

Modely a algoritmy pro dopravní a síťové úlohy s neurčitostí

Ing. Bc. Lucie Šikudová



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: Ing. Bc. Lucie Šikudová
Osobní číslo: A23410
Studijní program: N0613A140022 Informační technologie
Specializace: Kybernetická bezpečnost
Forma studia: Kombinovaná
Téma práce: Modely a algoritmy pro dopravní a síťové úlohy s neurčitostí
Téma práce anglicky: Models and Algorithms for Transportation and Network Problems Under Uncertainty

Zásady pro vypracování

- Seznamte se s tématem stochastického programování a stochastické optimalizace.
- Zpracujte řešeršní část popisující ilustrativní modely a (exaktní či heuristické) metody řešení.
- Zvolte si jednu či více vzorových úloh spadajících do dané oblasti a namodelujte je. Dále zvolte a otestujte vhodné algoritmy a ty naimplementujte ve zvoleném jazyku (např. v Pythonu).
- Vytvořte vlastní příklad(y) z oblasti studijního oboru (kyberbezpečnost), popř. využijte buď experimentální či reálná data, a namodelujte. Úlohu vyřešte pomocí algoritmů ověřených výše a výsledky srovnajte.
- Proveďte důkladnou diskuzi dosažených výsledků, popište omezení a nedostatky zvolených přístupů a zformulujte směry vhodné pro další výzkum.

Seznam doporučené literatury:

1. GHIANI, Gianpaolo, Gilbert LAPORTE a Roberto MUSMANNO. *Introduction to logistics systems planning and control*. Hoboken, NJ, USA: J. Wiley, c2004. ISBN 0-470-84917-7.
2. TOTH, Paolo a Daniele VIGO. *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications*. Second edition. SIAM, 2014. ISBN: 978-1-611973-58-7.
3. MATAI, Rajesh, Surya SINGH a Murari LAL. Traveling Salesman Problem: an Overview of Applications, Formulations, and Solution Approaches. In: DAVENDRA, Donald, ed. *Traveling Salesman Problem, Theory and Applications* [online]. InTech, 2010 [cit. 2024-10-21]. ISBN 978-953-307-426-9. Dostupné z: <http://www.intechopen.com/books/traveling-salesman-problem-theory-and-applications/traveling-salesman-problem-an-overview-of-applications-formulations-and-solution-approaches>
4. PAJONK, Tomáš. *Modifikace rozvozního problému*. Online. Diplomová práce. Praha: Vysoká škola ekonomická v Praze. 2007. Dostupné z: <https://theses.cz/id/asv15s/>.
5. KALL, Peter a Stein W. WALLACE. *Stochastic Programming*. J. Wiley & Sons, 1994.
6. LI, Can a Ignacio E. GROSSMANN. A Review of Stochastic Programming Methods for Optimization of Process Systems Under Uncertainty. *Frontiers in Chemical Engineering* [online]. 2021, 2021-1-28, 2 [cit. 2024-10-21]. ISSN 2673-2718. Dostupné z: doi:10.3389/fceng.2020.622241
7. BIRGE, John R. a François LOUVEAUX. *Introduction to stochastic programming* [online]. 2nd ed. New York: Springer, 2011 [cit. 2024-10-21]. Springer series in operations research and financial engineering. ISBN 978-1-4614-0236-7. Dostupné z: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0237-4>
8. DAWOOD, Harith A. Graph Theory and Cyber Security. In: *2014 3rd International Conference on Advanced Computer Science Applications and Technologies* [online]. IEEE, 2014, s. 90-96 [cit. 2024-10-21]. ISBN 978-1-4799-1845-4. Dostupné z: doi:10.1109/ACSAT.2014.23
9. RASS, Stefan, Stefan SCHAUER, Sandra KÖNIG a Quanyan ZHU. *Cyber-Security in Critical Infrastructures* [online]. Cham: Springer International Publishing, 2020 [cit. 2024-10-21]. Advanced Sciences and Technologies for Security Applications. ISBN 978-3-030-46907-8. Dostupné z: doi:10.1007/978-3-030-46908-5

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Dušan Hrabec, Ph.D.**
Ústav matematiky

