisu lineárního modelu, je nutno dodat, že výše zmíněné nerovnosti můžeme dále upravit, popřípadě rozšířit či je změnit na rovnost. V daném případě je množina přípustných řešení definována pomocí jedné rovnice, ve které se vyskytují naše konstanty a toho, že x může nabývat hodnot pouze nezáporných.

1.3.2 Smíšené celočíselné lineární programování

Modely lineárního programování jsou čistě spojité, z čehož plyne, že jsou pro proměnné povoleny hodnoty z množiny reálných čísel. V některých případech jsou tyto hodnoty přípustné a odpovídají reálnému předpokladu. Jedná se především o případy, kdy pracujeme například s nějakou komoditou, která je lehce dělitelná, jako například tekutiny, plyny a jiné. Jednoduše tak můžeme naměřit desetinnou hodnotu a dále s ní pracovat.

Pokud ovšem pracujeme s komoditou která nemůže být dělitelná, jako například počet vozidel, musíme použít smíšené celočíselné lineární programování, anglicky nazývané mixed-integer linear programming, zpravidla reprezentované zkratkou MILP. Oproti

lineárnímu programování se liší v tom, že pro jednu nebo více proměnných zavádíme podmínku celočíselnosti [7].

Obecnou formulaci smíšeného celočíselného lineárního modelu potom můžeme zapsat takto.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x + c^T y \\ \text{s. t.} \quad & Ax + By \leq b \\ & x \geq 0 \\ & y \in \mathbb{Z}_+^p \end{aligned}$$

Přičemž oproti výše popisovanému lineárnímu modelu jsme doplnili proměnnou y , pro kterou jsme doplnili podmínku kladné celočíselnosti a konstantu B .

1.3.3 Nelineární programování

Vystupuje-li v modelu, ať už přímo na pozici účelové funkce, nebo jen v některém z omezení, nelineární funkce, potom mluvíme o modelu nelineárního programování. K použití nelineárního modelu bychom se měli uchýlovat pouze v případech, ve kterých by případná aproximovaná linearita modelu měla velké odchylky. V případě nelineárního programování totiž mluvíme o násobně vyšší složitosti výpočtů a navíc musíme řešit typické problémy optimalizace nelineárních funkcí, které u lineárních řešit nemusíme [6].

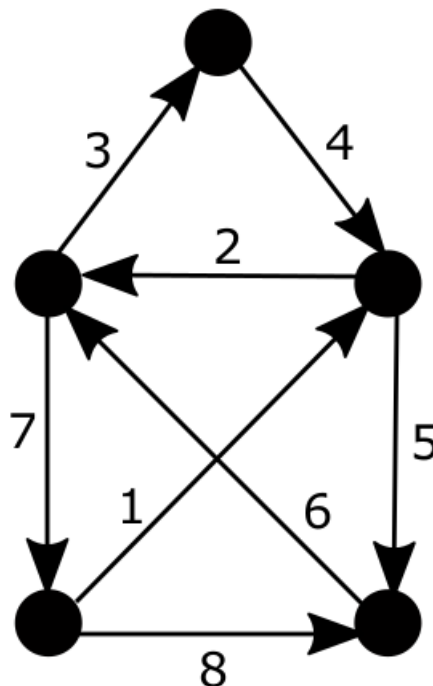
- Rovina přípustných řešení nemusí být souvislá
- Rozdílné počáteční body mohou vést k rozdílným výsledkům
- Odlišení lokálních a globálních extrémů
- Optimální řešení se nemusí nacházet na hranici množiny přístupných řešení

Většina algoritmů dokáže v nespojitých modelech hledat pouze lokální extrémy a ty potom mezi sebou porovnávat.

2 TEORIE GRAFŮ

Teorie grafů spadá pod obor diskrétní matematiky. Nejedná se o notoricky známé grafy funkcí nebo grafy používané ve statistice (sloupcový, koláčový, adt.). Pod pojmem graf v kontextu teorie grafů si můžeme představit soubor bodů a čar, které tyto body spojují. Body pak označujeme jako *vrcholy (uzly) grafu*, spojnice mezi nimi pak *hrany grafu*. Každý graf pak musí mít konečný počet vrcholů i hran.

Za zakladatele teorie grafů se považuje Leonhard Euler. Ten v 18. století řešil proslavený matematický problém vycházející z reálného prostředí, a to jak projít sedm mostů města Královce. Znamější název města zní Königsberg. Problém spočíval v nalezení cesty, která projde přes všechny mosty, ale přes každý jeden z nich pouze jednou. Postupoval tak, že si mosty promítl jako vrcholy grafu a spojoval je hranami grafu. Má-li takovéto zadání úlohy jedno nebo více řešení, mluvíme o tzv. eulerovském grafu. Eulerovské grafy dále dělíme podle toho, zda končí ve stejném vrcholu, ve kterém začínaly na uzavřené a otevřené. Samotné řešení eulerovského grafu je potom pojmenováno jako eulerovský tah [11]. Na obrázku níže (Obrázek 1. Eulerovský graf) můžeme vidět známý hlavolam, který spočívá v nakreslení domečku jedním tahem bez toho, aniž bychom jednou linií prošli vícekrát. V podstatě máme zadán graf a hledáme k němu náležící eulerovský tah.



Obrázek 1. Eulerovský graf

Teorie grafů se uplatňuje pro reprezentaci systémů v nejrůznějších oborech jako například biologie, informační technologie, elektrotechnika, chemie a jiných. Je také jedním ze základních stavebních kamenů při modelování dopravních sítí.

Samotný graf G definujeme jako dvojici množiny vrcholů V a množiny hran E .

$$G = (V, E)$$

Někdy můžeme mluvit také o uspořádané dvojici množin. Tím je myšleno to, že na prvním místě jsou vždy uvedené vrcholy a na druhém hrany. Samotnou množinu vrcholů grafu pak označujeme jako $V(G)$ a množinu hran grafu $E(G)$.

O množině hran grafu platí, že je podmnožinou množiny všech dvojic vrcholů, jejichž vrcholy jsou navzájem různé.

$$E \subseteq \binom{V}{2}$$

Při sestavování grafů je často potřeba nějakým způsobem ohodnotit hrany grafu předem danou metrikou – ať už jde o vzdálenosti, časy či jiné metriky.

2.1 Důležité pojmy

Z oboru teorie grafů si musíme definovat pojmy a názvosloví, které jsou nezbytné pro definici a následnou práci s grafy.

2.1.1 Násobnost hrany

Veličina násobnosti hrany popisující graf je reprezentována číslem a dvěma uzly grafu. Obecně ji můžeme zapisovat takto:

$$m(x, y).$$

V tomto zápisu je m číslo a x, y vrcholy grafu. Informuje nás o počtu hran, které vedou z vrcholu x do vrcholu y .

2.1.2 Sled

Hovoříme-li o sledu v souvislosti s teorií grafů, myslíme tím takovou posloupnost vrcholů, která má mezi každými dvěma po sobě jdoucími vrcholy alespoň jednu hranu. Sled může být orientovaný i neorientovaný.

2.1.3 Dostupnost vrcholu

Dostupnost vrcholu referuje o existenci hrany mezi vrcholy. Dostupnost vrcholu x z vrcholu y je dána tím, zda existuje orientovaný sled vedoucí z vrcholu y do vrcholu x .

2.1.4 Smyčka

Smyčkou označujeme takovou hranu, která daný vrchol grafu spojuje se sebou samým.

2.2 Druhy grafů

Informace pro popis druhů grafů byly čerpány převážně z [8].

2.2.1 Orientovaný a neorientovaný graf

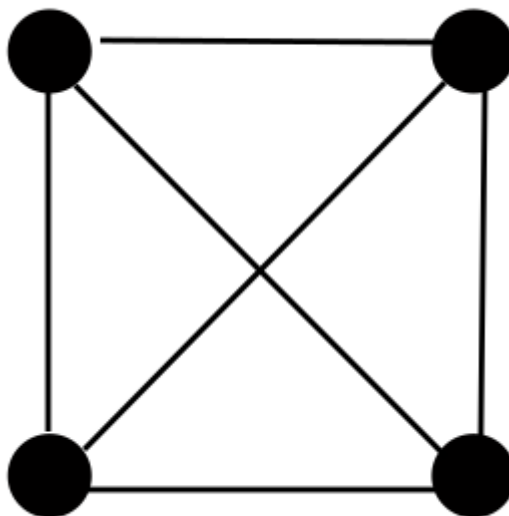
Rozdíl mezi orientovaným a neorientovaným určuje přítomnost alespoň jedné orientované hrany. Pod orientovanou hranou si můžeme představit hranu, která spojuje dva uzly grafu a umožňuje průchod pouze jedním směrem. Orientované hrany jsou definovány počátečním vrcholem x a koncovým vrcholem y . V neorientovaném grafu jsou všechny hrany průchozí oběma směry.

