Sbírka úloh z pravděpodobnosti

Bc. Věra Miklová

Bakalářská práce

2021

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně
Fakulta aplikované informatiky
Ústav automatizace a řídicí techniky

Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Bc. Věra Miklová**
Osobní číslo:	**A17601**
Studijní program:	**B3902 Inženýrská informatika**
Studijní obor:	**Informační a řídicí technologie**
Forma studia:	**Kombinovaná**
Téma práce:	**Sbírka úloh z pravděpodobnosti**
Téma práce anglicky:	**Collection of solved and unsolved probability problems**

Zásady pro vypracování

1. Vytvořte sbírku úloh z pravděpodobnosti, která bude mít tyto kapitoly: elementární pravděpodobnost, náhodná veličina, vybraná diskrétní rozdělení (rovnoměrné, alternativní, binomické, negativní binomické, geometrické, hypergeometrické, Poissonovo), vybraná spojitá rozdělení (rovnoměrné, exponenciální, normální/normované normální rozdělení; případně ještě Weibullovo a Erlangovo).
2. V každé kapitole definujte příslušné základní pojmy.
3. Uveďte vzorové příklady a postup jejich řešení.
4. Realizujte alespoň na jednom z uvedených příkladů konkrétní praktickou aplikaci užití.
5. Sestavte zadání několika úloh a uveďte pouze jejich výsledky.

Forma zpracování bakalářské práce: **Tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

1. Anděl J.: Základy matematické statistiky, Matfyzpress, MFF UK v Praze, Praha, 2011, ISBN 978-80-7378-162-0
2. Budíková M., Králová M., Maroš B.: Průvodce základními statistickými metodami, Grada Publishing 2010, Praha, 2011, ISBN 978-80-247-3243-5
3. Jaroš F., et al.: Pravděpodobnost a statistika, VŠChT, Praha 2002, ISBN 80-7080-474-2
4. Pavlík J., et al.: Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a matematické statistiky, Vydavatelství VŠChT, Praha 1999, ISBN 80-7080-366-5
5. Spiegel, Schiller, Srinivasan: Probability and statistics (Schaum´s outlines) 2nd edition 2000, ISBN: 0-07-135004-7
6. Devore J. L.: Probability and statistics for engineering and sciences, Thomson Brooks/Cole 2004, ISBN 0-534-39933-9

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Martin Fajkus, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **15. ledna 2021**
Termín odevzdání bakalářské práce: **17. května 2021**

UNIVERZITA TOMÁŠE BATI VE ZLÍNĚ Fakulta aplikované informatiky DĚKAN

L.S.

doc. Mgr. Milan Adámek, Ph.D. v.r.
děkan

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc. v.r.
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 15. ledna 2021

Jméno, příjmení: Věra Miklová

Název bakalářské/diplomové práce: Sbírka úloh z pravděpodobnosti

Prohlašuji, že

- beru na vědomí, že odevzdáním bakalářské práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších právních předpisů, bez ohledu na výsledek obhajoby;
- beru na vědomí, že bakalářská práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému dostupná k prezenčnímu nahlédnutí, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v příruční knihovně Fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a jeden výtisk bude uložen u vedoucího práce;
- byl/a jsem seznámen/a s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 1 autorského zákona má UTB ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- beru na vědomí, že podle § 60 odst. 2 a 3 autorského zákona mohu užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen připouští-li tak licenční smlouva uzavřená mezi mnou a Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně s tím, že vyrovnání případného přiměřeného příspěvku na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše) bude rovněž předmětem této licenční smlouvy;
- beru na vědomí, že pokud bylo k vypracování bakalářské práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tedy pouze k nekomerčnímu využití), nelze výsledky bakalářské práce využít ke komerčním účelům;
- beru na vědomí, že pokud je výstupem bakalářské práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá. Neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji,

- že jsem na bakalářské práci pracoval samostatně a použitou literaturu jsem citoval. V případě publikace výsledků budu uveden jako spoluautor.
- že odevzdaná verze bakalářské práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

Ve Zlíně, dne

Věra Miklová v.r.
……………………
podpis diplomanta

ABSTRAKT

Cílem této bakalářské práce je vytvořit sbírku úloh. Tato sbírka bude tvořit doplňující studijní materiál pro studenty FAI UTB. Náplní je učivo pravděpodobnosti, její druhy a metody jak je můžeme řešit, sbírka obsahuje řešené i neřešené příklady.

Klíčová slova: pravděpodobnost, elementární pravděpodobnost, diskrétní náhodná veličina, spojitá náhodná veličina, variace, kombinace. permutace, příklady

ABSTRACT

The task of this bachelor thesis is to create a collection mathematics exercises. This collection will form an additional study material for FAI TBU students. The content is probability curriculum, its types and methods how we can solve them, the collection contains solved and unsolved examples.

Keywords: probability, elementary probability, discrete random variable, continuous random variable, variation, combination, permutation, examples

Ráda bych poděkovala vedoucímu mojí bakalářské práce panu Martinovi Fajkusovi RNDr. Ph.D., za odborné rady a připomínky, vedení, cenné rady a ochotu při vypracování této práce.

Prohlašuji, že odevzdaná verze bakalářské/diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou totožné.

OBSAH

PRAKTICKÁ ČÁST

ÚVOD

S pravděpodobností se setkáváme v životě často, ať při hrách, například s kostkami či kartami, nebo když se člověk snaží vyjádřit velmi nepravděpodobný jev, kde si její využitelnosti jsme vědomi. Ale setkáme se s ní i tam, kde by to řada z nás nečekala a kde si ji neuvědomujeme, a proto v těchto situacích na ni nebereme zřetel. Je to například při cestování - otázku “Budu mít na cestě zpoždění?” si pokládá hodně cestovatelů, ale místo toho se můžeme zeptat “Jak je zpoždění pravděpodobné?” Na trase kterou, si cestovatel vybral, jezdí i jiní a provoz jde vysledovat v různých časech, a proto význam zůstane stejný. Podobné otázky si můžeme pokládat i při nákupech, mezilidských vztazích či pracovních/školních záležitostech. Díky těmto vlastnostem je pravděpodobnost něco, s čím jsme v každodenním kontaktu a je pro nás stále aktuální.

Co to tedy ta pravděpodobnost je? Pravděpodobností můžeme nazvat jako míru možného uskutečnění daného jevu. Jinými slovy nám říká, jak je možné, že děj se bude v budoucnu chovat tak jak chceme/nechceme. Pro tyto “odhady” budoucnosti používáme číselné vyjádření, v běžném životě nejčastěji procentuální, ale můžeme se setkat i s vyjádřením v intervalu 0 až 1, kde možnost 0% či 0 značí, že jev nemůže nastat a možnost 100% či 1 znamená, že jev určitě nastane. K tomu, abychom pravděpodobnost správně určili, musíme vyjádřit všechny možnosti, jak se děj může v budoucnu zachovat.

I. TEORETICKÁ ČÁST

1 ELEMENTÁRNÍ PRAVDĚPODOBNOST

1.1 Kombinatorika

Pro začátek je třeba zmínit matematickou disciplínu kombinatoriky, která se zabývá, narozdíl od jiných matematických disciplín, některými vybranými vlastnostmi množin. Další její odlišností je, že v některých případech není možné u výsledku prověřit správnost. Kombinatorika se zabývá seskládáváním prvků množin s definovanou vnitřní strukturou. Pomocí kombinatoriky hledáme odpovědi na otázky týkajících se počtu objektů a jejich strukturou.

Součinová věta

V běžném životě ji používáme aniž bychom si ji uvědomovali. Matematicky je formulovaná: Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Příklad na součinovou větu:

Máme dvě skupiny lidí o 6 členech, které náhodným způsobem přiřadíme do dvojic tak, aby nebyli ze stejné skupiny. Pro každou dvojici musí být nachystán jiný úkol. Kolik úkolů se musí nachystat?

Velikost 1. množiny (skupiny): 6

Velikost 2. množiny (skupiny): 6

Výsledek je dán součtem velikostí obou skupin: $6 \cdot 6 = 36$

Je možné vytvořit 36 dvojic, tudíž je potřeba nachystat 36 úkoly.

Součtová věta

Aniž bychom si to uvědomili, součtovou větu se učí děti při prvních slovních úlohách. Matematická formulace je: Jsou-li $A_1, A_2, A_3 ..., A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, ...,$ p_n prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ je roven součtu $p_1 + p_2 + ... + p_n$.

Příklad na součtovou větu:

Do třídy chodí 15 dívek a 23 chlapců. Při začátku školního roku je potřeba vybrat jednoho zástupce. Kolik je možností výběru?

1. množina (počet dívek) má 15 prvků

2. množina (počet chlapců) má 23 prvků

Součet prvků obou množin nám dá výsledek: 15 + 23 = 38

Ve škole mají 38 možných kandidátů pro výběr zástupce třídy.

1.2 Variace

Zde rozlišujeme, zda se prvky mohou ve výběru opakovat či ne. Variace *k*-té třídy z n prvků je každá uspořádaná *k*-tice vytvořená z celkového počtu *n* prvků, přičemž při výběru záleží na pořadí jednotlivých prvků. Značíme je $V(k,n)$, pokud se mohou prvky opakovat $V'(k,n)$.

Variace bez opakování

Variace mající *k*-členů z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Pokud máme množinu o *n* prvcích a vybíráme *k* prvků, přičemž záleží na pořadí, tak výsledek je roven $n - (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot (n - 3)$.

Z toho můžeme odvodit obecný vzorec:

$V(k,n) = n(n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)$

Obecný vzorec můžeme vyjádřit pomocí faktoriálů (*n!*).

Upravený vzorec: $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, pro připomenutí: je definováno: 0! = 1

Příklad na variaci bez opakování:

V městské radě je potřeba vybrat předsedu, místopředsedu, 1.zastupitele, 2.zastupitele a mluvčího. V radě jsou 4 muži a 3 ženy a každý může mít maximálně jednu funkci. Místní sázková kancelář se rozhodla uspořádat sázky na rozdělení městských funkcí. Kolik různých sázek může kancelář obdržet?

Každý může zastávat maximálně jednu funkci - proto budeme řešit příklad jako variaci bez opakování.

Celkový počet kandidátů na funkci: $n = 7$ (4 + 3)

Počet nabízených funkcí: $k = 5$

Dosazení do vzorce: $V(5,7) = 7(7-1)(7-2)(7-3)(7-4) = 2520$

S použitím faktoriálu $V(5,7) = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Radní si mohou funkce rozdělit 2520 různými možnostmi.

Variace s opakováním

Variace s opakováním *k*-členů z množiny *M* o velikost *n* je každá uspořádaná *k*-tice, jejíž prvky jsou z množiny *M* a každý prvek se v *k*-tici může vyskytovat až *k*-krát. Z toho vyplývá, že první člen můžeme vybrat z *n* členů, ale druhý člen budeme taktéž vybírat z *n* členů. Tudíž získáváme vzorec: $V' = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$

Příklad na variace s opakováním

Zámek trezoru se odemyká pomocí číselného hesla. Kolik možností nastavení zámku bude, pokud je heslo čtyřciferné?