Datum zadání diplomové práce: **27. října 2024**

Termín odevzdání diplomové práce: **2. června 2025**

doc. Ing. Jiří Vojtěšek, Ph.D. v.r.
děkan



prof. Mgr. Roman Jašek, Ph.D., DBA v.r.
ředitel ústavu

Ve Zlíně dne 17. listopadu 2024

PROHLÁŠENÍ AUTORA DIPLOMOVÉ PRÁCE

Beru na vědomí, že

- odevzdáním diplomové práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., v platném znění bez ohledu na výsledek obhajoby;
- diplomová práce bude uložena v elektronické podobě v univerzitním informačním systému a bude dostupná k nahlédnutí;
- jedno vyhotovení diplomové práce v listinné podobě bude ponecháno Univerzitě Tomáše Bati ve Zlíně k uložení;
- na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších právních předpisů, zejm. § 35 odst. 3;
- podle § 60 odst. 1 autorského zákona má Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně právo na uzavření licenční smlouvy o užití školního díla v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- podle § 60 odst. 2 a 3 mohu užít své dílo – diplomovou práci – nebo poskytnout licenci k jejímu využití jen s předchozím písemným souhlasem Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše);
- pokud bylo k vypracování diplomové práce využito softwaru poskytnutého Univerzitou Tomáše Bati ve Zlíně nebo jinými subjekty pouze ke studijním a výzkumným účelům (tj. k nekomerčnímu využití), nelze výsledky diplomové práce využít ke komerčním účelům;
- pokud je výstupem diplomové práce jakýkoliv softwarový produkt, považují se za součást práce rovněž i zdrojové kódy, popř. soubory, ze kterých se projekt skládá; neodevzdání této součásti může být důvodem k neobhájení práce.

Prohlašuji, že

- jsem na diplomové práci pracoval(a) samostatně a použitou literaturu jsem řádně citoval(a); v případě publikace výsledků budu uveden(a) jako spoluautor;
- odevzdaná verze diplomové práce a verze elektronická nahraná do IS/STAG jsou obsahově totožné.

Ve Zlíně, dne

.....
podpis autora

ABSTRAKT

Mnoho problémů a situací kolem nás je možné popsat pomocí grafů, které modelují vztahy mezi objekty. Grafy mají své využití v různorodých oblastech – logistika, počítačové sítě, doprava i biologie. Součástí matematiky je také matematická optimalizace, která má za cíl nalézt nejlepší řešení. Mnoho problémů z teorie grafů je možné formulovat jako úlohy matematické optimalizace. Při rozhodování v situacích, ve kterých neznáme všechny okolnosti, nám pomáhá pravděpodobnost a statistika. V reálných situacích se musíme rozhodovat bez jistoty, protože neznáme všechny informace. Některé informace můžou být dostupné až po našem rozhodnutí. Pokud přidáme do modelu matematické optimalizace neurčitost, získáme úlohu stochastického programování. Práce představuje čtenáři základní pojmy z teorie grafů, matematické optimalizace, pravděpodobnosti a statistiky. Dále seznamuje čtenáře se stochastickým programováním, přístupy, jak problémy s neurčitostí řešit, a hodnotami, které slouží k porovnání výsledků z jednotlivých modelů. Práce uvádí čtenáře do problematiky jednotlivých přístupů pomocí ilustrativních příkladů s názornými obrázky a podrobnými kroky jednotlivých přístupů. Součástí práce jsou kódy v jazyce Python, které dané příklady řeší.

Klíčová slova: matematická optimalizace, matematické programování, teorie grafů, neurčitost, stochastické programování, jednostupňová stochastická optimalizace, problém nejkratší cesty, problém obchodního cestujícího, rozvozní problém

ABSTRACT

Many problems and situations that occur can be described using graphs, which can model the relationships between objects. Graphs are used in various fields – logistics, computer networks, transport and biology. Mathematics also includes mathematical optimization, which aims to find the best solution. Many problems from graph theory can be formulated as optimization tasks. When making decisions in situations where we do not know all the circumstances, probability and statistics help us. In real situations, we need to make decisions without certainty because we do not have all the information. Some information may not be available until our decision. If we add uncertainty to the optimization task, we get a stochastic programming problem. The paper makes the reader familiar with the basic concepts of graph theory, mathematical optimization, probability and statistics. Stochastic programming, approaches to solving tasks with uncertainty and values used to compare results from different models are introduced. The paper presents these approaches through illustrative examples with pictures and detailed steps for each algorithm. The work includes Python codes that solve the given tasks.

Keywords: mathematical optimization, mathematical programming, graph theory, uncertainty, stochastic programming, single-stage stochastic optimization, shortest path problem, travelling salesman problem, vehicle routing problem

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu práce Ing. Dušanu Hrabcovi, Ph.D. za vedení, cenné rady a veškerou pomoc při tvorbě práce.