2.2.2 Úplný graf

Úplný graf je takový graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojené jednou hranou. Každý vrchol grafu musí být spojen hranou se všemi ostatními vrcholy. Úplné grafy se značí jako:

$$K_n,$$

kde n je počet vrcholů. Příklad úplného grafu se čtyřmi vrcholy je vyobrazen níže (Obrázek 2. Úplný graf se čtyřmi vrcholy).



Obrázek 2. Úplný graf se čtyřmi vrcholy

2.2.3 Podgraf

Podgrafem grafu G označujeme graf H , který vznikl z grafu G odebráním některých hran či vrcholů. Pro podgraf obecně platí, že množina jeho hran je podmnožinou množiny hran grafu, ze kterého je odvozen a zároveň že množina vrcholů odvozeného grafu je podmnožinou množiny vrcholů grafu, ze kterého je odvozen.

2.2.4 Multigraf

Multigrafem označujeme každý graf, který má v množině svých vrcholů dvojici, která je spojena více než jednou hranou.

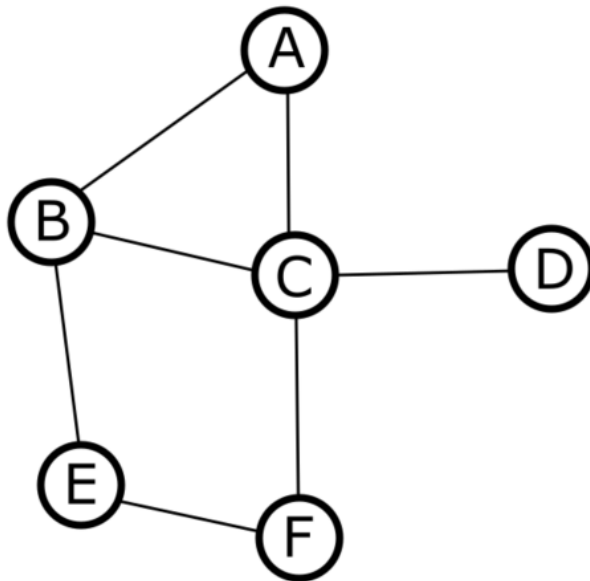
2.2.5 Prostý graf

Graf G můžeme označit za prostý graf, pokud násobnost každé hrany je rovna jedné. Prostý graf je opakem multigrafu.

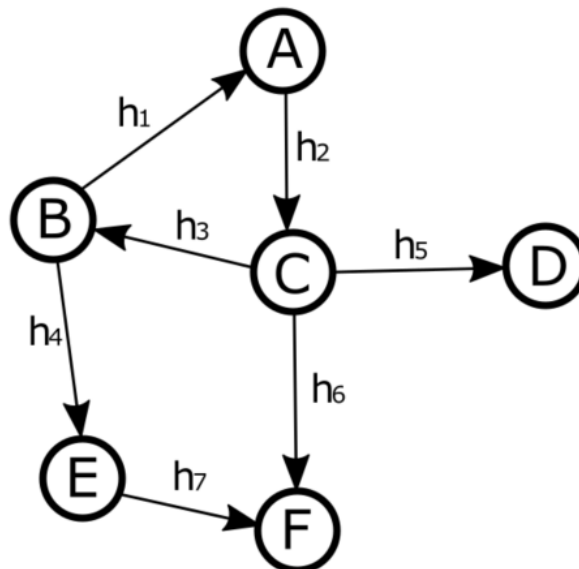
2.3 Matematická reprezentace grafu

Abychom mohli s grafem pracovat jinak než na teoretické úrovni, musíme ho vyjádřit ve srozumitelnější než grafické podobě. K tomuto účelu reprezentace grafu se nejlépe hodí zápis do matice.

Matematickou reprezentaci grafu budeme demonstrovat na dvojici grafů, z nichž jeden bude orientovaný (Obrázek 4. Vzorový orientovaný graf) a druhý neorientovaný (Obrázek 3. Vzorový neorientovaný graf), abychom lépe pochopili rozdíl mezi jejich matematickou reprezentací. Pro takový popis budeme používat matice hned čtyři. Jedná se o matici sousednosti, matici vzdáleností, matici předchůdců a matici incidence.



Obrázek 3. Vzorový neorientovaný graf



Obrázek 4. Vzorový orientovaný graf

2.3.1 Matice sousednosti

Jedná se o čtvercovou matici rozměru $m \times m$, kde m je počet vrcholů grafu. Tato matice referuje o tom, jestli vede hrada mezi dvěma danými vrcholy. Postup pro sestavení je takový, že si nejdříve označíme všechny vrcholy jedinečným identifikátorem (v našem případě písmeny A-F) a sestojíme požadovanou matici tak, že vede-li hrana mezi dvěma vrcholy, zapíšeme na pozici [číslo jednoho vrcholu, číslo druhého vrcholu] číslo 1 a v případě neorientovaného grafu zapíšeme číslo jedna také na pozici [číslo druhého vrcholu, číslo jednoho vrcholu]. Pro demonstraci si znázorníme pro orientovaný i neorientovaný graf nejprve tabulku hodnot (Tabulka 1. Pomocná tabulka matice sousednosti pro neorientovaný graf) a (Tabulka 2. Pomocná tabulka matice sousednosti pro orientovaný graf), ze které budeme vycházet při sestavování matic sousednosti. Pro graf, ve kterém se nevyskytují smyčky platí, že na diagonále matice budou samé nuly, jelikož žádný bod není spojen hranou sám se sebou. Pro neorientovaný graf dále platí, že jeho matice sousednosti je symetrická podle uhlopříčky. Uhlopříčka je v tabulkách vyznačena šedou barvou.

a) Matice sousednosti pro neorientovaný graf

Tabulka 1. Pomocná tabulka matice sousednosti pro neorientovaný graf

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	0
B	1	0	1	0	1	0
C	1	1	0	1	0	1
D	0	0	1	0	0	0
E	0	1	0	0	0	1
F	0	0	1	0	1	0

$$M_{neori} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Matice sousednosti pro orientovaný graf

Tabulka 2. Pomocná tabulka matice sousednosti pro orientovaný graf

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	1	0	0	0
B	1	0	1	0	1	0
C	0	1	0	1	0	1
D	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	0	0	0

$$M_{ori} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Matice incidence

Matice incidence je matice rozměrů $m \times n$, přičemž m je počet vrcholů grafu a n počet hran v grafu. Používá se k popisu jednotlivých hran grafu a to tak, že pro každou hranu do matice vepíšeme číslo 1, pokud vede do daného uzlu. Pokud pomineme možnost smyček v grafu, má každá hrana v matici právě dvojici čísel jedna, jelikož vždy spojuje dva body. V případě orientovaného grafu poté pro každou hranu hovoříme o dvojici čísel $(1, -1)$, přičemž číslo -1 znamená, že z daného vrcholu hrana vychází a číslo 1 zapisujeme k vrcholu, do kterého míří. Na všechny zbylé pozice v matici zapisujeme nulu.

a) Matice incidence pro orientovaný graf

Pro lepší názornost zapíšeme matici incidence neorientovaného grafu do tabulky (Tabulka 3. Matice incidence neorientovaného grafu v tabulce), ve které vyznačujeme hrany h_1-h_7 a vrcholy grafu $A-F$.

Tabulka 3. Matice incidence neorientovaného grafu v tabulce

	A	B	C	D	E	F
h_1	1	1	0	0	0	0

h_2	1	0	1	0	0	0
h_3	0	1	1	0	0	0
h_4	0	1	0	0	1	0
h_5	0	0	1	1	0	0
h_6	0	0	1	0	0	1
h_7	0	0	0	0	1	1

b) Matice incidence pro neorientovaný graf

Matici incidence orientovaného grafu zapíšeme, stejně jako matici incidence grafu neorientovaného, do tabulky (Tabulka 4. Matice incidence orientovaného grafu v tabulce).

Tabulka 4. Matice incidence orientovaného grafu v tabulce

	A	B	C	D	E	F
h_1	1	-1	0	0	0	0
h_2	-1	0	1	0	0	0
h_3	0	1	-1	0	0	0
h_4	0	-1	0	0	1	0
h_5	0	0	-1	1	0	0
h_6	0	0	-1	0	0	1
h_7	0	0	0	0	-1	1

2.3.3 Matice vzdáleností

Matice vzdáleností je používána k zachycení dat pojednávajících o vzdálenosti mezi jednotlivými body. Jedná se o čtvercovou matici $m \times m$, přičemž m je počet vrcholů grafu. Vzdálenosti se neuvádějí pouze mezi dvojicí sousedních vrcholů, ale mezi každou dvojicí vrcholů v grafu. Jestliže nejsou dva dané vrcholy sousední a spojeny jednou hranou, ale pro

přechod mezi nimi musíme provádět přes více vrcholů grafu po více hranách, je vzdálenost těchto bodů rovna nejkratší cestě mezi nimi. Pokud hrany postrádají hodnotu délky, je definice nejkratší cesty taková, že se jedná o cestu z vrcholu A do vrcholu B s průchodem co nejméně hran, potažmo vrcholů. Mají-li hrany metriku vzdálenosti, je nejkratší cesta mezi dvěma vrcholy právě ta, která má nejnižší možnou hodnotu součtu metriky vzdálenosti náležícím hranám, přes které vede cesta z vrcholu A do vrcholu B .