V tomto případu musíme počítat s tím, že záleží na pořadí, a také, že se čísla mohou opakovat - jedná se o variaci s opakováním.

Množství možných číslic na ciferníku: $n = 10$ (0 až 9)

Počet číslic v hesle: $k = 4$

Dosadíme do vzorce: $V' = 10^4 = 10\,000$

Zámek může být nastaven 10 000 různými hesly.

1.3 Permutace

Jedná se speciální případ variací, kdy se každý prvek musí alespoň jednou zobrazit v uspořádání.

Permutace bez opakování

Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Vyjádření permutací je možné i pomocí vzorce pro variace: Ve vzorci to můžeme zapsat takto:

$$V(n, n) = \frac{n!}{0!} = n!$$

Z toho vyplývá, že vzorec, který jsme používali u variací, může upravit:

$$Pn = V(n, n) = n!$$

Příklad na permutace bez opakování:

Osm přátel se rozhodlo uspořádat sraz milovníků aut, kde všichni chtějí vystoupit, ale nemohou se domluvit na pořadí vystupování. Kolik možných pořadí, ve kterých by vystupovali, přátelé mohou vytvořit?

množina prvků zadané množiny: 8

množina vystupujících: 8 $\rightarrow$ jedná se o permutaci

stačí dosadit do vzorce: $P(8) = 8! = 40320$

Přátelé mohou vytvořit celkem 40 320 různých pořadí.

Permutace s opakováním

Permutace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

Zde je potřeba určit, kolikrát bude daný prvek zastoupen. Z toho plyne, že $k_1+k_2+\ldots+k_n \geq n$ (pokud platí $1= k_1 = k_2 = \ldots = k_n$ tak součet všech $k = n$ což lze počítat jako permutace bez opakování).

Permutace s opakováním budeme počítat pomocí vzorce: $P'(k_1,\ldots k_n) = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$

Příklad na permutace s opakováním:

Děti navlékají barevné korálky na provázek pro výrobu náramků. K dispozici měli 4 červené, 1 zelenou, 2 modré, 1 fialovou, 1 žlutou a 2 bílé. Kolika způsoby mohou být korálky navlečeny?

Některé korálky budou zastoupeny vícekrát, ale všechny budou zastoupené aspoň jednou - budeme počítat permutace s opakováním.

celkem máme 6 druhů korálků,

z toho: červená 4-krát,

zelená 1-krát,

modrá 2-krát,

fialová 1-krát,

žlutá 1-krát,

bílá 2-krát.

Využijeme vzorce: $P'(4, 1, 2, 1, 1, 2) = \frac{(4+1+2+1+1+2)!}{4!\,1!\,2!\,1!\,1!\,2!} = \frac{11!}{4!\,2!\,2!} = 415\,800$

Korálky mohou být navlečeny celkem 415 800 způsoby.

1.4 Kombinace

Na rozdíl od variací a permutací, při kombinacích uvažujeme o neuspořádané skupině prvků, kde nezáleží na jejich pořadí.

Kombinace bez opakování

Kombinace *k* členů z *n* prvků je neuspořádaná skupina *k* prvků sestavená z *n* prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek nanejvýš jedenkrát. Z toho vyplývá, že vybraná *k*-tice je podmnožinou množiny obsahující *n* prvky, kde nám záleží na výběru.

Pro práci s kombinacemi je potřeba vzorec z variací upravit:

$$K(k, n) = \frac{1}{k!} \cdot V(k, n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Pro tento vzorec se běžně používá symbol $\binom{n}{k}$, které označujeme jako kombinační číslo, dostáváme:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = K(k, n)$$

Pro všechna celá nezáporná čísla *n, k, kde k* $\leqq$ *n*, platí: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Příklad na kombinace bez opakování:

V losování je z osudí vylosováno celkem 5 vítězů, kde všichni dostanou stejnou odměnu. V osudí se nachází celkem 81 lístků. Každý účastník si může pořídit pouze jeden lístek. Kolik možných pětic je možné vylosovat?

počet losů v množině: $n = 81$

počet vytažených vítězů: $k = 5$

na pořadí nezáleží $\rightarrow$ počítáme kombinace

dosadíme do vzorce: $K = \binom{81}{5} = \frac{81!}{5! \cdot (81-5)!} = \frac{81!}{5! \cdot 76!} = 25\,621\,596$

Je možné vylosovat 25 621 596 různých pětic ze zadaného osudí.

Kombinace s opakováním

Matematická definice je formulována: *k*-členná kombinace s opakováním z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z *n* prvků tak, že se v ní vyskytuje každý prvek nejvýše *k*-krát.

Počet kombinací s opakováním vypočítáme pomocí vzorce:

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = K(k, n + k - 1)$$

Příklad na kombinaci s opakováním:

Organizátoři tábora chystají pro děti hru, kde je chtějí rozdělit do několika skupin. Každá skupina bude mít vlajku, ale aby byli rozeznatelné, budou mít vlajky maximálně 2 barvy a vlajky musí být snadno rozpoznatelné. Vlajky budou používány při hrách, a proto musí být rozpoznatelné i když je někdo vystaví obráceně. Proto se děti dohodly, že vlajky budou sestaveny z dvou vodorovných, stejně širokých pruhů. K dispozici organizátoři mají šest různě barevných pláten. Kolik mohou vytvořit různých vlajek?

Zde na výběru nezáleží (nesmí dojít k záměně i když bude vlajka obrácená) a vlajka může být i z jedné barvy (oba pruhy budou mít stejnou barvu) - příklad budeme počítat jako kombinaci s opakováním.

Dostupných různobarevných pláten je: 6

Vlajka se skládá nanejvýš ze: 2 barev

Dosadíme do vzorce:$K'(k,n) = \binom{7}{2} = \frac{(6+2-1)!}{2!(6-1)!} = \frac{7!}{2!*5!} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21$

2 NÁHODNÁ VELIČINA

Náhodná veličina je libovolná veličina, kterou je možné opakovaně měřit u různých objektů, v různých místech nebo v různém čase a její hodnoty podrobit zpracování metodami teorie pravděpodobnosti nebo matematické statistiky.

Jak vyplývá z výše napsaného, náhodná veličina je abstraktní pojem, jenž jde vyjádřit číselnou hodnotou výsledku náhodného jevu. Určujeme základní dva typy náhodné veličiny, a to zda je náhodná veličina diskrétní (nespojitá) nebo spojitá. Diskrétní rozdělení udává konečné (nebo početně nekonečné) číslo (např. počet kusů produktu), kdežto spojité rozdělení náhodné veličiny nabývá všech hodnot daného intervalu (např. odběr elektřiny).

Náhodné veličiny zpravidla označujeme velkým písmenem X, X_1, X_2,... a jejich konkrétní hodnoty písmeny malými x, x_1, x_2,... Náhodná veličina X je reálná funkce definovaná na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo. U náhodné veličiny budeme vyjadřovat střední hodnotu $E(X)$, která vypovídá o váženém průměru možných hodnot, a rozptyl $D(X)$, který udává míru variability náhodné veličiny.

Pro vyjádření pravděpodobnosti spojitého rozdělení náhodné veličiny se využívá distribuční funkce. Distribuční funkce náhodné veličiny udává pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší nebo rovné zvolenému x. Zapisujeme $F(X) = P(X \leq x)$. Rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny se určuje prostřednictvím funkce, která se nazývá hustota rozdělení pravděpodobnosti.

3 DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ NÁHODNÉ VELIČINY

3.1 Rovnoměrné rozdělení

Rovnoměrné diskrétní rozdělení je nejjednodušším případem diskrétního rozdělení. Popisuje rozdělení náhodné veličiny X, která může nabývat k různých hodnot $(x_1, x_2, ..., x_k)$ se stejnou pravděpodobností. Rozdělení značíme $X \sim Rd(G)$, kde G je množina prvků. Typickým příkladem je hod kostkou.

Pravděpodobnost vyjádříme: $P(X = x_i) = \frac{1}{k};\ i = 1, 2, ..., k$

Střední hodnotu získáme: $E(X) = \frac{k+1}{2}$

Rozptyl spočítáme: $D(X) = \frac{k^2-1}{12}$

Příklad na rovnoměrné rozdělení:

Máme pravidelný dvanáctistěn s čísly 1 až 12. Vypočítej pravděpodobnost padnutí čísla 6 při jednom hodu, střední hodnotu a rozptyl.

Hodnoty, které mohou padnout (k): 1 až 12

Pravděpodobnostní funkce: $P(6) = \frac{1}{12}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$

Rozptyl: $D(X) = \frac{12^2-1}{12} = \frac{144-1}{12} = \frac{143}{12} = 11,91\overline{7}$

Číslo 6 padne s pravděpodobností $\frac{1}{12}$, rozptyl je přibližně 11,917 a střední hodnota je 6,5.

3.2 Alternativní rozdělení

Při tomto typu pravděpodobnosti, nabývá náhodná veličina pouze dvou hodnot, a to buď 0 nebo 1. Alternativní rozdělení je speciálním případem binomického rozdělení (viz strana 22) , kdy pro n=1. Náhodnou veličinu alternativního rozdělení značíme $X \sim A(p)$, typický příklad může být hod mincí.

Pravděpodobnost zde vypočítáme pomocí:

$P(X=1) = p$ a $P(X=0) = 1-p$

Kde p je parametr rozdělení (tj. pravděpodobnost jevu); $p \in (0, 1)$

Lze zapsat: $P(X) = p^x(1 - p)^{1-x}$

Dále můžeme určit střední hodnotu alternativní náhodné veličiny:

$$E(X) = p$$

A také rozptyl:

$$D(X) = p(1 - p)$$

Příklad na alternativního rozdělení:

Z osudí vytáhneme jedno vítězné číslo, přičemž se v osudí nachází lístky s čísly 0 až 5. Franta má čísla 1 a 4. Jaká je šance, že Franta bude mít výherní číslo?

Pro úspěch $(x = 1)$ musí být vytažena: 1 nebo 4

Pro neúspěch $(x = 0)$ bude vytaženo: 0, 2, 3 nebo 5

Pravděpodobnost úspěchu: $P(x = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Pravděpodobnost neúspěchu: $P(x = 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Franta bude mít výherní číslo s pravděpodobností $\frac{1}{3}$.

3.3 Binomické rozdělení

V tomto případě se jedná o rozdělení, kde náhodná veličina Y vznikne součtem jednotlivých, vzájemně nezávislých alternativních rozdělení se shodným parametrem $p\,(Y = X_1 + + X_2 + \dots + X_n)$. Představit si to můžeme stejně jako u alternativní veličiny jen s rozdílem, že hodíme více mincemi. Značíme $Y \sim Bi(n, p)$.

Pravděpodobnost binomické hodnoty lze vyjádřit:

$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, kde k je počet úspěchů, $k = 0, 1, 2, \dots, n$

Střední hodnotu binomického rozdělení získáme součtem:

$$E(Y) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Xi) = np$$

Při rozptylu opět pracujeme se součtem jednotlivých alternativních sčítanců:

$$D(Y) = D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1 - p)$$

pro p ∈ (0, 1) a n ∈ N+ se nazývá binomické rozdělení s parametry n a p.