OBSAH

ÚVOD	15
1 MATEMATICKÁ OPTIMALIZACE	17
1.1 OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHA	17
1.2 ŘEŠENÍ ÚLOH MATEMATICKÉ OPTIMALIZACE	17
1.3 DĚLENÍ ÚLOH MATEMATICKÉ OPTIMALIZACE	18
1.3.1 Kombinatorická optimalizace	18
1.3.2 Spojitá optimalizace	18
1.3.3 Deterministická a stochastická optimalizace	19
1.4 APLIKACE MATEMATICKÉ OPTIMALIZACE	19
1.5 PARAMETRICKÉ PROGRAMOVÁNÍ	19
1.6 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ	20
1.6.1 Úloha lineárního programování	21
1.6.2 Řešení úloh lineárního programování	22
2 TEORIE GRAFŮ	23
2.1 GRAF	23
2.2 TOKY V SÍTÍCH	23
2.3 PROBLÉM NEJKRATŠÍ CESTY	24
2.3.1 Definice problému nejkratší cesty	25
2.3.2 Formulace pomocí lineárního programování	25
2.3.3 Řešení problému nejkratší cesty	26
2.4 PROBLÉM OBCHODNÍHO CESTUJÍCÍHO	27
2.4.1 Definice problému obchodního cestujícího	27
2.4.2 Formulace pomocí lineárního programování	27
2.4.3 Řešení problému obchodního cestujícího	28
2.5 ROZVOZNÍ PROBLÉM	30
2.5.1 Definice rozvozní úlohy	30
2.5.2 Formulace pomocí lineárního programování	31
3 PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA	33

3.1	PRAVDĚPODOBNOST	33
3.1.1	Kolmogorovy axiomy pravděpodobnosti	33
3.1.2	Klasická definice pravděpodobnosti	34
3.1.3	Statistická definice pravděpodobnosti	35
3.2	STATISTIKA	35
3.2.1	Rozdělení pravděpodobnosti	36
3.2.2	Distribuční funkce	36
3.2.3	Hustota pravděpodobnosti.....	37
3.2.4	Pravděpodobnostní funkce	37
3.2.5	Alternativní rozdělení pravděpodobnosti	38
3.2.6	Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti	39
3.2.7	Charakteristiky náhodných veličin	40
4	STOCHASTICKÉ PROGRAMOVÁNÍ	42
4.1	OBEČNÁ ÚLOHA STOCHASTICKÉ OPTIMALIZACE	42
4.2	DETERMINISTICKÉ EKVIVALENTY.....	43
4.2.1	Přístup <i>wait-and-see</i> aneb počkáme a uvidíme	44
4.2.2	Přístup <i>here-and-now</i> aneb tady a teď'	45
4.2.3	Hodnota stochastického řešení	47
4.2.4	Očekávaná hodnota perfektní informace.....	48
4.2.5	Porovnání deterministických ekvivalentů.....	49
4.3	ROZHODOVÁNÍ A FÁZE	49
5	JEDNOSTUPŇOVÁ STOCHASTICKÁ OPTIMALIZACE	50
5.1	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA 01: MINIMALIZACE HODNOTY VÝRAZU.....	50
5.1.1	Přístup <i>wait-and-see</i>	51
5.1.2	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty	52
5.1.3	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty účelové funkce 01	54
5.1.4	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty účelové funkce 02.....	55
5.1.5	Hodnota VSS a EVPI	56
5.1.6	Diskuze dosažených výsledků.....	56
5.2	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA 02: MAXIMALIZACE ZISKU	57
5.2.1	Přístup <i>wait-and-see</i>	61

5.2.2	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty	62
5.2.3	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty účelové funkce.....	64
5.2.4	Hodnota VSS a EVPI	65
5.2.5	Diskuze dosažených výsledků.....	66
5.3	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA 03: PROBLÉM NEJKRATŠÍ CESTY	67
5.3.1	Přístup <i>wait-and-see</i>	68
5.3.2	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty	69
5.3.3	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty účelové funkce.....	71
5.3.4	Hodnota VSS a EVPI	71
5.3.5	Diskuze dosažených výsledků.....	72
5.4	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA 04: ROZVOZNÍ ÚLOHA.....	72
5.4.1	Přístup <i>wait-and-see</i>	73
5.4.2	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty	75
5.4.3	Diskuze dosažených výsledků.....	77
5.5	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA 05: ROZVOZNÍ ÚLOHA.....	77
5.5.1	Přístup <i>wait-and-see</i>	78
5.5.2	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty	80
5.5.3	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí hodnoty modus	82
5.5.4	Diskuze dosažených výsledků.....	84
6	STOCHASTICKÁ OPTIMALIZACE V KYBERBEZPEČNOSTI	85
6.1	ILUSTRATIVNÍ ÚLOHA 06: MESH TOPOLOGIE	85
6.1.1	Přístup <i>wait-and-see</i>	87
6.1.2	Přístup <i>here-and-now</i> pomocí střední hodnoty účelové funkce.....	89
6.1.3	Hodnota EVPI	91
6.1.4	Diskuze dosažených výsledků.....	91
	ZÁVĚR.....	92
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	95
	SEZNAM OBRÁZKŮ	99
	SEZNAM TABULEK	102
	SEZNAM PŘÍLOH.....	103