Do matice vepisujeme nulu po celé diagonále, jelikož z jednoho vrcholu do stejného vrcholu je vzdálenost vždy, až na speciální případy smyček, nulová. Všechny další hodnoty v matici jsou vzdálenosti mezi dvěma danými vrcholy po nejkratší cestě. Speciální případ nastává u orientovaného grafu, pokud z daného vrcholu do druhého vrcholu nevede cesta, jež by neporušovala při průchodu směr hrany. V takovém případě říkáme, že je vrchol A z vrcholu B nedostupný a na náležitou pozici v matici zapisujeme znak ∞ . V tabulce níže (Tabulka 5. Matice vzdáleností orientovaného grafu v tabulce) je přepsaná matice vzdáleností vzorového orientovaného grafu z obrázku (Obrázek 4. Vzorový orientovaný graf), u které uvažujeme udeální metriku vzdálenosti hran h_1-h_7 rovnu jedné.

Tabulka 5. Matice vzdáleností orientovaného grafu v tabulce

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	2	∞	∞	∞
B	2	0	1	∞	∞	∞
C	1	2	0	∞	∞	∞
D	2	3	1	0	∞	∞
E	3	1	2	∞	0	∞
F	2	2	1	∞	1	0

3 OPTIMALIZACE ŘÍZENÍ DOPRAVY

Pro matematickou optimalizaci řízení dopravy je nutné sestavit matematický model. Při matematickém modelování převádíme reálný systém do exaktní matematické reprezentace s jeho konstantami, proměnnými a zákonitostmi mezi nimi. Jinak tomu není ani u optimalizace řízení dopravy. K matematické reprezentaci dopravní sítě se zpravidla používá jejich reprezentace v grafu a následný zápis do matice.

Matematická modelace dopravních sítí se dále dělí podle přístupů k modelování. Jedním z největších rozdílů je to, zda je výsledný model makroskopický či mikroskopický. V případě mikroskopického modelu jsou účastníci provozu uvažováni jako samostatné elementy. U makroskopického modelu dochází ke zjednodušení a účastníci provozu v dopravní síti nejsou uvažovány jako samostatné jedinečné elementy [14]. Dalším rozdílem mezi modely dopravních sítí je pojetí času, a to buď jako spojitou nebo nespojitou veličinu. Všechny modely pro účely optimalizace světelného řízení dopravní sítě s křižovatkami však obsahují, bez rozdílu na přístup k modelu a jednotlivým zjednodušením, sadu pojmů vztahujících se jmenovitě k řízení dopravy.

3.1 Pojmy

Pro definici pojmů vztahujících se k řízení provozu na pozemních komunikacích jsme v této práci vycházeli převážně z dokumentu, který byl vydán Ministerstvem dopravy České republiky [1].

3.1.1 Signální plán

Jedná se o časové cyklicky se opakující rovržení délky signálů zelená (volno), oranžová (pozor) a červená (stop). Pro signální plán jsou dány určité časové podmínky, jako například minimální délka signálu volno či minimální délka signálu pozor.

3.1.2 Dopravní proud

Dopravní proud je souvislý či nesouvislý pohyb vozidel, jež jsou v pohybu a mají stejný směr. Za jeden dopravní proud se považuje i jízda stejným směrem ve více dopravních pruzích.

3.1.3 Fáze

Jde o část signálního plánu. Tato část je taková, že je v jejím časovém průběhu signál volno pro více pruhů, které spolu musejí být zpravidla nekolizní.

3.1.4 Mezičas

Mezičasem se rozumí součet délky signálu pozor na konci jedné fáze s délkou signálu pozor na začátku fáze následující. Mezičas je důležitý z hlediska bezpečnosti, aby všechna vozidla mohla bez ohrožení opustit oblast křižovatky.

3.1.5 Kolizní pruh

Kolizním pruhem P_1 k druhému pruhu P_2 je takový dopravní pruh, který pruh P_2 přímo protíná, nebo se s ním slučuje takovým způsobem, že v jednom z pruhů musejí dávat vozidla přednost vozidlům v pruhu druhém.

3.1.6 Zácpa

Jedná se o stav v dopravní síti, kdy je v daném čase provoz vyšší než kapacita cesty. Zácpa se však nemusí tvořit v celé síti, nýbrž pouze v jednom pruhu.

3.2 Relevantní modely dopravních sítí

V průběhu vytváření literární rešerše před návrhem a realizací této bakalářské práce bylo nalezeno větší množství relevantních prací ([17],[18],[9],[4]) prezentující různorodé matematické modely dopravních sítí. Z těchto byly vybrány ty, které se ve svém bodu zájmu nejvíce blíží problematice řešené v této práci, a také ty, jejichž zjednodušení či část postupu realizace modelu využíváme dále při sestavování modelu pro síť řešenou v praktické části této práce.

3.2.1 Hydrodynamické modely dopravního toku

Hydrodynamické modely můžeme klasifikovat obecně jako přístup k řešení optimalizačních úloh, ve kterých se vyskytuje tok kapaliny, nebo kde můžeme jistou idealizací nebo zjednodušením takovýto tok do systému zavést. V případě hydrodynamických modelů v dopravě se jedná o modely makroskopické, přičemž jako tok je vnímán dopravní proud [18]. Celý model je založen na mechanice tekutin. Je žádoucí, aby se idealizovaný aspekt, v tomto případě dopravní proud, poupravil tak, aby co nejvěrněji odpovídal toku tekutiny.

Zpravidla je na něj proto nahlíženo jako na spojitou veličinu. Výhodou hydrodynamických modelů obecně je, že v nich můžeme uplatňovat jasně dané fyzikální zákony vztahující se k mechanice tekutin.

3.2.2 Model mezibuněčného přechodu

V původním dokumentu [17] je tento model označován jako Cell-Transmission model. Jedná se o popis a optimalizaci provozu na jednosměrné dálniční cestě. Při sestavování modelu autor do určité míry vycházel z hydrodynamického modelu. Zavedl však několik zjednodušení a modifikací. Jedním z problémů, které autor spatřoval v čistě hydrodynamickém modelu bylo to, že byl známý pouze počátek cesty a její konec, respektive počet vozů (u hydrodynamického modelu lépe řečeno hustota toku), který na dálnici vyjíždí a počet vozů, který vyjíždí. Tento přístup byl do jisté míry zachován, ale byl aplikován na několik menších částí dálnice s konstantní délkou, které se v této práci nazývají buňky. Pro tvorbu buněk jako takových byl použit přístup časového skenování celé délky uvažované vozovky. Pomocí tohoto skenování byl stanoven časový iterační krok t . Tato iterační časová veličina v součinu s odhadnutou průměrnou rychlostí v vozu na dálnici se světelnou signalizací udává dráhu S každé z buněk, která je konstantní, stejně jako rychlost a časový krok. Je kladen důraz na úvážlivý výběr časového kroku v závislosti na dané rychlosti, jelikož může ovlivnit přesnost dalších měření.

Buňky jsou značeny jako $i_1 \dots i_n$, přičemž i je index, který začíná pro buňky náležící cestě číslem 1. Pro každou buňku udává parametr $n_i(t)$ počet vozidel v buňce i a čase t . Buňka n_0 slouží jako vstup na dálnici a je předcházena další buňkou, která obsahuje nekonečně mnoho vozidel $N_{-1}(t) = \infty$. Parametr maximálního počtu aut v buňce i v čase t , definovaný jako $N_i(t)$, je taktéž definován pro každou buňku. Pro úpravu hustoty dopravy se mění parametr kapacity dopravního toku této buňky $Q_i(t)$, který je definován jako maximální počet vozidel, který může vstoupit do buňky n_i při změně času z t na $t + 1$. Tento parametr je definován u všech buněk v systému. Volné místo v buňce je charakterizováno jako $N_i(t) - n_i(t)$. Pomocí těchto proměnných probíhá aproximace přístupu hydrodynamického modelu, jelikož parametr $Q_i(t)$ odpovídá toku a parametr $N_i(t) - n_i(t)$ zastupuje veličinu hustoty. S každou změnou času jsou pak aktualizovány hodnoty všech buněk.

Na model mezibuněčného přechodu navazovala mimo jiné i práce [2], která měla za cíl přizpůsobit a upravit řešení pro použití modelu v dopravní síti $m \times n$ jednosměrných cest

s křižovatkami a jeho použití při adaptivním řízení a předpověd světelné signalizace v reálném čase. Autora práce jsme při rešeršní činnosti pro tuto bakalářskou práci kontaktovali. Ten nás mimo jiné upozornil na kritický aspekt aplikace přístupu mezibuněčného přechodu na dopravní síť s křižovatkami, který mu byl při prezentaci závěrů jeho práce vyčítán. Jedná se o to, že na hranici každé křižovatky v každém pruhu musí zároveň existovat i hranice buňky a to tak, že spolu splývají. V opačném případě model ztrácí na přesnosti a možnostech použitelnosti.