Příklad na binomické rozdělení:

Máme váček s 32 mincemi, jaká je pravděpodobnost, že při vysypání mincí bude právě 9 mincí otočené hlavou nahoru?

Celkový počet mincí udávající počet opakování jevu je: $n = 32$

pravděpodobnost, že mince bude hlavou nahoře je: $p = \frac{1}{2} = 0,5$

z toho vyplývá, že můžeme zapsat $Y \sim Bi(32, \frac{1}{2})$

počet mincí, které má být otočeno hlavou nahoru: 9

Doplníme: $P(Y = 9) = \binom{32}{9} 0,5^9 (1 - 0,5)^{32-9} = \frac{32!}{9! \cdot (32-9)!} \cdot 0,5^9 \cdot 0,5^{23} = 0,00653$

Šance, že z váčku vypadne přesně 9 mincí hlavou nahoru je 0,653%.

3.4 Negativní binomické rozdělení

Negativní binomické rozdělení modeluje náhodný pokus, v němž je sledován počet neúspěchů – X, které předcházejí n-tému úspěšnému pokusu. Zároveň platí, že se jedná o nezávislé alternativní pokusy. V každém z opakování pokusu nastává úspěch s pravděpodobností p a neúspěch s pravděpodobností 1-p. Parametr p nabývají hodnot 0 < p < 1. Značíme $X \sim nBi(n, p)$.

Pravděpodobnost negativní binomické hodnoty lze vyjádřit:

$P(X = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n (1 - p)^k$, $k = 1, 2, ...$

Střední hodnotu binomického rozdělení získáme součtem:

$$E(X) = \frac{n(1-p)}{p}$$

Při rozptylu pracujeme se součtem jednotlivých alternativních sčítanců:

$$D(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

Pozor!

Definice Negativního binomického rozdělení není jednoznačná. Někteří odborníci definují negativní binomické rozdělení jako počet binomických pokusů do k-tého výskytu (úspěchu) včetně k-tého výskytu. Při srovnávacích výpočtech je nutné zjistit kterou definici autor používá, pro naše počítání budeme využívat první definici.

Příklad na negativní binomické rozdělení:

Máme truhlu s 8 druhy žetonů, které jsou namíchány ve vaku a stejně zastoupeny. Miroslav bude náhodně vytahovat z truhly žetony, dokud nedostane 3 žetony stejného druhu. Jaká je pravděpodobnost, že aby Miroslav získal 3 stejné žetony stačí vytáhnout 10 žetonů? To znamená, že desátý vytažený žeton bude ten třetí, který Miroslav potřebuje.

Pravděpodobnost vytažení jednoho druhu žetonu při jednom tažení : $p = \frac{1}{8}$

Počet žetonů, které mám najít: $k = 3$

Dosadíme do rovnice: $p(X = 10) = \binom{12}{10} \left(\frac{1}{8}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{10} = 0,034$

Po vytažení 10 žetonů dostanu 3 stejné žetony s pravděpodobností 3,4%.

3.5 Hypergeometrické rozdělení

Máme množinu N prvků, mezi nimiž je M prvků se zkoumanou vlastností. Vybereme náhodně n prvků z množiny všech prvků. Náhodná veličina $X \sim Hg(N, M, n)$ říká počet prvků se zkoumanou vlastností, v provedeném výběru n prvků. Platí: $M \in \Pi$; $1 \leq n \leq N$; $1 \leq M \leq N$

Pravděpodobnost je formulována: $P(X) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

Formulace střední hodnoty: $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

Formulace rozptylu: $D(X) = n\,\frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Pokud nastane případ, kdy je N velké $(N \to \infty)$ a poměr $\frac{M}{N}$nepřevyšuje hodnotu 0,05 $\left(\frac{M}{N} \to 0\right)$, lze hypergeometrické rozdělení považovat za limitní a počítat jej jako binomické rozdělení, kde $Hg(N, M, n) \approx Bi\left(n, p = \frac{M}{N}\right)$.

Příklad na hypergeometrické rozdělení:

Na stole máme 15 krabiček. V 6 krabičkách je desetikoruna, v ostatních není nic. Jaká je pravděpodobnost, že si vybereme 4 krabičky a získáme z nich 20 korun?

počet krabiček (N)*: 15*

počet krabiček s mincí (M)*: 6*

počet krabiček bez mince $(N\text{-}M)$*: 9*

počet vybraných krabiček (n)*:* 4

vybrané krabičky s mincí (x)*:* 2

vybrané krabičky bez mince $(n\text{-}x)$*: 2*

Můžeme dosadit do vzorce: $P(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{2}\binom{9}{2}}{\binom{15}{4}} = \frac{540}{1365} = 0,3956$

Pravděpodobnost nalezení dvaceti korun je 0,3956.

3.6 Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení popisuje počet výskytů jevů, které nastanou za časovou jednotku. Zde používáme poissonův parametr λ, jenž je konstantou λ > 0. K jevům dochází náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. Průměrný počet událostí, za časovou jednotku, je roven parametru λ. Značíme $X \sim Po(\lambda)$

Pokud jsou splněny určité podmínky, lze binomické rozdělení aproximovat pomocí Poissonova rozdělení. Podmínky jsou splněny, pokud je dostatečné množství pokusů (obvykle více než 30) a parametr rozdělení je malé (0,01 a menší).

Při této aproximaci převedeme $Bi(n,p)$ na $Po(\lambda = n \cdot p)$.

Poissonovo rozdělení počítáme pomocí vzorce: $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$; *kde k=0, 1, 2, ...n*

Střední hodnota a rozptyl: $E(X) = D(X) = \lambda$

Příklad na Poissonovo rozdělení:

Na benzínové stanici natankují průměrně za jednu hodinu 3 kamiony. Určete pomocí Poissonova rozdělení pravděpodobnost, že v následující hodině přijede na benzínovou stanici aspoň jeden kamion.

Ptáme se na pravděpodobnost, že přijede jeden nebo více kamionů tudíž: $P(X \geq 1)$

Pro výpočet pravděpodobnosti pro jednoho i více kamionů, sečteme jednotlivé pravděpodobnosti.

$P(X) = p(1) + p(2) + p(3) + \ldots + p(\infty)$

Tento příklad by byl těžko vypočitatelný, proto se podívejme na otázku z jiného pohledu. Víme, že musí na benzínovou stanici přejet buď jeden a více kamionů, nebo žádný kamion se 100% pravděpodobností $P(X) + p(0) = 1$

Upravíme a vypočítáme:

$$P(X) = 1 - p(0) = 1 - \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 1 - (\frac{1}{1} \cdot 0,04979) = 0,95021$$

Pravděpodobnost, že na benzínku přijede alespoň 1 kamion je 0,95021.

4 SPOJITÉ ROZDĚLENÍ NÁHODNÉ VELIČINY

4.1 Rovnoměrné spojité rozdělení

Spojitá náhodná veličina X má na daném intervalu (a,b) konstantní hustotu pravděpodobnosti, mimo tento interval je hustota nabytí hodnoty rovna nule. S tímto typem rozdělení se setkáváme například při zaokrouhlovacích chybách. Značí se $X \sim Rs(a, b)$

Výpočet hustoty pravděpodobnosti: $f(X) = \frac{1}{b-a}$; $pro\ x \in (a, b)$

Distribuční funkce rozdělení: $F(X) = 0$; $pro\ x < a$

$F(X) = 1$; $pro\ x > b$

$F(X) = \frac{x-a}{b-a}$; $pro\ x \in \langle a, b \rangle$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{1}{12}(b - a)^2$

Příklad rovnoměrného spojitého rozdělení:

V pekárně upečou makové koláčky za 40 minut. Jaká je pravděpodobnost, že příchozí návštěvník na čerstvě upečené koláčky bude čekat 5 až 10 minut?

Interval pravděpodobnosti: $(a,b) = (0,40)$

Interval čekání návštěvníka: $(x_1, x_2) = (5,10)$

Nejprve budeme potřebovat spočítat pravděpodobnost pro $x_1 = 5$ a $x_2 = 10$, kde rozdílem těchto pravděpodobností získáme požadovanou distribuční funkci pravděpodobnosti.

$F(5) = \frac{5-0}{40-0} = \frac{5}{40} = 0,125$

$F(10) = \frac{10-0}{40-0} = \frac{1}{4} = 0,25$

Tudíž dostaneme: $F(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(5) = 0,25 - 0,125 = 0,125$

Návštěvník bude čekat 5 až 10 minut na koláčky s pravděpodobností 0,125.

4.2 Exponenciální

Exponenciálním rozdělením vyjadřujeme dobu, než nastane daná událost, náhodná událost $X \sim Ex(\lambda)$, $\lambda > 0$, kde λ je parametrem vyjadřujícím dobu čekání. Tato událost může nastat se stejnou pravděpodobností v jakýkoliv okamžik, tj. bez ohledu na již pročekanou dobu. Pomocí tohoto rozdělení často popisujeme rozpad látek či životnost zařízení v důsledku náhodných jevů.

Hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Distribuční funkce: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Střední hodnota: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Rozptyl: $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Příklad na exponenciální rozdělení:

Během dne odjíždí ze zastávky autobus průměrně každých 12 minut. Určete pravděpodobnost, že osoba, která přijde na zastávku bude čekat více než 15 minut. Jaký bude rozptyl?

Máme informaci že autobus odjíždí průměrně každých 12 minut, což je střední hodnota - bude přece jezdit jinak v noci a ve špičce.

Střední hodnota: $E(X) = 12 \rightarrow \lambda = \frac{1}{12}$

Hledaná pravděpodobnost: $P(15 < X < \infty)$

Spočítáme pravděpodobnost tak, že od všech možných pravděpodobností odečteme nežádoucí:

$P(15 < X < \infty) = F(\infty) - F(15) = F(\infty) - 1 - e^{-\frac{1}{12}x} = 1 - (1 - e^{-\frac{15}{12}}) = 0,2865$

Rozptyl: $D(x) = \frac{1}{12^2} = 0,0069$

Pravděpodobnost, že osoba bude čekat více než 15 minut je 0,2865 a rozptyl je 0,0069.

4.3 Normální a normované normální rozdělení

Normální rozdělení bývá označováno také jako obecné normální rozdělení či Gaussovo rozdělení, $N(\mu, \sigma^2)$. Toto rozdělení je nejčastěji se vyskytujícím a to i díky tomu, že můžeme tímto rozdělením dobře aproximovat i jiná pravděpodobnostní rozdělení.

Pro výpočet hustoty použijeme: $f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$$\text{kde } \mu \in R,\ \sigma > 0,\ x \in (-\infty, +\infty)$$

Pro výpočet distribuční funkce se využívá tabelovaný vztah (tj.normované náhodné veličiny) z toho důvodu, že analytický výpočet normálního rozdělení není možný.

Střední hodnota: $E(X) = \mu$

Rozptyl: $D(X) = \sigma^2$

Normované normální rozdělení je speciální případ, kdy má normální rozdělení $\rho = 0,\ \sigma^2 = 1$. Po úpravách můžeme zapsat hustotu pravděpodobnosti rovnicí:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-0,5x^2} \text{ pro } x \in (-\infty, +\infty).$$

Abychom mohli převést normální rozdělení na normované normální rozdělení a vypočítat distribuční funkci, použijeme lineární transformaci kde místo X a x se používá označení U a u: $U = \frac{u-\mu}{\rho}$.