ÚVOD

Matematická optimalizace je součástí matematiky, která má dlouholetou historii. Jejím cílem je nalezení nejlepšího prvku vzhledem k zadaným kritériím. Mnoho problémů a situací kolem nás je možné vyřešit tím, že najdeme ten nejlepší prvek. Proto má matematická optimalizace široké uplatnění v různých oblastech.

Další matematickou disciplínou s širokým uplatněním je teorie grafů. S využitím grafů dokážeme modelovat různé situace, které nás obklopují. Grafy mají své využití v různých oblastech – logistika, počítačové sítě, doprava i biologie.

Mnoho problémů z oblasti teorie grafů je možné formulovat jako úlohu matematické optimalizace, např. pomocí lineárního programování, které je nedílnou součástí matematické optimalizace. Typickými příklady teorie grafů a matematické optimalizace jsou nejkratší cesty, problém obchodního cestujícího a rozvozní problémy.

Pravděpodobnost a statistika jsou obory, které nám pomáhají s rozhodováním v situacích, ve kterých neznáme všechny okolnosti, a také nám umožňují popisovat reálné systémy.

V reálných situacích musíme činit některá rozhodnutí bez jistoty, jelikož některé informace můžou být dostupné až po našem rozhodnutí, např. jaké bude zítra počasí. Po přidání této neurčitosti do modelu matematické optimalizace získáme úlohu stochastického programování. V takové úloze máme náhodné proměnné, které jsou popsány pomocí pravděpodobnostních a statistických charakteristik.

V práci definujeme základní pojmy z oblasti teorie grafů, matematické optimalizace, pravděpodobnosti a statistiky. Dále představíme základní grafové problémy související s dopravou – problém nejkratší cesty, problém obchodního cestujícího a rozvozní problém.

Cílem práce je seznámit čtenáře se stochastickým programováním a metodami, jak problémy s neurčitostí řešit. V práci definujeme základní přístupy pro řešení úloh – *wait-and-see* a *here-and-now*. Aplikace přístupu *wait-and-see* spočívá v čekání na realizaci náhodných proměnných. Přístup *here-and-now* spočívá v učinění rozhodnutí před realizací náhodných proměnných. V modelech *here-and-now* se využívají charakteristiky náhodných veličin, např. střední hodnota, rozptyl a modus.

Kromě přístupů k řešení problémů zmiňujeme hodnoty, které slouží k porovnání výsledků z jednotlivých modelů. Jde o očekávaný výsledek při použití přístupu *here-and-now*

se střední hodnotou (**EEV**), hodnotu stochastického řešení (**VSS**) a hodnotu perfektní informace (**EVPI**)

Dalším cílem je podrobně demonstrovat jednotlivé přístupy na ilustrativních příkladech. U každého příkladu názorně a podrobně popisujeme postup jednotlivých přístupů. Dále jednotlivá řešení porovnáme pomocí hodnot **EEV**, **VSS** a **EVPI** a na základě dosažených výsledků zhodnotíme jednotlivé přístupy. Součástí příkladů jsou také zdrojové kódy v jazyce Python, které dané úlohy řeší.

1 MATEMATICKÁ OPTIMALIZACE

Matematická optimalizace je odvětvím aplikované matematiky, které má za cíl vybrat z množiny všech (tzv. přípustných) řešení to nejlepší vzhledem ke vstupním kritériím.

1.1 Optimalizační úloha

Optimalizační úloha je definována následovně:

Definice 1.1.1 *Necht' je dána množina $M \subset \mathbb{R}^n$ a reálná funkce f definovaná na M . Cílem optimalizační úlohy je nalézt vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in M$, pokud takový vektor $\mathbf{x}$ existuje, aby hodnota $f(\mathbf{x})$ byla minimální, resp. maximální. [1, str. 7]*

Funkce f se nazývá účelová funkce a množina M se nazývá množina přípustných řešení [1, str. 7]. Obecnou optimalizační úlohu potom zapisujeme ve tvaru (obdobně pro maximalizaci):

minimalizovat:

$$f(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

za podmínek:

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{x} \in M,$$

kde funkce f je obecně nelineární účelová funkce, funkce g_i jsou omezující podmínky ve tvaru nerovností a funkce h_i jsou omezující podmínky ve tvaru rovností.