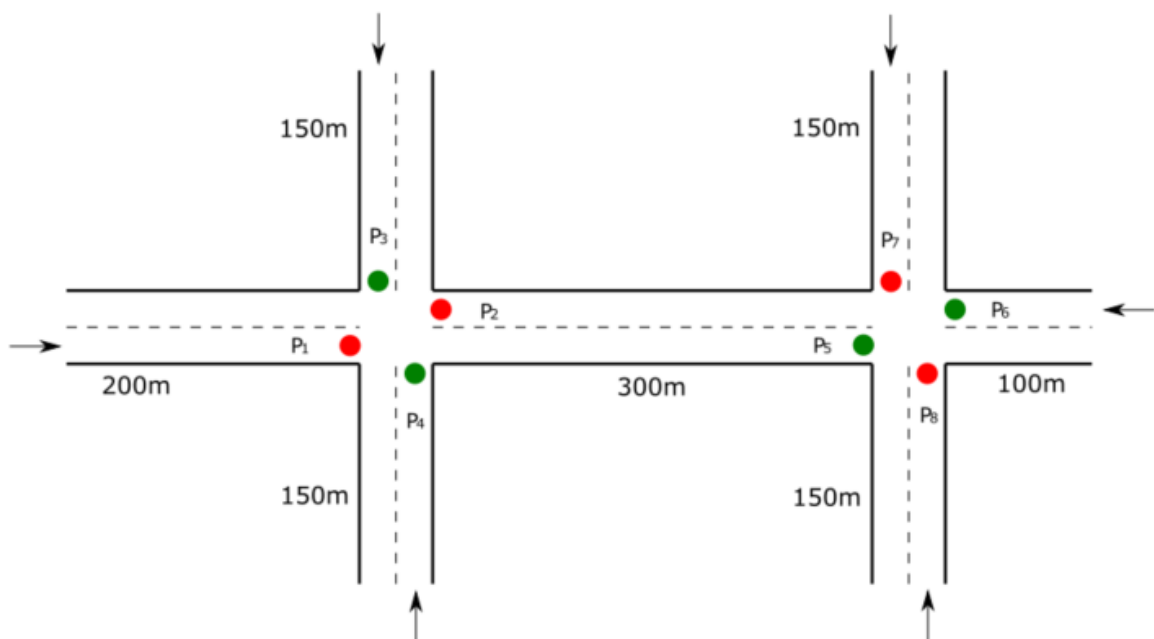
II. PRAKTICKÁ ČÁST

4 ZNÁZORNĚNÍ DOPRAVNÍ SÍTĚ

Cílem této práce je vytvořit matematický model idealizované sítě křižovatek řízených světelnou signalizací za účelem minimalizace čekacího času. Před samotným sestavením matematického modelu však musíme sestavit model grafický, za účelem znázornění problému. Tento model poté reprezentujeme v grafu a poté z něj budeme vycházet při samotné matematické modelaci.

4.1 Grafický model sítě křižovatek

Objektem zájmu je síť dvou křižovatek. Jedná se o idealizovanou síť křižovatek. Rychlostní limit na všech třech znázorněných silnicích v daném rozsahu je 50 km/h. V modelu neuvažujeme odbočovací pruhy. V obrázku (Obrázek 5) jsou zachyceny i ukázkové fáze křižovatek a označení jízdních pruhů vstupujících do křižovatek.



Obrázek 5. Grafický model sítě křižovatek

I když v modelu neuvažujeme odbočovací pruhy, vozidla v daném jízdním pruhu mohou na každé křižovatce volit mezi cestou rovně po stejné cestě, nebo odbočením do přilehlého pruhu, nesmí však odbočit do kolizního směru s rovně jedoucími vozidly. Propojením mezi pruhy v křižovatkách se budeme dále věnovat v kapitole 5.1.2. Pro každou z dvojice křižovatek dále uvažujeme pouze dvě fáze: volno (zelená) pro dvojici pruhů vstupujících do křižovatky v horizontálním směru a volno ve směru vertikálním.

4.1.1 Statický signální plán

Při modelování statického signálního plánu jsme vycházeli z práce [19]. Signální plán naší sítě křižovatek tedy bude obsahovat dohromady čtyři fáze, pro každou křižovátku dvě. V obrázku (Obrázek 6. Statický signální plán modelované křižovatky) je zachycena jedna z možných podob signálního plánu. Hodnotu časového kroku v našem modelovém signálním plánu jsme pro jednoduchost zvolili 2,5 s. Délka mezičasu je stanovena jako jeden časový krok na konci každé jedné fáze a začátku každé následující fáze ve stejné křižovatce. Mezičas na křižovatce tak dohromady dává dva časové kroky, což je důležité z hlediska bezpečnosti. Doba signálu volno je potom ve všech fázích konstantní hodnota rovna pěti sekundám. Celkový čas signálního plánu je roven dvaceti pěti sekundám.

Čas	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5	25
Pruh										
P1	Red	Red	Red	Red	Yellow	Green	Green	Green	Yellow	Red
P2	Red	Red	Red	Red	Yellow	Green	Green	Green	Yellow	Red
P3	Green	Green	Green	Yellow	Red	Red	Red	Red	Red	Yellow
P4	Green	Green	Green	Yellow	Red	Red	Red	Red	Red	Yellow
P5	Green	Green	Green	Yellow	Red	Red	Red	Red	Red	Yellow
P6	Green	Green	Green	Yellow	Red	Red	Red	Red	Red	Yellow
P7	Red	Red	Red	Red	Yellow	Green	Green	Green	Yellow	Red
P8	Red	Red	Red	Red	Yellow	Green	Green	Green	Yellow	Red

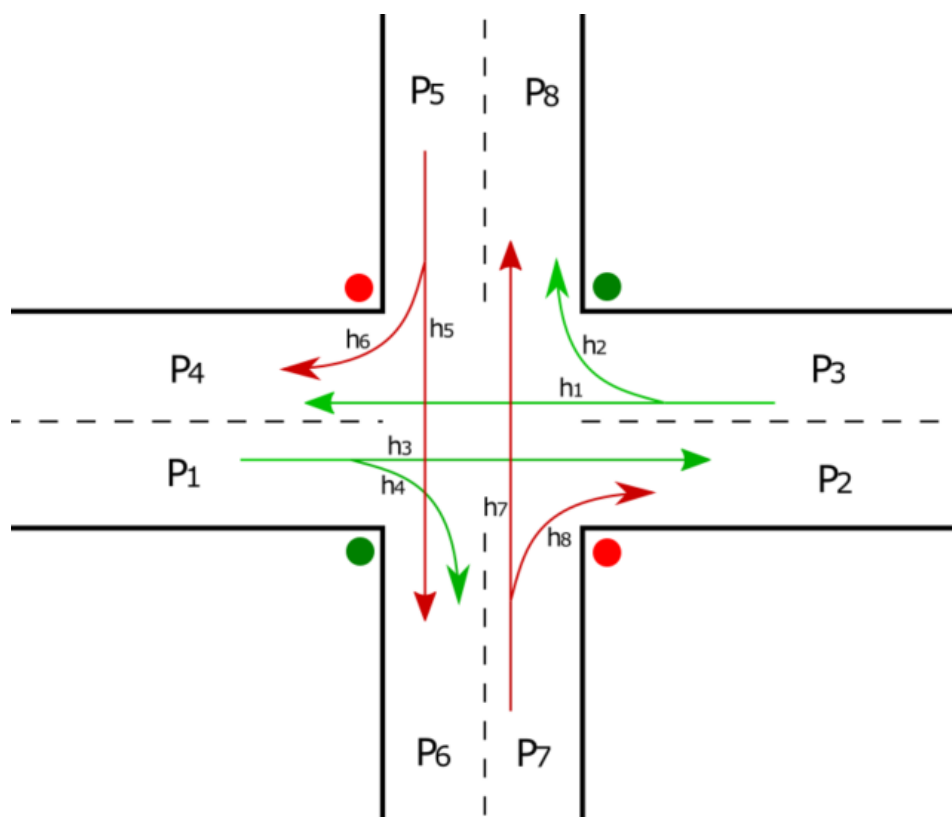
Obrázek 6. Statický signální plán modelované křižovatky

Uvedený signální plán pravděpodobně nebude velmi efektivní. Jednak jsou všechny signály typu „volno“ stejně dlouhé, druhá se pro obě křižovatky spouští fáze ve stejné frekvenci, jen s obráceným vertikálním a horizontálním směrem pro dvojici pruhů vstupujících do křižovatky.

4.1.2 Spojitost mezi pruhy v křižovatce

Na každé z křižovatek v jakémkoliv pruhu může vozidlo přejet právě z jednoho pruhu do jednoho ze dvojice jiných pruhů. Do žádného z dané dvojice pruhů nesmí vést cesta kolizní s cestami k obdobné dvojici pruhů pro opačný směr. V podstatě to znamená, že pro každé vozidlo na každé křižovatce platí, že ze svého pohledu může pokračovat buď rovně, nebo doprava. Jelikož pro obě dvě křižovatky v naší síti platí stejná pravidla pro odbočování, můžeme toto pravidlo znázornit pouze na jedné z nich.