Distribuční funkce: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-0,5t^2 dt}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\rho}\right)$$

Pro distribuční funkci normovaného normálního rozdělení jsou výsledky tabelované

Tabulky najdete na straně 54

(místo x je v tabulce u, Pro hodnoty P < 0,5 platí vztah: $u_P = - u_{1-P}$)

Příklad na normované normální rozdělení:

Při laboratorním měření mají studenti odečíst změnu délky roztažné tyče. Považuj, že tyč se roztahuje podle normálního rozdělen se střední hodnotou 20 a rozptylem 16. Jaká je pravděpodobnost, že student odečte maximálně 16 mm?

Převedeme si normální rozdělení na normované normální - rozptyl i střední hodnotu známe:

$$D(X) = 16;\ E(X) = 20$$

Doplníme do vzorce pro převod na normalizované normální rozdělení:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-20}{\sqrt{16}}\right) = \Phi\left(\frac{x-20}{4}\right)$$

hledáme $P(x \leq 16)$:

$$F(16) = \Phi\left(\frac{16-20}{4}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$$

Za Φ dosadíme hodnotu z tabulky:

$$F(X) = 1 - 0,841 = 0,159$$

Pravděpodobnost, že student naměří hodnotu 16 mm nebo menší, je 15,9%.

4.4 Weibullovo

Podobně jako exponenciální i Weibullovo rozdělení $[Wb(\delta, \varepsilon)]$se používá k vyjádření životnosti zařízení s tím rozdílem, že Weibullovo rozdělení použijeme tam, kde se projevuje mechanické opotřebovávání a únava materiálu. Pro vyjádření těchto vlivů používáme parametr měřítka $(\delta > 0)$ a formy $(\varepsilon > 0)$, které vypovídají o průběhu pravděpodobnostní hustoty. Při zobrazení grafu Weibullova rozdělení parametr měřítka ovlivňuje průběh funkce a parametr měřítka udává časovou osu.

Hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{\varepsilon}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\varepsilon-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\varepsilon}}$ pro $x \in (0, \infty)$

Distribuční funkce: $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\varepsilon}}$ pro $x \in (0, \infty)$

Střední hodnota a rozptyl jsou odvozeny z funkce: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1}\, dt$, pro $x > 0$

Střední hodnota: $E(X) = \delta\Gamma\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$

Rozptyl: $D(X) = \delta^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\right]$

Weibullovo rozdělení se běžně používá pro vyjádření modelu intenzity poruch λ a to vztahem:

$\lambda(x) = \frac{\varepsilon}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\varepsilon-1}$, pro $x \in (0, \infty)$

Příklad na Weibullovo:

Při vývoji nové součástky používají technici softwarový model, kde provádí simulace při všech možných situacích. Při použití nové slitiny vyčíslili, že parametr měřítka je roven 30 a parametr tvaru 4. Vypočítej, jakou pravděpodobnost má součástka, že bude plně funkční i po více než 30 dnech.

Ze zadání máme jasně udána obě měřítka: $\delta = 30\,;\ \varepsilon = 4$

Zajímá nás $P(X > 30)$ proto potřebujeme upravit vzorec: $1 - P(X \leq 30) = 1 - F(30)$

Vypočítáme úkol: $F(30) = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\varepsilon}}\right] = 1 - \left[1 - e^{-\left(\frac{30}{30}\right)^{4}}\right] = 0,368$

Pravděpodobnost, že součástka bude funkční i po 30 dnech, je 0,368.

4.5 Erlangovo

Erlangovo rozdělení nám říká, jaká je doba do výskytu *k*-té události v Poissonově procesu. Erlangovo rozdělení je určitým zobecněním exponenciálního rozdělení a platí, že v čase 0 až *t* nastane alespoň *k* událostí, pokud doba do výskytu *k*-té události je menší než *t*. Parametry jsou zde dva: kromě již zmíněného parametru *k* (počet událostí), je zde parametr λ udávající rychlost výskytu. Toto rozdělení se může používat při modelování stárnoucích procesů.

Hustota pravděpodobnosti: $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!})$

Distribuční funkce je: $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{j}}{j!}$

Střední hodnota: $E(x) = \frac{k}{\lambda}$

Rozptyl: $D(x) = \frac{k}{\lambda^2}$

Intenzita poruch:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-j)!(\lambda t)^{j}}}$$

Příklad na Erlangovo rozdělení:

Pro hloubkový vrták, určený pro vrtání z ropné plošiny, byl použit model se 4 hlavicemi, kde při poruše jedné hlavice se hned začne používat další, díky tomu není potřeba přerušit vrtání, ani vypnou zařízení, dokud se nepokazí poslední hlavice. Jaká je pravděpodobnost, že vrták bude funkční i po 4 letech, pokud výrobce udává průměrnou životnost jedné hlavice 450 dní? (Počítáno s jedním přestupným rokem.)

Máme zadané oba parametry: $k = 4\,;\ \lambda = \frac{4}{450}$

Chceme vědět $P[X > (4 \cdot 365 + 1)]$ tedy $1 - F(1461)$

Výpočet:

$$F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}) = e^{-\frac{4}{450} \cdot 1461} \cdot \sum_{j=0}^{4-1} \frac{\frac{4*1461}{450}}{j!} = 0,5922$$

Pravděpodobnost, že i po čtyřech letech je vrták funkční, je přibližně 0,59.

II. PRAKTICKÁ ČÁST

5 ELEMENTÁRNÍ PRAVDĚPODOBNOST

Příklady na variace s opakováním i bez:

1) Ve třídě je 25 žáků a na začátku roku je potřeba z nich vybrat zástupce třídy, pokladníka a žáka, který se bude starat o třídní knihu. Kolik má třídní učitel možností k rozdělení třídních funkcí žákům?
2) Na párty mají všichni účastníci možnost si zakoupit jedno číslo do tomboly. Na konci párty jsou z osudí taženy 3 čísla, podle kterých je rozdána cena za první, druhé a třetí místo (první vytažené číslo dostane první cenu atd.). Kolik je v osudí celkový počet čísel, pokud počet možností, jak uspořádat vítěznou trojici je 990?
3) Při hře je z krabičky taženo vždy jedno číslo, které se pak vrací zpět do osudí. Kolik je v osudí celkový počet čísel, pokud jsou tažena 3 čísla rozhodující o 1., 2. a 3. výhře a možností jejich uspořádání je 2 197?
4) Závodu v běhu se účastní 6 amatérských běžců. Kolik možností umístění účastníků na prvních 3 místech je? A jak se výsledek změní, pokud se ještě na poslední chvíli přihlásí profesionální běžec, který vyhraje?
5) Morseova abeceda je tvořena pouze čárkami a tečkami (krátký a dlouhý signál). Písmena jsou kódována ve 27 znacích pomocí jednoho až čtyř signálů. Bylo by možné zakódovat více písmen aniž bychom potřebovali více signálů? A pokud ano - kolik písmen je možné zakódovat?
6) Při výuce se studenti seznamují s dvojkovou soustavou. Dostali za úkol zjistit, kolik různých čísel mohou zapsat právě ve dvojkové soustavě do tabulky, kde se vejde dvanáct cifer. Kolik čísel mohou zapsat?
7) Dokážete vyjádřit počet všech sedmiciferných čísel pomocí variací?
8) Parta 8 kamarádů se rozhodla jít do kina. Bohužel při nákupu lístků se dozvěděli, že je volných pouze 5 sedadel. Kolika různými způsoby se kamarádi mohou rozhodnout kdo se na film v kině podívá?
9) Na dětském táboře se děti rozdělili do několika týmů a každý tým má mít svou vlastní vlajku. Každá vlajka se má skládat ze tří vodorovných, stejně širokých pruhů. K dispozici

mají 4 barvy a každá barva se na vlajce může objevit pouze jednou a záleží na jakém místě se daná barva nachází. Kolik týmů mohou vytvořit?

Výsledky:

ad 1) V = 13 800 ad 2) V = 11 ad 3) V´ = 13

ad 4) V = 120; V(2,6) = 30 ad 5) V´= V'(1, 2) + V'(2, 2) + V'(3, 2) + V'(4, 2) = 30

ad 6) V´= 4 096 ad 7) $V(1,9) \cdot V'(6,10) = 9 \cdot 10^6$ ad 8) V = 6 720

ad 9) V = 24

Příklady na permutace s opakováním i bez:

1) Děti na táboře chtějí mít každé svůj jedinečný znak. Ten je tvořen čtyřmi obrázky zvířat které jsou umístěny do čtvrtin čtverce (tj. vlevo nahoře, vlevo dole, vpravo nahoře a vpravo dole). Kolik různých znaků můžeme poskládat pomocí 4 obrázků zvířat?
2) Při nástupu na vojně je nutné, aby každý věděl kde má v řadě stát. Pokud máme skupinku 7 nových vojáků, které je nutné zařadit do řady, které budou mít do konce vojny, kolik máme možností na jejich zařazení?
3) Ve škole dostává každý žák šesticiferné číslo. Aby bylo možné na první pohled poznat, zda se jedná o číslo dívky či chlapce, rozhodli se, že čísla dívek budou začínat číslicí 6, 7 nebo 8. Kolik různých kombinací pro dívky mají?
4) Škola uspořádala gymnastickou soutěž týmů a každý tým musí předvést sestavu. Eva, Jirka a Pavel jsou v jednom týmu, a dohodli se, že vsadí na prvky které ovládají nejvíc. Proto budou 2 cviky představovat 2x. Celkem musí předvést 6 cviků (každý předvede 2 cviky). Kolik možností mají k sestavení jejich sestavy?
5) Pokud máme slovo P O L O O S T R O V a chceme z jednotlivých písmen udělat slovo nové a je jedno, jestli nové slovo bude nebo nebude dávat smysl. Kolik takových slov můžeme vytvořit?

6) Učitel matematiky chtěl své žáky trochu prověřit, a tak připravil pro ně test s příklady. Aby studenti neopisovali vytvořil několik skupin, které se lišily jen tím, že příklady byly proházené. Zjistil, že jeho žáci se nepřipravili dobře. Proto se po týdnu se rozhodl jim dát nový test s více příkladama. Učitel sestavil test, kde bylo o 2 příklady více než v prvním testu. Tato změna umožnila vytvořit až o 42 skupin víc. Kolik bylo příkladů na prvním testu?
7) Ve škole je nepovinný předmět, do kterého chodí 6 studentů. V tomto roce jsou na škole i zahraniční studenti z výměnného programu a 3 z nich se rozhodli taktéž navštěvovat tento nepovinný předmět. Učitel si chce zapsat každého studenta, kolik má možností pokud chce mít české a zahraniční studenty zapsané pohromadě?
8) Kolika způsoby můžeme ze slova O R T E L poskládat nové slovo, pokud chceme aby písmeno T zůstalo uprostřed? (Nová slova nemusí dávat smysl.)
9) Karel a Michal hrají kostky. Hází vždy se třemi kostkami naráz a povedlo se jim, třikrát po sobě hodit součet 13. Kolika různými způsoby může takový součet padnout?