1.2 Řešení úloh matematické optimalizace

Vektor $\mathbf{x} \in M$, který splňuje všechna omezení, se nazývá přípustné řešení zadaného problému. Všechna přípustná řešení dané úlohy tvoří množinu přípustných řešení, kterou v práci značíme $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in M \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m \wedge h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, l\}.$$

Optimálním řešením $\mathbf{x}^*$ je přípustné řešení, které minimalizuje (případně maximalizuje) účelovou funkci. Pro optimální řešení $\mathbf{x}^*$ tedy platí:

$$\mathbf{x}^* \in \mathcal{M} : \quad f(\mathbf{x}^*) = \min f(\mathbf{x}),$$
$$\text{případně } f(\mathbf{x}^*) = \max f(\mathbf{x}).$$

1.3 Dělení úloh matematické optimalizace

Optimalizační úlohy můžeme rozdělit na kombinatorické a spojité optimalizace a variační počet. Pro kombinatorickou optimalizaci platí, že množina M je konečná, pro spojitou optimalizaci platí, že množina M obsahuje reálná čísla, nebo vektory, pro variační počet platí, že množina M obsahuje funkce.

Matematickou optimalizaci dále dělíme podle výskytu náhodných parametrů na deterministickou a stochastickou, podle počtu rozhodovacích fází na jednostupňovou, dvoustupňovou a vícestupňovou.

1.3.1 Kombinatorická optimalizace

Kombinatorická optimalizace hledá optimální řešení v konečné množině přípustných řešení a pracuje s diskrétními proměnnými, proto je občas nazývána diskrétní optimalizace. Typickými problémy kombinatorické optimalizace jsou úlohy z teorie grafů, např. problém obchodního cestujícího, problém nejkratší cesty, rozvozní problém. Kombinatorické optimalizaci se věnuje kniha [2].

Pro řešení některých problémů kombinatorické optimalizace existují polynomiální exaktní algoritmy, např. Dijkstrův algoritmus a algoritmus Bellmana Forda pro problém nejkratší cesty. Jiné problémy není možné vyřešit v reálném čase (řadí se do NP těžkých problémů), proto se na ně aplikují aproximační algoritmy s využitím heuristik (např. problém obchodního cestujícího, rozvozní problém).

1.3.2 Spojitá optimalizace

V úlohách spojité optimalizace je množina přípustných řešení nespočetná. Proměnné nabývají hodnot ze spojitého rozsahu, např. z oboru reálných čísel.

V úlohách spojité optimalizace je cílem najít minimum, případně maximum reálné funkce. Jedná se o tzv. globální minimum, případně globální maximum funkce. Díky spojitosti funkce je možné k hledání globálního minima, případně maxima využít techniky matematické analýzy.

1.3.3 Deterministická a stochastická optimalizace

Podle výskytu náhodných prvků v optimalizační úloze dělíme matematickou optimalizaci na deterministickou a stochastickou. V úlohách deterministické matematické optimalizace jsou všechny hodnoty a parametry předem známe a nemá zde roli náhoda. Pokud optimalizační úloha závisí na náhodě, obsahuje proměnné, jejichž hodnoty neznáme předem s určitostí, ale známe jejich pravděpodobnostní a statistické charakteristiky, jedná se o stochastickou matematickou optimalizaci.

1.4 Aplikace matematické optimalizace

Jak už slovo optimalizace napovídá, cílem je najít „nejlepší“ možné přípustné (tzv. optimální) řešení, které pro danou úlohu dosahuje nejvyšší (resp. nejnižší) hodnoty účelové funkce. Slovo nejlepší se pro různé úlohy liší, jelikož matematická optimalizace je nástroj s uplatněním v mnoha oblastech:

- logistika: optimalizace nákladů na dopravu (co nejkratší čas na rozvoz, snížení nákladů na pohonné hmoty), distribuce produktů, plánování svozu odpadu,
- ekonomie: maximalizace zisku,
- plánování: vytváření školních rozvrhů, plánování výrobních kroků,
- doprava: algoritmy v navigaci (GPS), hledání nejkratší/nejrychlejší cesty,
- routing: návrh počítačových sítí, směrovací protokoly (OSPF – stanovení nejkratších cest).

1.5 Parametrické programování

Vstupní hodnoty modelu úlohy matematické optimalizace se mohou v některých případech měnit v závislosti na určitém parametru, např. v čase. Příkladem proměnlivých vstupních

hodnot v čase t jsou cena (pokles a růst ceny), poptávka (výkyvy v poptávce) a dostupnost surovin (výkyvy v dodávkách). Zavedení parametru do modelu nám pomůže vysvětlit chování úlohy pro různá vstupní data. [3]

Parametrické programování se také označuje jako deterministické programování. Všechny parametry a koeficienty v optimalizační úloze jsou určeny a známe.