Obrázek (Obrázek 7. Spojitost mezi pruhy v křižovatce) popisuje množinu pruhů v křižovatce P_1 - P_8 a možné přechody h_1 - h_8 mezi nimi v rámci křižovatky. Přechody mezi pruhy v rámci této křižovatky se stejnou barvou (skupina h_1 - h_4 a h_5 - h_8) znázorňují jednu fázi křižovatky. Tímto rozdělením fází a s nimi souvisejícími možnými přechody mezi pruhy jsme dosáhli toho, že spolu žádná dvojice přechodů mezi pruhy v jedné fázi nekoliduje, čili se v tomto kontextu vzájemně nekříží.



Obrázek 7. Spojitost mezi pruhy v křižovatce

Pokud bychom například v jedné fázi dali zelenou pruhu P_1 a zároveň pruhu P_7 , čili při stávajícím rozdělení by s takovou fází byly průchozí hrany h_3 , h_4 , h_7 , h_8 , můžeme jasně vidět, že hrana h_3 je v přímé kolizi s hranou h_7 , jelikož se hrany navzájem protínají. Zároveň by vozidla odbočující z pruhu P_7 po hraně h_8 do pruhu P_2 musela i přesto, že by měla ve svém pruhu signál volno, čekat než projedou vozidla z pruhu P_1 po hraně h_3 do pruhu P_2 .

Kdyby množina přípustných přechodů mezi pruhy toto kritérium nespĺňovala, vznikaly by čekací časy při odbočování způsobené předností protijedoucích vozidel a s tím související

blokace jiných vozidel. Díky tomuto kritériu také můžeme pracovat pouze se dvěma fázemi pro každou z dvojice křižovatek.

5 REPREZENTACE DOPRAVNÍ SÍTĚ V GRAFU

Problematika modelování dopravních sítí a jejich procesů vyžaduje pro své korektní odzrcadlení a z toho plynoucí použitelnost pokud možno co nejpřesnější modelaci sítě samotné. K této modelaci se v praxi používají téměř výlučně grafy, které mají vysokou výpovědní hodnotu při relativně nízkém datovém objemu, jsou snadno editovatelné a rozšiřitelné[3]. Navíc, pokud jsou interpretovány v matici, respektive v soustavě potřebných matic, jde s nimi pomocí matematického aparátu elegantně zacházet a optimalizačnímu softwaru (např. Matlab, GAMS, Pyomo...) nedělá problém s daty v takovémto formátu pracovat.

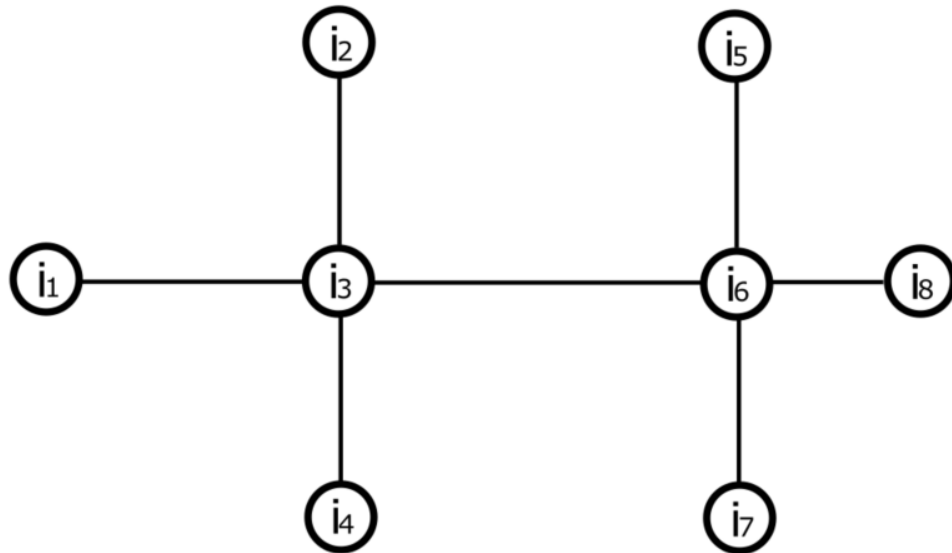
Z tohoto důvodu přistupujeme ke grafové reprezentaci sítě křižovatek i v této práci. Cílem je vytvoření orientovaného grafu, který bude co nejvěrněji reprezentovat námi zvolenou dopravní síť.

5.1 Graf sítě bez podgrafů křižovatek

Při modelování dopravních sítí do grafu existuje několik přístupů. Ty můžeme určit podle míry abstrakce jednoho uzlu. V některých případech, pokud je snaha vymodelovat velkou a komplexní dopravní síť, se přistupuje k relativně vysoké míře abstrakce. V tomto kontextu můžeme za vrcholy grafu dosazovat například celá města, popřípadě dokonce jen metropole. Při nižší úrovni abstrakce pak pracujeme s uzlem jako jednou křižovatkou.

Jelikož v této práci modelujeme pouze dvojici křižovatek, můžeme zachytit ještě detailnější rozvržení uzlů, a to tak, že každou křižovátku vyjádříme jako další množinu vrcholů grafu. Abychom ale zachytili celistvý proces vytváření grafu, tak nejdříve uvedeme postup modelace, při které uvažujeme každou křižovátku pouze jako samostatný uzel. Graf vzniknuvší tímto přístupem je neorientovaný, abychom zachytili obousměrnost každé části trojice cest. Při modelaci budeme vycházet z obrázku vloženého výše v této práci (Obrázek 5. Grafický model sítě křižovatek). Na (Obrázek 8. Graf sítě bez reprezentace podgrafů křižovatek) níže je zobrazena modelová soustava křižovatek, přičemž každá z křižovatek je reprezentována pouze jedním uzlem. Abychom zajistili obousměrnost každé z hran, zakresluje je jako neorientované, z čehož vyplývá, že se dá po dané hraně putovat oběma směry.

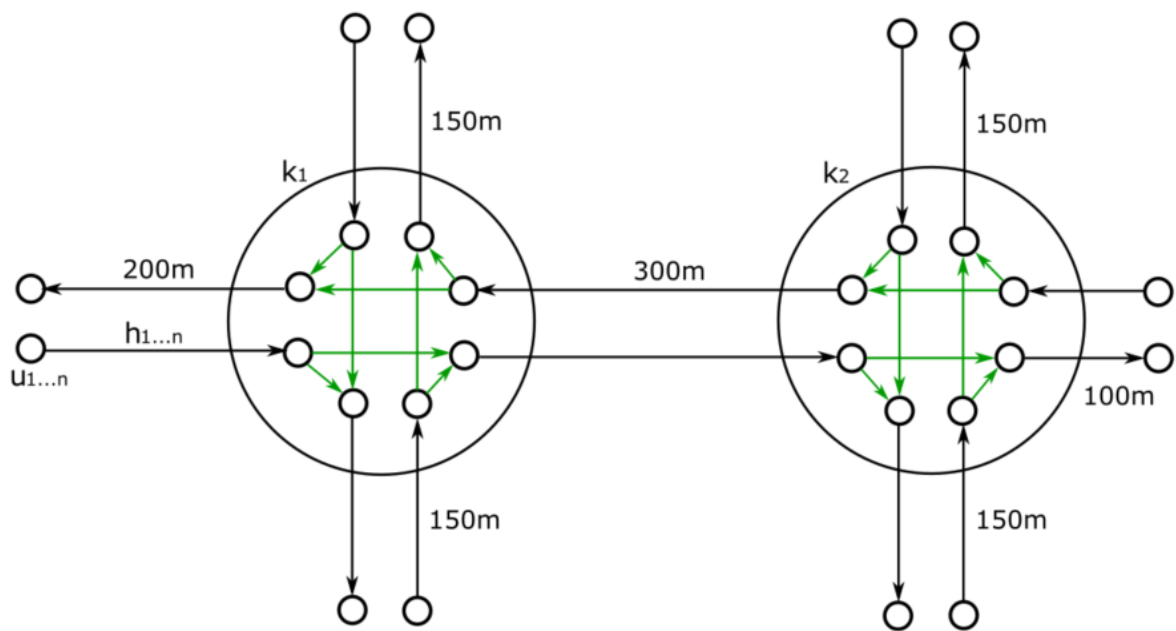
Jak vidíme na Obr. 8, při zápisu křižovatek jako jednotlivých vrcholů dostáváme neorientovaný graf tvořený osmi uzly a sedmi hranami, přičemž uzly i_3 a i_6 jsou znázorněny původní křižovatky.



Obrázek 8. Graf sítě bez reprezentace podgrafů křižovatek

5.2 Graf sítě s podgrafy křižovatek

Abychom mohli v grafu zachytit situaci pro každý z pruhů v síti, musíme všechny koncové body grafu i_1, i_2, i_4, i_5, i_7 a i_8 zdvojit a uzly křižovatky i_3, i_6 nahradit dvojicí nových uzlů pro každou hranu náležící k uzlu křižovatky. Provedení této modifikace je znázorněno na obrázku (Obrázek 9. Graf sítě s reprezentací křižovatek podgrafy). Pro tuto úpravu grafu jsme se inspirovali prací[20].