Výsledky:

ad 1) $P = 24$	ad 2) $P = 5040$	ad 3) $3 \cdot P'_5 = 3 \cdot 10^5$
ad 4) $P' = 180$	ad 5) $n = 151\,200$	ad 6) 5
ad 7) 17 280	ad 8) 24	ad 9) 21

<u>Příklady na kombinace s i bez opakování:</u>

1) Anička donesla 25 bonbónů do školy, aby se svými kamarády oslavila svoje narozeniny. Ve škole je ten den i s ní 7 žáků. Anička bonbóny rozdávala spolužákům o přestávce a dala vždy ruce, která se k ní natáhla. Po rozdání všech bonbónů měli všichni spolužáci jeden v puse. Kolik je možností jak bonbóny rozdala?
2) V krabičce je 32 zápalek. Kolika různými způsoby je možné je rozdělit na 4 hromádky?

3) Na jedné směně v nákupním centru je 8 mužů z ostrahy, kteří po centru chodí vždy ve dvojici. Kolik mohou vytvořit dvojic?
4) Na Velikonoce má Maruška namalovaných 15 vajíček, 20 vajíček obarvila pomocí barviva a dalších 50 ozdobila pomocí nálepek. Rozhodla se každému koledníkovi dát 5 vajíček. Kolik různých kombinací může udělat?
5) Karel se rozhodl rozdat svoji sbírku 16 fotbalových kartiček s pravými autogramy. Má 4 kamarády, kteří by za takové kartičky byli nadšení a tak jim je Karel rozdělí. Kolik má možností?
6) V tělesné výchově se žáci naučili 5 cviků na hrazdě a 7 cviků na kladině. Pro ohodnocení si musí vybrat 2 cviky na hrazdě a 3 cviky na kladině, které předvedou. Pořadí prvků nemá na hodnocení žádný vliv. Kolik různých kombinací mohou předvést?
7) Na párty se každý s každým pozdravil a tento pozdrav byl zvěčněn fotkou. Celkem bylo pořízeno 39 fotek. kolik bylo účastníků?
8) V kavárně chtějí do výlohy dát talíř se zákusky. Na prodej mají 21 druhů a každý může být zastoupen jen jedenkrát, vypočítali, že mají celkem 20349 možností výběru. Kolik zákusků se vejde na talíř?
9) Ve škole uspořádali pro žáky matematickou olympiádu. V jedné úloze měli žáci určit počet kvádrů s velikostí hran o maximální délce 10 cm. Započítávat měli jen ty, které mají délku v celých centimetrech. Kolik jich měli napočítat? A kolik z nich je krychlí?

Výsledky:

ad 1) K´ = 142506	ad 2) K´ = 6545	ad 3) K´ = 28
ad 4) K'(5, 3) = 21	ad 5) K´ = 969	ad 6) K(2,5)·K(3,7) = 350
ad 7) n = 9	ad 8) k = 5	ad 9) K'(3, 10) = 220, 10

6 DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ NÁHODNÉ VELIČINY

Příklady rovnoměrné rozložení:

1) V tombole je ukryt neznámý počet losů. Na každém losu je jiná výhra, ale víme, že jeden los ukrývá nové kolo. Jaká je pravděpodobnost výhry kola pokud víme, že rozptyl v tombole je 374?
2) V deskové hře máme pravidelný dvanáctistěn. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu padne číslice 2?
3) Tatínek se synem často hrají karty, ale z balíčku se jim nějaké ztratily. Proto je potřeba koupit nové, a jelikož syn má rád hlavolamy, tatínek mu řekl, aby koupil takové, které mají střední hodnotu balíčku 32,5 a zjistil jaký rozptyl zakoupeného balíčku. Kolik je v balíčku karet a jaký mají rozptyl?
4) Na táboře je 6 vedoucích, kteří mají na starost 14 dívek a 19 chlapců. Na konci odpoledne se mají vytvořit dvojice dětí pro večerní napínavou hru. Jaká je pravděpodobnost, že Matěj zůstane sám?
5) Máme balíček karet na hru Černý Petr (obsahující 33 karet). Karty se rozdají mezi tři hráče a první kolo proběhne bez toho aby se hráči podívali jaké mají karty. Jaká je pravděpodobnost, že si začínající hráč v prvním tahu kartu Černého Petra nevytáhl?
6) Pepa hází klasickou kostku. Právě hodil čtyřku a v následujícím hodu chce hodit pětku, aby vyhrál. Jakou má šanci, že se mu hod povede jak si přeje?
7) Do skladu bylo v pondělní dodávce přivezeno 6 krabic zboží, v úterý přivezli dalších 5 krabic a ve čtvrtek 15 krabic. Kontrola krabic byla provedena až v pátek a zjistilo se, že v jedné dodávce bylo jiné zboží. Jaká je pravděpodobnost pro jednotlivé dodávky, že v nich bylo jiné zboží?
8) Přepravní firma ztratila doklady o převáženém zboží a díky tomu, nejen že se zamýchal jeden nefunkční kus mezi další funkční kusy, ale ani se neví, ve které zásilce je. Přepravní firma vybavila celkem 3 zásilky (označené A, B a C) vždy o 140 kusech zboží. Zaměstnanci budou muset prohledávat zboží dokud tento vadný kus nenajdou. Rozhodli se, že ráno začnou se zásilkou A, ale než ráno začali, dostali zprávu, že v zásilce C vadný kus určitě není. Je z hlediska pravděpodobnosti jedno se kterou zásilkou zaměstnanci začnou? Zdůvodni.

9) Při hře s hracími kostkami máme k dispozici 3 hromádky pravidelných mnohostěnů : 4 šestistěnných kostek, 6 osmistěnů a 12 dvacetistěnů. Jaké kostky si vyberu, pokud budu chtít hrát s kostkami, které mají největší pravděpodobnost hodu určitého čísla?

Výsledky:

ad 1) k=67, P=$\frac{1}{67}$

ad 2) $\frac{1}{6}$(číslo 12 obsahuje číslici 2)

ad 3) k=64; D=341.25

ad 4) k=23; P=$\frac{1}{23}$

ad 5) P=$\frac{32}{33}$

ad 6) P=$\frac{1}{6}$

ad 7)$P_{1,2,3}$= $\frac{3}{13}$; $\frac{5}{26}$; $\frac{15}{26}$

ad 8) Ne, jedná se o tzv. Monty Hallův paradox, když pracovníci rozhodovali kde začnou, měli pravděpodobnost $\frac{1}{3}$,že tam vadný kus je a $\frac{2}{3}$, že tam není. Po zjištění obsahu zásilky C, zůstala pravděpodobnost. že vybrali zásilku s vadným kusem, stejná. $P_A = \frac{1}{3}$, $P_B = \frac{2}{3}$

ad 9) osmistěny, $P_6 = \frac{4}{6}$, $P_8 = \frac{6}{8}$, $P_{20} = \frac{3}{5}$

<u>Příklady alternativního rozdělení:</u>

1) V osudí je ukryto 352 losů. Jaký je rozptyl a střední hodnota losů v osudí, pokud pořadatel uvádí, že pravděpodobnost výhry je 30%?
2) Petr a Pavel hrají ruletu. Petr se vsadil, že padne číslo v rozmezí 6 až 15 a Pavel se vsadil, že padne prvočíslo. Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo, při kterém budou oba vítězové? (Na ruletě jsou čísla 0-36)
3) Ve váčku je 26 kuliček a na každé kuličce je jiné písmeno. Jaká je střední hodnota a rozptyl za předpokladu, že náhodně vybraná kulička bude mít samohlásku?
4) Jaká je pravděpodobnost, že z balíčku 36 karet (mariášské karty) si vezmete sedmičku nebo eso?

5) Při hodu klasickou kostkou padlo nějaké číslo, pokud chceš vyhrát musíš hodit vyšší číslo. Vyhrál si. Jaké padlo číslo, pokud víš, že rozptyl byl 0,25?
6) Pro své přátele vymýšlíš novou stolní hru, ke které budou hráči potřebovat kostku. Základní deska je již hotová a je třeba už jen doladit detaily. Z toho, jak je namalovaná, vyplývá, že bude potřeba použít kostku s rozptylem 0,0475. Kolikatistěn by bylo potřeba používat?
7) Na ulici hrají děti kostky. Hází se vždy dvě klasické kostky a před hodem děti tipují jaký součet čísel padne. Jaká je pravděpodobnost, že na kostkách padne součet 8?
8) V baru je v nabídce 32 nápojů a z toho je pouze jedna osmina nealkoholická. Zákaznice se rozhodla vybrat si z nabídky dva nápoje. Jakou má pravděpodobnost, že jeden bude nealkoholický?
9) Jarda a Jakub jdou na párty, kde je 40 lidí. Jarda a Jakub se dohadují kdo má lepší intuici a tak se rozhodnou ji otestovat. Oba tipnou jaká je pravděpodobnost, že dva lidé na párty slaví narozeniny ve stejný den. Jaká je pravděpodobnost a rozptyl tohoto jevu? (Počítej jako by neexistoval přestupný rok)

Výsledky:

ad 1) E(X) = p=0,3; var(X)=0,21

ad 2) p=$\frac{3}{37}$

ad 3) E(X) = p=$\frac{3}{13}$; var(X)≐0.18

ad 4) p= $\frac{2}{9}$

ad 5) p=0,5;padla 3

ad 6) 20-ti stěn (p=0,05)

ad 7) $\frac{3}{21} \doteq 0,143$

ad 8) 0,25

ad 9) $273,97 \cdot 10^{-5}$; $273,22 \cdot 10^{-5}$

Příklady binomického rozdělení:

1) Dopravní společnost kontroluje dodržování jízdního řádu na spoji, který vede přes opravovanou silnici. Z dat od cestujících dostala společnost informaci, že spoj bude mít zpoždění s pravděpodobností 0,18. Pro ověření bude pořízeno dalších kontrolních 25

měření. Jaká je pravděpodobnost, že zpoždění bude mít méně než 5 spojů z kontrolních měření?