Rozšířením obecné úlohy matematické optimalizace (1.1) je potom úloha parametrického programování, ve které se vyskytuje deterministický parametr. Deterministický parametr značíme $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, prostor všech možných hodnot parametru značíme Λ a platí pro něj, že $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$. Obecnou úlohu parametrického programování potom zapisujeme (analogicky pro maximalizaci):

minimalizovat:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{1.2}$$

za podmínek:

$$g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{x} \in M,$$

$$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda,$$

kde f , g_i a h_i jsou funkce typu $M \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$.

1.6 Lineární programování

Součástí matematické optimalizace je lineární programování (anglicky *linear programming*, zkráceně LP), občas nazývané lineární optimalizace. Neformálně řečeno, cílem lineárního programování je dosáhnout nejlepšího výsledku vzhledem k zadaným požadavkům, které jsou popsány lineárními funkcemi.

1.6.1 Úloha lineárního programování

Úlohou lineárního programování je minimalizace, případně maximalizace účelové funkce za daných omezujících podmínek. Účelová funkce je lineární funkce a omezující podmínky jsou ve tvaru lineárních rovnic a nerovnic. Lineární účelová funkce je ve tvaru:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_ix_i,$$

kde $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou tzv. cenové koeficienty a $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jsou proměnné. [4, str. 850–851]

Obecnou úlohu lineárního programování můžeme zapsat následovně (analogicky pro maximalizaci):

minimalizovat:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.3)$$

za podmínek:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \leq b_1 \quad (1.4)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n < b_2 \quad (1.5)$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \dots + a_{3,n}x_n \geq b_3 \quad (1.6)$$

$\vdots$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n > b_m \quad (1.7)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.8)$$

Funkce (1.3) (a její zkrácený tvar (1.9)) se nazývá účelová funkce. Podmínky (1.4) až (1.8) se nazývají omezující podmínky. Z nich podmínky (1.4) až (1.7) jsou vlastní omezení a podmínky (1.8) jsou podmínky nezápornosti.

Výše zmíněnou úlohu pro nerovnosti $\leq$ můžeme zapsat zkráceně ve tvaru (analogicky pro maximalizaci):

minimalizovat:

$$f = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (1.9)$$

za podmínek:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

1.6.2 Řešení úloh lineárního programování

Přípustným řešením úlohy lineárního programování je každé řešení soustavy nerovnic, která určuje omezující podmínky dané úlohy. Jinými slovy, vektor $\mathbf{x}$ je přípustným řešením, pokud vyhovuje nerovnostem (1.4) až (1.8).

Optimálním řešením úlohy lineárního programování je takové přípustné řešení, při kterém účelová funkce f nabývá při maximalizaci maximální hodnoty a při minimalizaci minimální hodnoty. Tato maximální (resp. minimální) hodnota se nazývá optimální hodnota.

2 TEORIE GRAFŮ

Kapitola slouží k vymezení základních pojmů a definic z oblasti teorie grafů, se kterými budeme v práci pracovat a které jsou v práci použity. Celá kapitola vychází z práce [5], která se věnuje základním grafovým a optimalizačním problémům.

2.1 Graf

Neformálně řečeno se graf G skládá z vrcholů (uzlů) a hran, které propojují dvojici vrcholů. Pomocí grafů dokážeme reprezentovat vztahy mezi objekty a využívají se jako modely řešených problémů a situací. Formálně definujeme neorientovaný graf následovně:

Definice 2.1.1 *Graf (jednoduchý neorientovaný) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran. Množina E je množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny V , tj. $E \subseteq V^2$. [6, str. 1]*

Na množinu vrcholů grafu G se odkazujeme pomocí $V(G)$ a na množinu hran grafu G pomocí $E(G)$. Grafy se často pro lepší představivost zadávají zakresleným obrázkem, formálně výčtem vrcholů a hran.

Hrana grafu je buď orientovaná, nebo neorientovaná. U orientovaných hran rozlišujeme počáteční a koncový vrchol. U neorientovaných hran se jedná o symetrické spojení dvou vrcholů (nerozlišujeme počáteční a koncový vrchol).

Při praktických úlohách, kdy modelujeme určitou situaci, je občas nutné mít hrany grafu popsané. Tento popis může vyjadřovat cenu, délku, vzdálenost, obecně dodatečnou informaci. Z tohoto důvodu jsou zavedeny ohodnocené grafy.