Obrázek 9. Graf sítě s reprezentací křižovatek podgrafy

Pomocí této modifikace grafu získáváme dva podgrafy sítě k_1 a k_2 , pomocí kterých můžeme popsat možnosti volby směru v rámci křižovatky. Celý graf jsme také doplnili o orientované hrany vypovídající o směru jízdy v jednotlivých pruzích a možnostech odbočení v křižovatkách.

Každé hraně v grafu h_1-h_n budeme přiřazovat metriku její délky, neboli vzdálenosti mezi uzly, které spojuje. Vyjímkou jsou hrany v křižovatkách (na Obrázek 9. Graf sítě s reprezentací křižovatek podgrafy označeny zelenou barvou), pro které v rámci zjednodušení neuvažujeme žádnou délku, ale pouze směr.

6 PROCES MODELOVÁNÍ DOPRAVNÍ SÍTĚ

6.1 Aplikované zjednodušení a postupy

Před samotným modelováním systému sítě křižovatek se všemi jeho náležitostmi v této práci přistupujeme k některým zjednodušením reálného systému. Tato zjednodušení nám jednak pomohou usnadnit proces samotné modelace, druhak díky nim můžeme zkrátit výpočetní čas modelu a snížit komplexnost výpočtů.

6.1.1 Rychlost jako konstanta

Jelikož modelujeme dopravní síť ve městě, můžeme předpokládat, že maximální povolená rychlost vozidel je $v_{max} = 50 \text{ km/h}$. Dalším předpokladem je, že vozidla, pokud nejsou zastavena světelnou signalizací v křižovatkách, udržují konstantně maximální rychlost. Zastaví-li vozidlo na křižovatce a poté se znovu rozjíždí, je nárůst rychlosti spojitý a postupný a to až do doby, dokud znovu nenabyde maximální povolené rychlosti. Jelikož jsme při modelování hran vstupujících do křižovatek neuvažovali jejich délku, můžeme systém idealizovat a předpokládat, že vozidla dosáhnou maximální rychlosti už během přechodu uzlu křižovatky do jiného přípustného uzlu křižovatky. To samé zjednodušení poté aplikujeme také na všechny uzly předcházející uzlům křižovatek, které mohou být teoreticky zastaveny v důsledku zaplnění kapacity přímo v uzlu křižovatky, což jsou vlastně všechny zbývající uzly v síti. Neuvažujeme tak žádné postupné rozjíždění či zpomalování vozidel, ale pouze konstantní rychlost 50 km/h , nebo rychlost nulovou.

6.1.2 Omezení počtu signálů na dva

Pro další zjednodušení musíme ještě jednou poupravit přístup k hranám v křižovatkách. Zatím jsme pro ně uvažovali pouze nulovou délku. Nicméně v důsledku nulové délky musíme do zjednodušení přidat také nulový čas, za který vozidla hranou projedou. V důsledku tohoto zjednodušení si můžeme dovézt vynechat signál „pozor“, jelikož jeho existence je podložena především bezpečnostními důvody v tom smyslu, aby vozidla vstoupivší do křižovatky stihly křižovatku také bezpečně opustit. V modelu proto budeme používat pouze signál „volno“ a signál „stát“.

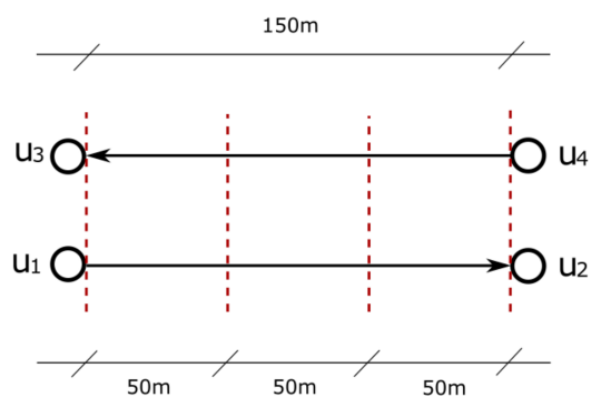
6.1.3 Rozšíření grafu za účelem časové diskretizace

Účelem této práce bylo vytvořit model s diskrétním pojetím času. Abychom toto dodrželi, zavádíme pojem časový krok. Použití diskretizace modelu v čase nám poskytuje odlišnou a

jednodušší možnost reprezentace grafu a jeho celkové pojetí při zachování stejné výpovědní hodnoty.

Pro modifikaci grafu na základě časové diskretizace je neméně důležité jedno z našich předchozích zjednodušení, a to pojetí rychlosti jako konstanty. Díky tomu můžeme nastavit časový krok přesně podle potřeb modelované sítě ve smyslu optimální ujeté vzdálenosti za časový krok. Jelikož je nutné, abychom rozdělili cestu na stejně velké části, jejichž velikost bude dána součinem časového kroku a rychlosti, která je v našem případě 50 km/h , a abychom zároveň zachovali pravidlo, že hranice každého úseku vstupujícího do křižovatky musí splývat s hranou křižovatky, přičemž máme čtveřici různých vzdáleností (100 m , 150 m , 200 m , 300 m) mezi hranicemi křižovatek, popřípadě hranicí křižovatky a začátkem nebo koncem dopravní sítě, přistupujeme pro časový krok k hodnotě $3,6 \text{ s}$, abychom dostali délku části cesty rovnu nejvyššímu možnému společnému děliteli vzdáleností v dopravní síti, tedy 50 m . Tato hodnota časového kroku byla lehce zaokrouhlena, díky čemuž vznikne lehká odchylka mezi délkami v grafickém modelu a délkami v matematickém modelu. Tato odchylka je však velmi malá a není rozhodující, proto ji můžeme zanedbat.

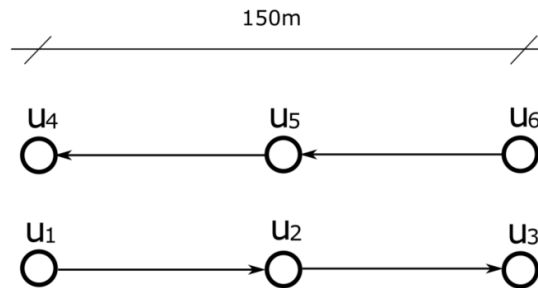
Postup modifikace grafu pomocí časové diskretizace je zachycen na obrázku (Obrázek 10. Znázornění postupu při časové diskretizaci).



Obrázek 10. Znázornění postupu při časové diskretizaci

Provedenou úpravou sítě jsme získali množinu stejně dlouhých úseků. Nyní můžeme přejít k modifikaci grafu samotného. Provedeme to tak, že každý z úseků budeme reprezentovat uzlem. Díky tomu, že mají všechny úseky stejnou délku, není už dřívější použitá metrika vzdálenosti u hran potřeba, jelikož hodnotu vzdálenosti touto úpravou převzali samotné uzly. Každý tak reprezentuje padesátimetrový úsek cesty. Proto můžeme přikročit i k úpravě hran

tak, že nebudeme vůbec uvažovat jejich délku, ale pouze jejich směr. Provedená operace v grafu je naznačena na obrázku (Obrázek 11. Přepis uzlů konstantní délky do grafu).



Obrázek 11. Přepis uzlů konstantní délky do grafu

Touto modifikací grafu se rozšířil celkový počet uzlů v grafu z původních 28 (Obrázek 9. Graf sítě s reprezentací křižovatek podgrafy) na 62 uzlů.

6.2 Množiny

I	množina všech buněk (uzlů)
I^{noend}	množina všech buněk, které nejsou konečné
I^{input}	množina všech buněk, které vstupují do sítě
I^{inK}	množina všech buněk vstupujících do křižovatky
I^{noKnoE}	množina buněk, které nejsou v křižovatce ani na konci
$R_{i,j}$	množina propustnosti buněk z i do j
K	množina všech křižovatek
F	množina všech fází
T	množina všech časových iterací

6.3 Parametry

C_i^{max}	maximální počet vozů v buňce i
$krizfaz_{k,f}$	prislusnost krizovatka-faze
$krizflow_{i,j,k,f}(t)$	indikátor průchodu z i do j ve fázi f a čase
$turnR$	poměr odbočujících vozidel pro buňky v křižovatce jako konstanta

6.4 Proměnné

$randCount$	proměnná pro popis počtu vozů vjíždějících do sítě
$C_i(t)$	počet vozidel v buňce i a čase t
$state_{k,f}(t)$	aktuální fáze v křižovatce a čase, binární proměnná
$f_{i,j}(t)$	počet aut přejíždějících z buňky i do buňky j
$f_{i,j,q,k}(t)$	počet aut přejíždějících z buňky v křižovatce