2) Franta a Pepa hrají kuličky, oba jsou pro hru zapálení, a proto si vedou statistiku - Pepa je zkušenější a do dírky se ztrefí 68 količkami ze 100 pokusů. Franta má úspěšný zásah jen v 48 ze 100 provedených pokusů. Aby byli kluci rovnocenní soupeři,m domluvili se, že Pepa bude mít 12 kuliček a Franta jich bude mít 18. Kdo je z pohledu pravděpodobnosti větší favorit? (Pravděpodobnost vztahuj k 10 trefám)
3) Při inventuře bylo nalezeno 6% složek bez označení. Firma tento nedostatek začala napravovat, ale než začali, přišla kontrola a ta si vybrala náhodně 16 složek. Jaká je pravděpodobnost, že všechny vybrané složky budou v pořádku? A jaká je pravděpodobnost, že si kontrola nevzala víc jak 3 neoznačené složky?
4) Děti se učili Morseovu abecedu (27 písmen) a na konci dne je čekala hra, ve které si budou tahat 6 Morseových písmen z nichž musí poskládat aspoň 3 písmenné slovo, pokud ho poskládá má jeden bod. Jakou má Anička pravděpodobnost, že si vytáhne alespoň tři samohlásky?
5) V soutěži je hodnotná výhra. Pořadatel uvádí, že pro soutěž byla vypočítána střední hodnota 0,75 a rozptyl 0,1875, dále víš, že abys vyhrál, musí se určitá událost opakovala 3x. Jakou máš pravděpodobnost výhry?
6) Policejní sbor koná náborovou akci. Přihlášení účastníci musí splnit nejdřív fyzické testy a poté psychologické. Dle statistik fyzickými testy projde 41% uchazečů. Tohoto náboru se parta 16 kamarádů rozhodla zúčastnit. Jaká je pravděpodobnost, že k psychologický testům projde 9 z nich?
7) Na dětském hřišti je skupina 36 dětí učitelem rozpočítána do 6 týmů. Jakou má pravděpodobnost 5 nejlepších kamarádů aby byli v jednom týmu při náhodném výběru?
8) Chovateli vzácných užovek se povedlo odchovat hned 14 mláďat. Vzhledem k dalšímu chovu, při vývoji vajíček udržoval teplotu tak, aby se s pravděpodobností 76% vylíhli samičky. Jakou má šanci, že mezi mláďaty bude alespoň 12 samiček?
9) Při kontrole kvality vody v Praze bylo provedeno 64 odběrů. Většina vzorků prošla, ale 2 vzorky neprošly. Střední hodnota odběrů byla 0,256. Jaká byla pravděpodobnost, že právě 2 vzorky neprojdou? A jaká byla pravděpodobnost, že vzorek projde, jednoho odběru?

Výsledky:

ad 1) P=0,523

ad 2) Franta (P_P=0,143; P_F=0,152)$p_P = 0,143\ vs\ p_F = 0,152$)

ad 3) P_0=0,372; P_3=0,013 ad 4) P_3=0,00093 ad 5) P=0,029

ad 6) P=0,093 ad 7) P=0,17 ad 8) P=0,311

ad 9) P=0,025; 0,004

Příklady negativního binomického rozdělení:

1) Při zaznamenávání signálů se 7% zaznamená špatně a 4% se nezaznamenají vůbec. Kolik signálů bylo při testování použito, pokud ve výsledku bylo nalezeno 23 chyb a chybovost spočítána na 0,65%?
2) Bylo zjištěno, že 20% populace je očkována vakcínou Vaší společnosti. Jaká je pravděpodobnost, že zástupce společnosti bude muset oslovit 15 náhodných lidí než najde 5 lidí očkovaných Vaší vakcínou?
3) Ropná společnost si nechala vypracovat geologický posudek pro nově nalezené pole. Kvůli skalnatému podloží je pravděpodobnost, že vrtná hlavice projde skálou, 50%. Pokud hlavice neprojde, musí se začít vrtat z povrchu odznova. Pro stabilizaci odběru ropy je nutné vyvrtat 3 průduchy. Společnost má k dispozici jen 7 hlavic, jakou mají pravděpodobnost, že jim budou stačit?
4) Josef se už několik let účastní soutěží v šipkách, střed trefí s pravděpodobností 46%. Ve finále soutěže bude mít k dispozici 8 šipek. Jakou má pravděpodobnost, že šipkou trefí popáté střed?
5) Loterie slaví 15 let svého fungování a proto se majitelé rozhodli, že se bude hrát o rekordní výhru. Dle evidovaných sázek si vsadilo 35% populace. Aby zvýšili prodej sázek, vyrazili zaměstnanci oslovit náhodné občany. Jakou mají zaměstnancí pravěpodobnost, že naleznou tři osoby jenž si již vsadili, mezi 6 až 10 oslovenými?

6) V národním parku sledují populaci zmijí obecných, u kterých pohlaví mláďat záleží na teplotě. Pro zdokumentování několik mláďat zkontrolovali a našli mezi nimi 9 samiček a rozptyl byl vypočítán na 13,5. Jaké je zastoupení samiček mezi mláďaty? Jaký je rozptyl?
7) Ve škole na prvním stupni je 80% dětí, které navštěvují školní družinu. Vedení školy chce zjistit, proč ostatní děti nechodí do družiny. Po následujících třídních schůzkách se vyptávají rodičů. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi najdou 5 rodičů zájmových dětí, a přitom jim bude stačit se zeptat 14 rodičů? (Uvažujeme jednoho rodiče na jednoho žáka)

Výsledky:

ad 1) 143 signálů | ad 2) P=0,0436 | ad 3) $P_1+...+P_7=0,445$

ad 4) P=0,07371 | ad 5) $P_{10}-P_5=0,3146$ | ad 6) 40%; D(X)=33,75

ad 7) $P_1+...+P_{14}=0,3267$

Příklady hypergeometrického rozdělení:

1) Do obchodu bylo naskladněno 30 kusů sešitů v měkké vazbě a 18 sešitů v pevné vazbě. Během prvního týdne bylo prodáno 14 sešitů. Jaká je pravděpodobnost, že bylo prodáno 5 sešitů s pevnou vazbou?
2) U zkoušek si studenti vylosují 5 otázek. Pro úspěšné složení zkoušky musí každý student něco z každé otázky umět, ale Jirka nestíhal a bohužel se naučil pouze 39 otázek. Sám neví, kolik je jich celkem. Jakou má pravděpodobnost pro úspěšné splnění zkoušky, pokud je rozptyl 0,5252 a střední hodnota 4,333? A kolik otázek se nenaučil?
3) Ve třídě je 18 žáků a 11 žákyň, přičemž se na vyučování zodpovědně připravuje jen 5 žáků, ale žákyň hned 9. Paní učitelka se rozhodla prověřit, jak se žáci připravují na výuku, a vyvolá k tabuli 4 žáky. Jaká je pravděpodobnost, že u tabule budou jen připravení žáci? A jaká je pravděpodobnost, že budou vyvoláni jen nepřipravení žáci?
4) V továrně testovali nový lis, a proto zaznamenávali výslednou kvalitu výlisků. Po skončení testování zaznamenali do hodnotící zprávy pro vedení, že výlisky mají rozptyl $0,0393$a

střední hodnota byla 95,86. Tytoyto hodnoty jsou pro provoz lisu dostačující. Kolik bylo vyrobeno kvalitních výlisků a kolik vzorků bylo vybráno, pokud bylo vyrobeno celkem 10 000 výlisků?

5) Knihovna uspořádala akci pro střední školy, kde měli studenti za úkol podle indicií vyhledat určitou knihu, která pak připadne škole. Skóre studentů se pak sečetlo a školy byly odměněny. Zúčastnilo se celkem 5 škol. Jednotlivé školy získali: 22, 20, 19, 14 a 8 knih. Pro článek do novin o soutěži bylo pro foto vybráno 20 knih, které studenti vyhráli pro školu. Jaká je pravděpodobnost, že 15 z nich bylo darována jedné z prvních třech škol?
6) V továrně měli vyrobit 50 žlutých kostek, a ze zbylého materiálu několik červených kostek. Ve vzorku pro zhodnocení kvality bylo 20 kostek a z toho bylo 17 žlutých. Kolik bylo vyrobeno červených kostek a jaká byla pravděpodobnost, že ve výběru bude zrovna 17 žlutých kostek za předpokladu, že střední hodnota výroby byla 15,625?
7) Starosta obce chystá oslavu ke vzpomínce založení obce. Na náměstí chce umístit 42 stánků, a chce aby bylo 23 z nich zaměřeno na prodej jídla či pití. Po rozmístění ostatních atrakcí zbylo místo pouze na 26 stánků. Z původního návrhu byly vybrány stánky náhodně. Kolik stánků bylo s občerstvením, pokud pravděpodobnost, výsledného postavení stánků,byla vypočítána na hodnotu 0,186?
8) Vedení firmy zveřejnilo zprávu o kontrole výdajů. Zveřejnila, že vzorek 36 dokladů má střední hodnotu 25,5 a pravděpodobnost, že ve výběru bylo 30 správně a 6 chybně napsaných dokladů byla 0,014. Kolik bylo napsaných dokladů a kolik jich bylo chybných?
9) Do denní zprávy vedoucí zveřejnil, že u sledovaného výrobku byla střední hodnota 12,447, vyrobeno bylo 47 kusů, k podrobnému ohodnocení bylo vybráno 15 kusů, z nichž bylo 11 ohodnoceno 1. jakostí. Jaká byla pravděpodobnost tokového hodnocení a kolik bylo vyrobeno kusů 1. jakosti?

Výsledky:

ad 1) P=0,014	ad 2) P=0,47; 6 otázek	ad 3) P_P=0,042; P_N=0,057
ad 4) kv.: 9586; vz.: 100	ad 5) P=0,227	ad 6) č.: 14; P=0,183
ad 7) 13 stánků	ad 8) napsáno 72; 21 chyb	ad 9) P=0,156;39 kusů

Příklady Poissonova rozdělení:

1) V továrně zjistili poruchu stroje, který v době poruchy vylisoval 50 odlitků. Podle dat stroje porucha způsobila, že v 90% výlisků byl materiál špatně zahřátý. Kvůli odstávce stroje továrna musí dodat výrobky z rezerv, ale tam jí chybí 6 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že mezi špatnými naleznou 6 výlisků dobrých aby mohli dodávku poslat? Zkuste příklad vypočítat také pomocí binomického rozdělení a porovnat výsledky.

   (Poissonovo rozdělení: $k = 6$, $\lambda = n \cdot p = 5$)

2) Do účtárny přijde průměrně 10 faktur denně. Jaká je pravděpodobnost, že za jeden den přijde jen 7 faktur?
3) Na benzínové stanici obslouží průměrně 16 zákazníků za hodinu. S jakou pravděpodobností bude v následujících 15 minutách obslouženo 6 zákazníků?
4) Autoservis před zimou zvládne průměrně přezout 6 aut za hodinu. Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu zvládnou přezout alespoň 5 aut v následující hodině?
5) V samoobsluze se za hodinu prodá průměrně 2,5 kg jablek. Jaká je pravděpodobnost, že se v následující hodině prodají alespoň 2 kg jablek?
6) Pokud do firmy dovezou 80 krabic a z toho je 5% krabic úplně nových. První den pracovníci naplní 34 krabic zboží. Jaká je pravděpodobnost, že pracovníci naplnily 6 nových krabic?
7) Restauraci průměrně navštíví 20 degustátorů za rok. Jaká je pravděpodobnost, že v březku přijdou alespoň 2 degustátoři? (Počítej bez ohledu na počet dnů)
8) Nakladatelství vydalo 15 knih za měsíc. Z předcházejících období však víme, že pravděpodobnost toho, že nakladatelství vydá právě toto množství knih je 0,0516. Jaký má nakladatelství měsíční průměr?
9) Transportní firma provede v průměru denně 10 mezistátních transportů. Předcházející den bylo provedeno několik transportů, které byly vyjádřeny pravděpodobností 0,0217. Kolik transportů bylo provedeno?