Definice 2.1.2 *Ohodnocený graf (G, w) je graf G s reálnou funkcí $w : E(G) \rightarrow (-\infty; +\infty)$. Hodnota $w(e)$ pro $e \in E(G)$ se nazývá ohodnocení nebo váha hrany. [7, str. 72]*

2.2 Toky v sítích

Praktickým využitím orientovaných grafů jsou tzv. toky v sítích. Struktura sítě je postavena na ohodnoceném orientovaném grafu. Jednotlivé vrcholy grafu jsou uzly sítě a hrany grafu jsou spojnice mezi uzly. [6, str. 61]

Vrcholy grafu se rozdělují na zdroj, stok a vnitřní uzly. Zdroj je vrchol, ze kterého proudí tok do sítě, stok je vrchol, kde se tok sítě setkává, ostatní vrcholy jsou vnitřní uzly. Hrany grafu jsou ohodnoceny tokem a kapacitou, viz definice 2.2.1 a 2.2.2. [6, str. 61][7, str. 127]

Definice 2.2.1 *Sít' S je čtveřice $S = (G, z, s, c)$, kde G je orientovaný graf, vrchol $z \in V(G)$ je zdroj, vrchol $s \in V(G)$ je stok, c je funkce kladného ohodnocení hran, zvaná kapacita hran: $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$. [6, str. 61]*

Definice 2.2.2 *Tok v síti $S = (G, z, s, c)$ je funkce $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ splňující následující podmínky:*

- $\forall e \in E(G) : 0 \leq f(e) \leq c(e)$,
- $\forall v \in V(G), v \neq z, s : \sum_{e \rightarrow v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$. [6, str. 62]

První bod definice 2.2.2 nám říká, že tok hranou je nezáporný a nemůže být větší než její kapacita. Druhý bod se nazývá zákon zachování toku, tzn. ve vrcholech se tok neztrácí a to, co do vrcholu přiteče, z něj musí také odtéci.

Velikost toku f se značí $|f|$ a získáme ji jako součet toků ze zdroje, tedy je dána výrazem [6, str. 62]:

$$|f| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \rightarrow z} f(e).$$

Každá hrana $e \in E(G)$ v orientovaném grafu G tvořící sít' S má kromě toku $f(e)$ a kapacity $c(e)$ také hodnotu $w(e)$, která udává cenu za jednotku toku. Cena toku z vrcholu u do vrcholu v s tím, že hrana $(u, v) \in E(G)$, je rovna [4, str. 861]:

$$f((u, v)) \cdot w((u, v)).$$

Problém minimální ceny toku ze zdroje do stoku v grafu je potom definován následovně:

Definice 2.2.3 *Mějme sít' $S = (G, z, s, c)$ a funkci ceny za jednotku toku $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Problém minimální ceny toku spočívá v nalezení toku f o minimální ceně ze zdroje z do stoku s . [4, str. 861–862]*

2.3 Problém nejkratší cesty

Mezi často aplikované úlohy matematické optimalizace z oblasti teorie grafů se řadí úlohy zabývající se nejkratšími cestami.

Problém nejkratší cesty je definovaný pro orientované i neorientované, ohodnocené i neohodnocené grafy. Neformálně řečeno, jedná se o problém nalezení nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy v daném grafu.

Existuje více variant problému nejkratší cesty, my se v práci zabýváme problémem nejkratší cesty mezi danou dvojicí vrcholů (anglicky *single-pair shortest path*).

2.3.1 Definice problému nejkratší cesty

Mějme graf $G = (V, E)$ (v případě ohodnoceného grafu je definována i váhová funkce w). Délka nejkratší cesty z vrcholu $u \in V(G)$ do vrcholu $v \in V(G)$ se značí $\delta(u, v)$ a je definována [4, str. 643]:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{|P| \mid P \text{ je cesta z } u \text{ do } v\} & \text{když } v \text{ je dosažitelný z } u, \\ \infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nejkratší cesta z u do v je libovolná cesta P taková, že $|P| = \delta(u, v)$.

Problém nejkratší cesty mezi danou dvojicí vrcholů v grafu je definován následovně:

Definice 2.3.1 Mějme graf $G = (V, E)$. Problém nejkratší cesty mezi danou dvojicí vrcholů $u, v \in V(G)$ spočívá v nalezení nejkratší cesty z vrcholu u do vrcholu v . [4, str. 644]

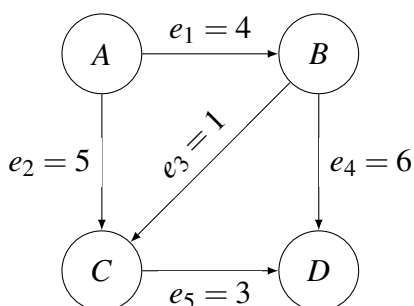
2.3.2 Formulace pomocí lineárního programování

Problém nejkratší cesty je speciálním případem problému minimální ceny toku (viz 2.2.3). Mějme graf $G(V, E)$, kapacita všech hran $e \in E(G)$ je nastavena na hodnotu $c(e) = +\infty$ a velikost toku v síti je $|f| = 1$ pro jednu cestu (ze zdroje se vysílá pouze jedna jednotka toku). Ohodnocení hran w zůstává stejné. Cena toku ze zdroje z do stoku s v grafu G je pak rovna součtu cen $w(e)$ jednotlivých hran $e \in E(G)$.