6.5 Model

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in I^{noKnoE}} \sum_{t=1}^N C_i(t) - f_{i,j}(t) + \sum_{i \in I^{inK}} \sum_{t=1}^N C_i(t) && (i,j) \in R_{i,j} \\ & - f_{i,j,q,f,k}(t) && (i,q) \in R_{i,j} \\ & && t \in T \end{aligned} \quad (1.1)$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I^{noend}} C_i(t) &\leq \sum_{i \in I^{noend}} C_i^{max} && t \in T \\ C_i(t) &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\sum_{f \in F} krizfaz_{k,f}(t) = 1 \quad k \in K, t \in T \quad (1.3)$$

$$C_i(t) = randCount \quad t \in T \quad (1.4)$$

$$i \in I^{input}, t = 1$$

$$randCount \in (5,8)$$

$$C_i(t) \geq 0$$

$$C_i(t) = \min \{ [C_i^{max} - C_i(t-1)], randCount \} \quad i \in I^{input}, t \geq 2 \quad (1.5)$$

$$t \in T$$

$$C_i(t) \geq 0$$

$$f_{i,j}(t) = \min \{ C_j^{max} - C_j(t), C_i(t) \} \quad i, j \in I, t \in T \quad (1.6)$$

$$(i, j) \in R_{i,j}$$

$$f_{i,j}(t) \geq 0$$

$$f_{i,j,q,f,k}(t) = \min \{ C_j^{max} - C_j(t), C_i(t) \quad i \in I^{inK} \quad (1.7)$$

$$\cdot turnR, state_{k,f}(t), krizflow_{i,j,k,f}(t) \} \quad k \in K, f \in F, t \in T$$

$$+ \min \{ C_q^{max} - C_q(t), C_i(t) \quad (i, j), (i, q) \in R_{i,j}$$

$$- (C_i(t) \quad f_{i,j,q,f,k}(t) \geq 0$$

$$\cdot turnR), state_{k,f}(t), krizflow_{i,q,k,f}(t) \}$$

7 POPIS MODELU

Výše navržený model je, díky provedení řady zjednodušení nad idealizovanou sítí křižovatek, lineární s diskretním pojetím času. Pomocí účelové funkce (1.1) minimalizujeme počet vozů v buňkách a v čase, které v dalším časovém kroku zůstávají ve stejné buňce. Tento výskyt může v modelu způsobit pouze červená na semaforu a z toho plynoucí postupné plnění dalších buněk. První omezení (1.2) zabezpečuje, že v žádné z buněk se nemůže v jednom čase vyskytovat větší množství vozů, než je udané maximum pro danou buňku. Rovnost (1.3) zabezpečuje, že na každé křižovatce v každém čase může být aktivní pouze jedna fáze. V rovnici (1.4) pro inicializaci modelu plníme buňky vstupující do křižovatky náhodným počtem od 5 do 8 v čase 1. Další vztah (1.5) určuje, že do vstupních buněk v každé časové iteraci vjíždí náhodný počet vozů. Rovnost (1.6) definuje množství vozů přejíždějících mezi dvěma buňkami. Poslední omezení (1.7) upravuje definici množství přejíždějících vozů mezi buňkami pro buňky v křižovatce, přičemž zohledňuje možnost odbočení. K tomuto modelu byl v rámci této bakalářské práce vypracován také hrubý návrh možné implementace modelu v prostředí GAMS.

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo navrhnout přístup pro optimalizaci a koordinaci provozu v městské dopravě. Tento přístup, stejně jako jednotlivá zjednodušení k němu náležící, byl popsán v praktické části této práce. Ta také obsahuje matematický model pro danou síť, který odráží zvolený přístup.

Naznačené řešení za použití zjednodušení sítě pomocí metod prezentovaných v této práci by se dalo uplatnit i na jiné, větší dopravní síť. Toto přenesení metod a modifikací sítě a modelu by mohlo být předmětem následující práce. Aplikace modelu by byla možná i na širší silnice ve smyslu například těch čtyřproudových.

Pokud bychom chtěli metody popsané v této práci uplatnit například pro třídu Tomáše Bati ve městě Zlíně, musel by model projít jistou modifikací. Především bychom museli přidat možnost odbočování na křižovatkách i doleva, popřípadě rozšířit model o fáze, kdy má zelenou například jen odbočovací pruh. V reálu na této silnici dochází také ke kolizním křížením tras v jedné fázi, což bychom taktéž nesměli opomenout. Dále bychom poté museli také vzít v úvahu přechody pro chodce a k nim příslušející středové ostrůvky. Nesměli bychom zapomenout ani na odbočovací pruhy a vhodně vymodelovat jejich postupné zaplnění se zvyšujícím se provozem. Do modelu bychom také mohli zanášet reálně naměřená data, popřípadě data, která byla vyzorovány na této konkrétní cestě.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] *Navrhování světelných signalizačních zařízení pro řízení provozu na pozemních komunikacích*, 2015. In: . Praha: Ministerstvo Dopravy, ročník 2015. Dostupné také z: http://www.pjpk.cz/data/USR_001_2_8_TP/TP_81.pdf
- [2] ZHANG, Yicheng, Rong SU a Kaizhou GAO, 2015. Urban road traffic light real-timescheduling. *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* [online]. 2810-2815 [cit. 2021-5-4]. ISBN 978-1-4799-7886-1. Dostupné z: doi:10.1109/CDC.2015.7402642
- [3] CENEK, Petr. *Modelování procesů na dopravních sítích*. In: . s. 98-101. ISSN 1336-233X. Dostupné také z: https://www.atpjournals.sk/buxus/docs/atp-2003-09-98_101.pdf
- [4] JIAO, Pengpeng et al. *Real-time traffic signal optimization model based on average delay time per person* [online]. [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: doi:10.1177/1687814015613500
- [5] W. CHINNECK, John. *Practical Optimization: a Gentle Introduction* [online]. [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: <https://www.optimization101.org/>
- [6] *Nonlinear Programming* [online]. [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: <https://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-13.pdf>
- [7] *Integer Programming* [online]. [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: <https://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-09.pdf>
- [8] C. CARLSON, Stephan. *Graph theory* [online]. [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/topic/graph-theory>
- [9] H. - F.XU, H. - F., L. HE a K. ZHANG, 2015. Coordinated signal timing optimization at closely-spaced split midblock crosswalks. *Journal of South China University of Technology (Natural Science)* [online]. South China University of Technology, (43), 106-113 [cit. 2021-5-4]. ISSN 1000565X. Dostupné z: doi:10.3969/j.issn.1000-565X.2015.12.015
- [10] WRIGHT, Stephen J., 2016. Optimization. *Encyclopedia Britannica* [online]. [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/science/optimization>

- [11] KOVÁŘ, Petr, 2014. *Úvod do teorie grafů* [online]. Ostrava [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: https://homel.vsb.cz/~kov16/files/uvod_do_teorie_grafu.pdf. Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni.
- [12] WANG, Gary. *Brief History of Optimization* [online]. [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: <https://empowerops.com/en/blogs/2018/12/6/brief-history-of-optimization#:~:text=Formal%20optimization%20on%20%E2%80%9Clinear%20programming,published%20by%20John%20von%20Neumann>.
- [13] RUSSENSCHUCK, S., 1994. Techniques and applications of mathematical optimization and synthesis. *IEE Colloquium on Optimisation and Synthesis of Electromagnetic Fields* [online]. [cit. 2021-5-4]. Dostupné z: <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=383723>
- [14] HOBBS, F.D. a Paul P. JOVANIS, 20 Aug. 2018n. I. Traffic control. *Encyclopedia Britannica* [online]. [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: <https://www.britannica.com/technology/traffic-control>
- [15] First electric traffic signal installed, 2009. *A&E Television Networks* [online]. [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: <https://www.history.com/this-day-in-history/first-electric-traffic-signal-installed>
- [16] Passenger cars per 1 000 inhabitants. *Eurostat* [online]. [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: https://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=road_eqs_carha&lang=en
- [17] DAGANZO, Carlos F., 1994. The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. *Transportation Research Part B: Methodological* [online]. (28), 269-287 [cit. 2021-5-6]. ISSN 0191-2615. Dostupné z: doi:[https://doi.org/10.1016/0191-2615\(94\)90002-7](https://doi.org/10.1016/0191-2615(94)90002-7)
- [18] LIGHTHILL, M. J. a G. B. WHITHAM, 1955. On Kinematic Waves. II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* [online]. **1955**(229) [cit. 2021-5-9]. Dostupné z: doi:10.2307/99769

- [19] LE, Huy, 2018. *OPTIMALIZACE DOPRAVNĚ-INŽENÝRSKÝCH ÚLOH* [online]. [cit. 2021-5-10]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=173380. VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ. Vedoucí práce Ing. DUŠAN HRABEC, Ph.D.
- [20] FAJMON, Michal, 2020. *Optimalizace a algoritmy pro úlohy dopravního inženýrství* [online]. [cit. 2021-5-16]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=212089. Diplomová práce. VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ. Vedoucí práce Ing. DUŠAN HRABEC, Ph.D.