Výsledky:

ad 1) Poissonovo rozdělení: 0.1462, binomické rozdělení: 0.1541.

ad 2) P=0,09	ad 3) P=0,104	ad 4) P=0,55	ad 5) P=0,713
ad 6) P=0,104	ad 7) P=0,496	ad 8) 20	ad 9) 16

7 SPOJITÁ NÁHODNÁ ROZDĚLENÍ

Příklady rovnoměrného rozdělení:

1) Programátoři nastavili automatická stroj tak, aby výlisek vypadl se střední hodnotou 6 a rozptylem $\frac{4}{3}$. V jakém intervalu automat pracuje?
2) Marii má být balík doručen na adresu mezi 10:00 až 16:30, přičemž v každém okamžiku je stejná pravděpodobnost doručení. Bohužel Marie musí mezi 11:15 až 12:30 odběhnout a nebude moct balíček převzít. Jakou má Marie pravděpodobnost že balíček převezme?
3) Jiří přišel na trolejbusovou zastávku, ze které odjíždí trolejbus každých 14 minut. Jak dlouho čekal, pokud měl k danému čekání pravděpodobnost 0,2857?
4) Jaký měla doručovací služba interval k doručení, pokud měla hustotu pravděpodobnosti 0,25 a střední hodnotu 11?
5) V pekárně mají čerstvě upečené pečivo každých 55 minut. Jakou má zákazník pravděpodobnost, že na čerstvé pečivo bude čekat více než 20 minut?

Výsledky:

ad 1) (4, 8)	ad 2) F=0,808	ad 3) 4 minuty
ad 4) (9, 13)	ad 5) F=0,63	

Příklady exponenciálního rozdělení:

1) Roman si koupil baterii, kde výrobce udává střední hodnotu životnosti 2000 hodin. Jakou má pravděpodobnost, že baterie bude vybita za 1500 hodin?
2) Pracovník v call centru průměrně čeká na telefonát 47 vteřin. Pokud vypočítal pravděpodobnost 0,48 na další hovor, jak dlouho musel čekat?
3) Na silnicích se stane průměrně jedna nehoda za dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že další den nebude žádná nehoda?

4) Na pouti ke stánkaři, který prodává cukrovou vatu, nepřišel žádný zákazník za posledních 15 minut. To, že k tomuto dojde má stánkař pravděpodobnost $67,38 * 10^{-4}$. Jakou má stánkař pravděpodobnost, že za 5 minut nikdo nepřijde?
5) Během dne přejde po lávce průměrně 50 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že následující den lávku využije 30 lidí?
6) Při analýze se zjistilo, že se výrobek s pravděpodobností 23% porouchá za 500 cyklů. Jakou by měl výrobce uvést střední životnost?
7) Na reklamačním oddělení se obrátil zákazník s produktem, u kterého výrobce uvedl střední životnost 4000 hodin. Pravděpodobnost, že produkt selže v uplynulé době, byla pouhých 6%. Jak dlouho výrobek vydržel?
8) Obchodník chce svým zákazníkům nabídnout co nejlepší služby, a proto si udělal statistiku o reklamovaných produktech. Z údajů zjistil, že pravděpodobnost, že produkty bude potřeba reklamovat, je 24%. Jaká je podle těchto údajů střední hodnota životnosti produktů při 2 leté záruce?
9) Podnikatel se rozhodl rozšířit svou nabídku o další produkt, který nabízí 2 výrobci. Jeden nabízí produkt se střední hodnotu životnosti 6000 hodin a druhý udává, že při 1000 hodinách odejde 15% produktů. Který výrobce nabízí kvalitnější produkt? Jakou střední životnost, pravděpodobnost a rozptyl bude mít ten výhodnější produkt?

Výsledky:

ad 1) 0,5276	ad 2) 30,73	ad 3) $6,14 \cdot 10^{-6}$
ad 4) 0,189	ad 5) 0,451	ad 6) 1913
ad 7) 247,5	ad 8) 7,29	ad 9) 6 153; 0,15; $37,86 \cdot 10^{6}$

Příklady normovaného normálního rozdělení:

1) Vědci objevili nový živočišný druh, jehož průměrná výška je 102 cm s rozptylem 5 cm. Jaká je pravděpodobnost, že vybraný vědecky popsaný jedinec tohoto druhu bude mít výšku v rozmezí 97 až 107 cm.
2) Při provádění prohlídky nových typů motorů kontrolovali jejich stav po určité době činnosti. Jedna ze známek funkčnosti motoru je, že se uvede do požadovaných otáček za méně než 70 sekund. Pokud se uvede za více jak 72, je motor poškozen. Po několika prohlídkách vyšla zpráva, že pravděpodobnost, že motor je plně funkční, je 89%. Porucha nastala s pravděpodobností 0,6%. S jakým rozptylem a střední hodnotou tento typ motoru vyrábějí?
3) Se souboru dat byla odečtena střední hodnota rovna 609 a rozptyl 144. Z tabulek byla odečtena hodnota $\Phi = 0,579$. Pro jakou hledanou hodnotu bylo Φ vyhledáno? Jaká pravděpodobnost tomu odpovídá?
4) Při měření byla pro naměření hodnoty x=54 ml zjištěna pravděpodobnost 67%. Jaký byl rozptyl naměřených dat, pokud byla střední hodnota rovna 47,4 ml?
5) Při lahvování mléka plní stroj láhve množstvím 0,75 l mléka. Rozptyl chtějí stanovit na 25 ml. Pokud má láhev objem 750±10 ml smí jít do prodeje. Jaká je pravděpodobnost, že sklenice budou v normě s takovým nastavením?
6) Ideální velikost okurek pro zavařování je 6 až 8 cm, přičemž už při 10 cm jsou okurky vyloučeny pro tento účel, ostatní jsou použity. Zemědělec, který chce letos vypěstovat co nejvíc okurek pro tento účel, má na výběr 3 druhy osiva. První osivo má střední hodnotu okurek 8 cm a rozptyl 5 cm, u druhých je dána střední hodnota 4 cm a stejný rozptyl jako u prvního osiva, u třetích je známý rozptyl 5 cm a 9% pravděpodobnost, že okurky nepřesáhnou velikost 10 cm. Které osivo má největší pravděpodobnost, že vyroste ideálně velká okurka? A které osivo bude mít dle pravděpodobnosti nejméně vyřazených okurek?
7) Na letním táboře měli děti tipovací soutěž. Při jedné otázce spočítali, že průměr tipů byl 263 a rozptyl 100. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný tip bude v rozmezí ±16 od střední hodnoty?
8) Firma si nechala změřit své výlisky dvěma způsoby. Po vyhodnocení obou skupin dat bylo zjištěno, že Φ je stejné, ale rozptyl je různý. Bude některý způsob podle těchto informací přesnější? Pokud ano, který?
9) Rozhodni, která situace je pravděpodobnější: $P_1 = \Phi(0,6)$; $P_2 = \Phi(-0,6)$

10) Ve firmě vyrábějí jeden výrobek dvěma stroji. Po vyhodnocení dat zjistily, že jeden vyrábí se střední hodnotou 53 mm a rozptylem 15 mm a druhý se střední hodnotou 55 mm a rozptylem 11 mm. Výstupní kontrolou projdou pouze výrobky o velikosti 50 až 57mm. Který stroj vyrábí více zmetků?
11) Zahrádkář se chystá sklidit svou úrodu dýní, přičemž dýně vážící přes 20 kg se rozhodl věnovat obci pro oslavu Halloweenu. Již z předchozích let ví, že průměrně vypěstuje dýně vážící 16 kg. Podle odrůdy dýní ví, že šance na vypěstování víc než 20 kg kusy je 15%. Jaký rozptyl dýně mají?
12) Po měření jsme z tabulek zjistili hodnotu Φ=0,88, střední hodnota měření byla 293 mm a rozptyl 56 mm. Jaká byla vypočítaná pravděpodobnost?
13) Z jara biologové prováděli kontrolu hejna tučňáků a každého dospělého tučňáka zvážili. Průměrná váha tučňáka je 5,46 kg. Pokud váha klesne pod 4.36 kg je život tučňáka ohrožen. Z dat vyčíslili, že 27% tučňáků bylo ohroženo. Jaký rozptyl ve váze zjistili?
14) Ve skautské skupině děti podstoupili zkoušky zdatnosti. Bodový průměr skupiny byl 115 a rozptyl 16. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané dítě dosáhlo bodového ohodnocení v rozmezí 100 až 130?
15) Podle personálních informacích o zaměstnancích, je průměrná výška 176,4 cm. Sám majitel měří 176 cm a 54% zaměstnanců je vyšších než on. Jaký je výškový rozptyl zaměstnanců?
16) Při laboratorním měření studenti naměřili soubor dat o množství rozpuštěné soli. Z dat zjistily, že střední hodnota a rozptyl nabývá stejné hodnoty. Náhodně vybrané měření nabylo hodnoty 16 mg/l což bylo vyčísleno pravděpodobností 70%. Jaká je střední hodnota a rozptyl?

Výsledky:

ad 1) 0,97 ad 2) $1{,}6^2$; 68 ad 3)614,4; 57,9%

ad 4)15 ad 5) 0,955

ad 6) P_{1A}=0,3, P_{1N}=0,5; P_{2A}=0,2, P_{2N}=0,06; P_{3A}=0,34, P_{3N}=0,09

ad 7) 0,89 ad 8) menší rozptyl ad 9) P_2

ad 10) P_1=0,37 ; P_2=0,34 ad 11) 15 ad 12) 0,88

ad 13) 2,44 ad 14) 0,65 ad 15) 16

ad 16) 14 ml/l

Příklady na Weibullovo a Erlangovo rozdělení:

1) Ve výzkumném centru mají připojit součástku, která bude mít parametry $\delta = 43$; $\varepsilon = 2$. Na tuto součástku mají dát záruku, že vydrží několik cyklů plně funkční s pravděpodobností 0,9. Na kolik cyklů mají dát záruku?
2) Pro chod zařízení je potřeba vytvářet jiskry pro každý cyklus výroby. Zařízení podstupuje kontrolu v době, kdy není v činnosti, což je průměrně jednou měsíčně. Kolik součástek na tvorbu jisker, které mají průměrnou životnost (dle exponenciálního rozdělení) 16 dní, bude potřeba nainstalovat do zařízení, pokud má být i po 30 dnech funkční s pravděpodobností 88%?
3) Výrobce udává parametry elektronické součástky se střední hodnotou a rozptylem. Střední hodnota je 3,75 a rozptyl 4,6875. Jaká bude pravděpodobnost, že zařízení selže dřív jak za 4 cykly?
4) Ve stoji je potřeba vyměnit elektronickou součástku, ale originální díly již nejsou k sehnání. Proto museli najít jiné součástky, které by byly vhodné a našli dva produkty, které by vyhovovaly. První je vyroben z materiálu mající parametr 66 a parametr formy je dán hodnotou 1,5. Druhý produkt je definován parametrem $\delta = 38$ a $\varepsilon = 0,6$. Který produkt je pro ně výhodnější?
5) V simulátoru byl prověřen přístroj s 5 hlavicemi, který s pravděpodobností 0,5595 nevydrží ani dva roky. Jakou průměrnou životnost mají samotné hlavice?