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

LP	Linear programming
MILP	Mixed-integer linear programming
GAMS	General Algebraic Modeling System

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1. Eulerovský graf	18
Obrázek 2. Úplný graf se čtyřmi vrcholy	21
Obrázek 3. Vzorový neorientovaný graf.....	22
Obrázek 4. Vzorový orientovaný graf	22
Obrázek 5. Grafický model sítě křižovatek	32
Obrázek 6. Statický signální plán modelované křižovatky.....	33
Obrázek 7. Spojitost mezi pruhy v křižovatce	34
Obrázek 8. Graf sítě bez reprezentace podgrafů křižovatek.....	37
Obrázek 9. Graf sítě s reprezentací křižovatek podgrafy	38
Obrázek 10. Znázornění postupu při časové diskretizaci	40
Obrázek 11. Přepis uzlů konstantní délky do grafu	41

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1. Pomocná tabulka matice sousednosti pro neorientovaný graf.....	23
Tabulka 2. Pomocná tabulka matice sousednosti pro orientovaný graf	24
Tabulka 3. Matice incidence neorientovaného grafu v tabulce	24
Tabulka 4. Matice incidence orientovaného grafu v tabulce	25
Tabulka 5. Matice vzdáleností orientovaného grafu v tabulce	26

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha P I: Zdrojový kód z programu GAMS

Příloha P II: Obsah CD

PŘÍLOHA P I: ZDROJOVÝ KÓD Z PROGRAMU GAMS

```
1   $eolcom //
2   ***** sets *****

3   set i mnozina vseh bunek / i1 * i48 /;
4   alias(i,j,q);

5   set iinkriz(i) mnozina vseh bunek vstupujicich do krizovatky
6   / i4, i10, i14, i20, i27, i33, i39, i45 /;

7   set iinput(i) mnozina vseh bunek vstupnich do site
8   / i1, i13, i25, i31, i37, i43 /;

9   set Inkriz(i) mnozina vseh bunek mimo krizovatku
10  / i2, i3, i5, i6, i7, i8, i9, i11, i12, i15, i16, i17,
11  i18, i19, i21, i22, i23, i24, i26, i28, i29, i30, i32,
12  i34, i35, i36, i38, i40, i41, i42, i44, i46, i47, i48 /

13  set inoknoe mnozina vseh bunek, ktere nejsou konecne a nejsou v
    krizovatce;

14  set inoend mnozina vseh bunek, ktere nejsou konecne;

15  set k mnozina vseh krizovatek / k1, k2 /;
16  set t mnozina vseh casovych kroku / t1*t50 /;
17  set f mnozina fazi / f1*f4 /;

18  set bunkyVazba(i,j) 'vazba mezi bunkami'
19  /
20  i1.i2
21  i2.i3
22  i3.i4
23  i4.(i5,i28)
24  i5.i6
25  i6.i7
26  i7.i8
27  i8.i9
28  i9.i10
29  i10.(i11,i40)
30  i11.i12
31  i13.i14
32  i14.(i15,i46)
```

```

33  i15.i16
34  i16.i17
35  i17.i18
36  i18.i19
37  i19.i20
38  i20.(i21,i34)
39  i21.i22
40  i22.i23
41  i23.i24
42  i25.i26
43  i26.i27
44  i27.(i28,i21)
45  i28.i29
46  i29.i30
47  i31.i32
48  i32.i33
49  i33.(i34,i5)
50  i34.i35
51  i35.i36
52  i37.i38
53  i38.i39
54  i39.(i40,i15)
55  i40.i41
56  i41.i42
57  i43.i44
58  i44.i45
59  i45.(i46,i11)
60  i46.i47
61  i47.i48
62  /;

63  table pruchod(i,j) 'pruchodnost bunek'
      a. i1      i2      i3      i4      i5      i6      i7      i8
          i9      i10     i11     i12     i13     i14     i15     i16
          i17     i18     i19     i20     i21     i22     i23     i24
          i25     i26     i27     i28     i29     i30     i31     i32
          i33     i34     i35     i36     i37     i38     i39     i40
          i41     i42     i43     i44     i45     i46     i47     i48
64  i1      0      1      0      0      0      0      0
     0      0      0      0      0      0      0      0
     0      0      0      0      0      0      0      0
     0      0      0      0      0      0      0      0
     0      0      0      0      0      0      0      0
     0      0      0      0      0      0      0      0

```


	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
75	i12	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
76	i13	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
77	i14	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0					
78	i15	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
79	i16	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
80	i17	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
81	i18	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
82	i19	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
83	i20	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					

	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
94	i31	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
95	i32	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
96	i33	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
97	i34	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
98	i35	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
99	i36	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
100	i37	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
101	i38	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0					
102	i39	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0					


```

113 table krizFaz(k,f) 'prislusnost fazi ke krizovatkam'
      a. f1  f2  f3  f4
114 k1      1  1  0  0
115 k2      0  0  1  1
116 ;

117 table bunkaFaze(f,ikriz)
      a. i4      i10      i14      i20      i27      i33      i39      i45
118 f1      1      0      0      1      0      0      0      0
119 f2      0      0      0      0      1      1      0      0
120 f3      0      1      1      0      0      0      0      0
121 f4      0      0      0      0      0      0      1      1
122 ***** parameters, tables, scalars *****
123 parameter tLen delka casoveho kroku / 3.6 /;
124 parameter maxCount(i) 'maximalni pocet vozidel v bunce'
125 /i1  15
126 i2  15
127 i3  15
128 i4  15
129 i5  15
130 i6  15
131 i7  15
132 i8  15
133 i9  15
134 i10 15
135 i11 15
136 i12 INF
137 i13 15
138 i14 15
139 i15 15
140 i16 15
141 i17 15
142 i18 15
143 i19 15
144 i20 15
145 i21 15
146 i22 15
147 i23 15
148 i24 INF
149 i25 15
150 i26 15

```

```

151     i27  15
152     i28  15
153     i29  15
154     i30  INF
155     i31  15
156     i32  15
157     i33  15
158     i34  15
159     i35  15
160     i36  INF
161     i37  15
162     i38  15
163     i39  15
164     i40  15
165     i41  15
166     i42  INF
167     i43  15
168     i44  15
169     i45  15
170     i46  15
171     i47  15
172     i48  INF/
173     ;
174     parameter cellInStage(ikriz,f);
175     cellInStage(ikriz,f)$bunkaFaze(f,ikriz)=yes;
176     parameter stageInKriz(k,f);
177     stageInKriz(k,f)$krizFaz(k,f)=yes;
178     parameter krizFlowBun(i,j,k,f,t);
179     parameter turnR pro pomer odbocovani;
180     ***** variables *****
181     positive variable c(i,t) pocet vozu v bunce i case t; //rozhodovaci
        promenna
182     positive variable in(iinput,t) pocet vozu ve startovnich bunkach a
        case t
183     positive variable flow(i,j,t) pocet aut prejizdejicich z i do j
184     positive variable flowKriz(i,j,q,k,f,t) vyjadreni toku ruynzmi smery
        v krizovatce
185     binary variable state(k,f,t) krizovatka faze cas 1 nebo 0;
186     variable u ucelova funkce;
187     ***** objective function, equations *****
188     equation initFlow(iinput,t);

```

```

189   initFlow(iinput,'1').. in(iinput,'1')=e=uniformint(4,8);
190   equation inputFlow(iinput, t);
191   inputFlow(iinput,t)$((ord(t)>1)          and          (c(iinput,t)<=14))..
    in(iinput,t)=e=in(iinput,t-1) - out(iinput,t-1) + uniformint(2,8);
192   equation flowNoKriz(inkriz,t);
193   flow(i,j,t)..min((maxCount(j)-c(j,t)),c(i,t)) * pruchod(i,j);
194   equation outflow(i,j,t);
195   outflow(i,j,t).. out(i,j,t)=e=min(maxCount(j)-c(j,t),c(i,t));
196   equation maxCountInCell(i,t);
197   maxCountInCell..sum(i,c(i,t))=l=sum(i,maxCount(i));
198   equation oneStage(k,f,t);
199   oneStage(k,f,t)..sum(f,state(k,f,t))=1;
200   equation flowBetween(i,j,t);
201   flowBetween..flow(i,j,t)=min(maxCount(j)-c(j,t),c(i,t));
202   equation flowInIntersection(i,j,q,k,t);
203   flowInIntersection(iinkriz,j,q,k,t)..flowKriz=min((maxCount(j)-
    c(j,t)*turnR),state(k,f,t),krizFlowBun(i,j,k,f,t))+min((maxCount(q)
    -c(q,t)*turnR),state(k,f,t),krizFlowBun(i,q,k,f,t));
204   equation ucelovaFce(i,j,q,f,k,f,t);
205   ucelovaFce(i,j,q,f,k,f,t)..u=sum(i,sum(t,c(i,t)-
    flow(i,j,t)))+sum(i,sum(t,c(i,t)-flowKriz(i,j,q,k,f,t)));
206   option optcr=0.15;
207   option resLim=100000;
208   option iterlim=10000000;
209   model schenk_model/all/;
210   solve schenk_model minimizing u using mip;

```

PŘÍLOHA P II: OBSAH CD

fulltext.pdf – textová část bakalářské práce

model.gms – hrubý návrh implementace modelu