Výsledky:

ad 1) 14 ad 2) 4 ad 3) 0,6201

ad 4) 2. produkt (pro referenční X>50: P_1=0,517; P_2=0,308) ad 5) 2 roky

ZÁVĚR

V mé práci jsem se zabývala pravděpodobností a jejím rozdělením. Tato práce má sloužit primárně pro další student UTB, jako studijní materiál pro procvičování příkladů, a proto jsou zde vybrané druhy pravděpodobnostního rozdělení, se kterým se mohou studenti na fakulty aplikované informatiky UTB setkat. Protože se pravděpodobnost vyučuje i na dalších školách, věřím, že i studenti jiných fakult i škol budou prohlubovat a procvičovat své vědomosti díky mé práci. Vzhledem k rozdílným osnovám mohou studentům některá rozdělení pravděpodobnosti přebývat nebo naopak, mohou některé scházet.

Jsou zde uvedené definice a základní vzorečky pro počítání s nimi. Dále jsem pro všechny druhy ukázala, jak vzorečky použít na vzorovém příkladu. Abych čtenářům ukázala, kde se s daným rozdělením mohou setkat, tak jsem zadání příkladů situovala právě do možného použití v reálném světě. Ovšem, samotná zadaná čísla nejsou vzata od skutečných věcí.

Všechnu teorii a vzorečky, včetně ukázkových příkladů, jednotlivých rozdělení jsem zpracovala v teoretické části mé bakalářské práce. Příklady pro samostatné počítání jsou umístěné v praktické části, kde jsou uspořádána podle teoretické části. Pod zadáním příkladů, daného rozdělení, jsou pro studenty napsané výsledky, kde si studenti mohou své výpočty ověřit.

Práci začínám elementární pravděpodobností, se kterou se studenti měli setkat již na středních školách. Mělo by to být tedy pro studenty opakování, případně mohou příklady sloužit pro vyrovnání znalostí studentů z různých škol. Na poznatky elementární pravděpodobnosti navazuje náhodná veličina, kterou zde dělím na diskrétní a spojitou. Ve své práci jsem zohlednila, že některá rozdělení nejsou pro studenty tolik významná jako jiná a naopak, a podle toho jsem některým příkladům věnovala více prostoru na propočítání příkladů a jiným méně.

Tabulky normovaného normálního rozdělení:

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,5000000	0,30	0,6179114	0,60	0,7257469	0,90	0,8159399	1,20	0,8849303
0,01	0,5039894	0,31	0,6217195	0,61	0,7290691	0,91	0,8185887	1,21	0,8868606
0,02	0,5079783	0,32	0,6255158	0,62	0,7323711	0,92	0,8212136	1,22	0,8887676
0,03	0,5119665	0,33	0,6293000	0,63	0,7356527	0,93	0,8238145	1,23	0,8906514
0,04	0,5159534	0,34	0,6330717	0,64	0,7389137	0,94	0,8263912	1,24	0,8925123
0,05	0,5199388	0,35	0,6368307	0,65	0,7421539	0,95	0,8289439	1,25	0,8943502
0,06	0,5239222	0,36	0,6405764	0,66	0,7453731	0,96	0,8314724	1,26	0,8961653
0,07	0,5279032	0,37	0,6443088	0,67	0,7485711	0,97	0,8339768	1,27	0,8979577
0,08	0,5318814	0,38	0,6480273	0,68	0,7517478	0,98	0,8364569	1,28	0,8997274
0,09	0,5358564	0,39	0,6517317	0,69	0,7549029	0,99	0,8389129	1,29	0,9014747
0,10	0,5398278	0,40	0,6554217	0,70	0,7580363	1,00	0,8413447	1,30	0,9031995
0,11	0,5437953	0,41	0,6590970	0,71	0,7611479	1,01	0,8437524	1,31	0,9049021
0,12	0,5477584	0,42	0,6627573	0,72	0,7642375	1,02	0,8461358	1,32	0,9065825
0,13	0,5517168	0,43	0,6664022	0,73	0,7673049	1,03	0,8484950	1,33	0,9082409
0,14	0,5556700	0,44	0,6700314	0,74	0,7703500	1,04	0,8508300	1,34	0,9098773
0,15	0,5596177	0,45	0,6736448	0,75	0,7733726	1,05	0,8531409	1,35	0,9114920
0,16	0,5635595	0,46	0,6772419	0,76	0,7763727	1,06	0,8554277	1,36	0,9130850
0,17	0,5674949	0,47	0,6808225	0,77	0,7793501	1,07	0,8576903	1,37	0,9146565
0,18	0,5714237	0,48	0,6843863	0,78	0,7823046	1,08	0,8599289	1,38	0,9162067
0,19	0,5753454	0,49	0,6879331	0,79	0,7852361	1,09	0,8621434	1,39	0,9177356
0,20	0,5792597	0,50	0,6914625	0,80	0,7881446	1,10	0,8643339	1,40	0,9192433
0,21	0,5831662	0,51	0,6949743	0,81	0,7910299	1,11	0,8665005	1,41	0,9207302
0,22	0,5870604	0,52	0,6984682	0,82	0,7938919	1,12	0,8686431	1,42	0,9221962
0,23	0,5909541	0,53	0,7019440	0,83	0,7967306	1,13	0,8707619	1,43	0,9236415
0,24	0,5948349	0,54	0,7054015	0,84	0,7995458	1,14	0,8728568	1,44	0,9250663
0,25	0,5987063	0,55	0,7088403	0,85	0,8023375	1,15	0,8749281	1,45	0,9264707
0,26	0,6025681	0,56	0,7122603	0,86	0,8051055	1,16	0,8769756	1,46	0,9278550
0,27	0,6064199	0,57	0,7156612	0,87	0,8078498	1,17	0,8789995	1,47	0,9292191
0,28	0,6102612	0,58	0,7190427	0,88	0,8105703	1,18	0,8809999	1,48	0,9305634
0,29	0,6140919	0,59	0,7224047	0,89	0,8132671	1,19	0,8829768	1,49	0,9318879

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
1,50	0,9331928	1,80	0,9640697	2,10	0,9821356	2,40	0,9918025	4,50	0,9999966
1,51	0,9344783	1,81	0,9648521	2,11	0,9825708	2,41	0,9920237	5,00	0,9999997
1,52	0,9357445	1,82	0,9656205	2,12	0,9829970	2,42	0,9922397	5,50	0,9999999
1,53	0,9369916	1,83	0,9663750	2,13	0,9834142	2,43	0,9924506		
1,54	0,9382198	1,84	0,9671159	2,14	0,9838226	2,44	0,9926564		
1,55	0,9394392	1,85	0,9678432	2,15	0,9842224	2,45	0,9928572		
1,56	0,9406201	1,86	0,9685572	2,16	0,9846137	2,46	0,9930531		
1,57	0,9417924	1,87	0,9692581	2,17	0,9849966	2,47	0,9932443		
1,58	0,9429466	1,88	0,9699460	2,18	0,9853713	2,48	0,9934309		
1,59	0,9440826	1,89	0,9706210	2,19	0,9857379	2,49	0,9936128		
1,60	0,9452007	1,90	0,9712834	2,20	0,9860966	2,50	0,9937903		
1,61	0,9463011	1,91	0,9719334	2,21	0,9864474	2,51	0,9939634		
1,62	0,9473839	1,92	0,9725711	2,22	0,9867906	2,52	0,9941323		
1,63	0,9484493	1,93	0,9731966	2,23	0,9871263	2,53	0,9942969		
1,64	0,9494974	1,94	0,9738102	2,24	0,9874545	2,54	0,9944574		
1,65	0,9505285	1,95	0,9744119	2,25	0,9877755	2,55	0,9946139		
1,66	0,9515428	1,96	0,9750021	2,26	0,9880894	2,56	0,9947664		
1,67	0,9525403	1,97	0,9755808	2,27	0,9883962	2,57	0,9949151		
1,68	0,9535213	1,98	0,9761482	2,28	0,9886962	2,58	0,9950600		
1,69	0,9544860	1,99	0,9767045	2,29	0,9889893	2,59	0,9952012		
1,70	0,9554345	2,00	0,9772499	2,30	0,9892759	2,60	0,9953388		
1,71	0,9563671	2,01	0,9777844	2,31	0,9895559	2,70	0,9965330		
1,72	0,9572838	2,02	0,9783083	2,32	0,9898296	2,80	0,9974449		
1,73	0,9581849	2,03	0,9788217	2,33	0,9900969	2,90	0,9981342		
1,74	0,9590705	2,04	0,9793248	2,34	0,9903581	3,00	0,9986501		
1,75	0,9599408	2,05	0,9798178	2,35	0,9906133	3,20	0,9993129		
1,76	0,9607961	2,06	0,9803007	2,36	0,9908625	3,40	0,9996631		
1,77	0,9616364	2,07	0,9807738	2,37	0,9911060	3,60	0,9998409		
1,78	0,9624620	2,08	0,9812372	2,38	0,9913437	3,80	0,9999277		
1,79	0,9632730	2,09	0,9816911	2,39	0,9915758	4,00	0,9999683		

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

podle použité citační normy ISO 690

1. VOŠICKÝ, Zdeněk. Matematika v kostce: pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2007 (1. vydání). ISBN 978-802-5301-913.

2. NOVOVIČOVÁ, Jana. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Praha: České vysoké učení technické, 1999. ISBN 80-01-01980-2

3. KARPÍŠEK, Zdeněk, Pavel POPELA a Josef BEDNÁŘ. *Statistika a pravděpodobnost - přehled vzorců a poznatků*. Brno: FSI VUT CERM Brno, 2006.

4. BUJOK, Petr, Josef TVRDÍK a Radka POLÁKOVÁ. *Základy pravděpodobnosti a statistiky*. Ostrava: Přírodovědecká fakulta Ostravské University, 2015. Dostupné také z: https://web.osu.cz/~Bujok/files/zmats.pdf

5. CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 4. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-147-7.

6. MRKVIČKA, Tomáš a Vladimíra PETRÁŠKOVÁ. *Úvod do statistiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2006. ISBN 80-7040-894-4.

7. BUDÍKOVÁ, Marie a Jitka ŠÁLYOVÁ. Statistika a pravděpodobnost. *Statistika a pravděpodobnost* [online]. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 2016 [cit. 2021-5-12].
   Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps15/statistika/web/index2.html

8. DOUDOVÁ, Lucie. *Statistická analýza populací s negativně binomickým rozdělením*. Brno, 2009. Disertační práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Jaroslav Michálek.

9. BERMAN, Harvey. *Stat Trek* [online]. 2021 [cit. 2021-5-12]. Dostupné z: https://stattrek.com

10. The Pennsylvania State University. *Penn State: Introduction to Probability Theory* [online]. 2021 [cit. 2021-5-12]. Dostupné z: https://online.stat.psu.edu/stat414/lesson/introduction-stat-414

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

D(X)	Rozptyl
E(X)	Střední hodnota
f(X)	Hustota funkce
F(X)	Distribuční funkce
G	Množina prvků
K	Kombinace
K´	Kombinace s opakováním
M	Množina prvků z pozorovanou vlastností
n	Rozsah výběru
N	Množina všech prvků
p	pravděpodobnost
P	Permutace
P´	Permutace s opakováním
V	Variace
V´	Variace s opakováním