Problém nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy v grafu můžeme popsat následujícím matematickým modelem pomocí lineárního programování [8, str. 123]:

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat: } & \sum_{(u,v) \in E(G)} w((u,v)) \cdot f((u,v)) \\ \text{za podmíněk: } & \sum_{v \in V(G)} f((u,v)) - \sum_{v \in V(G)} f((v,u)) = \begin{cases} 1 & u = z \\ 0 & \text{jinak} \\ -1 & u = s \end{cases} \\ & f((u,v)) \geq 0 \quad \forall (u,v) \in E(G) \end{aligned}$$

Příklad 2.3.1 Máme orientovaný graf G znázorněný níže na obrázku 2.1. Naším úkolem je sestavit matematický model (účelovou funkci a omezující podmínky) pro nalezení nejkratší cesty z vrcholu A do vrcholu D .



Obrázek 2.1 Orientovaný graf G k příkladu nejkratší cesty 2.3.1.

$$\text{minimalizovat: } z = 4 \cdot f(e_1) + 5 \cdot f(e_2) + 1 \cdot f(e_3) + 6 \cdot f(e_4) + 3 \cdot f(e_5)$$

$$\text{za podmíněk: } f(e_1) + f(e_2) = 1$$

$$f(e_3) + f(e_4) - f(e_1) = 0$$

$$f(e_5) - f(e_2) - f(e_3) = 0$$

$$-f(e_4) - f(e_5) = -1$$

$$f(e) \geq 0 \quad \forall e \in E(G)$$

2.3.3 Řešení problému nejkratší cesty

Mezi základní algoritmy pro řešení problému nejkratší cesty řadíme Dijkstrův algoritmus, algoritmus Bellmana Forda, heuristický algoritmus A^* a Floyd-Warshallův algoritmus. Prvním třem se podrobněji věnuje práce [5, str. 58–69].

2.4 Problém obchodního cestujícího

Dalším problémem kombinatorické optimalizace je problém obchodního cestujícího (anglicky *travelling salesman problem*, zkráceně a dále TSP). Problém obchodního cestujícího má své využití např. v logistice a plánování dopravy.

2.4.1 Definice problému obchodního cestujícího

Neformálně je TSP definován následovně:

Definice 2.4.1 *Je dána množina měst a vzdálenosti mezi jednotlivými městy. Úkolem obchodního cestujícího je projít všemi městy a vrátit se do výchozího města s minimálními náklady (tzn. nejkratší možnou trasou) s tím, že každé město musí navštívit přesně jednou.* [9, str. 1][10, str. 1]

Formální definice problému obchodního cestujícího za využití teorie grafů je následující:

Definice 2.4.2 *Mějme graf $G = (V, E)$, ohodnocení (váhy) hran w a množinu F obsahující všechny hamiltonovské kružnice grafu G . Cílem je najít hamiltonovskou kružnici takovou, že suma ohodnocení všech jejích hran je co nejmenší.* [9, str. 3] *Jde o nalezení nejkratší hamiltonovské kružnice v daném grafu.* [11, str. 200]

2.4.2 Formulace pomocí lineárního programování

TSP lze formulovat pomocí lineárního programování. Ke každé dvojici vrcholů (i, j) je přiřazena hodnota $c_{i,j}$, která značí cenu mezi i a j (jako ohodnocovací funkce), a hodnota $x_{i,j} \in \{0, 1\}$ s tím, že hodnota 1 značí, že mezi vrcholy i, j vede cesta obchodního cestujícího, hodnota 0 značí opačný případ. Potom požadujeme minimalizovat výraz $\sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|V|} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$, což je účelová funkce matematického modelu.

K modelování TSP problému využijeme tzv. Miller-Tucker-Zemlin formulaci (zkráceně a dále MTZ). Jelikož tato práce nemá za cíl detailně rozebírat jednotlivé modely lineárního programování, využijeme MTZ model podrobně popsany v práci [5, str. 76–79] a [12]. Základním prvkem MTZ je nová proměnná u_i pro každý vrchol $i \in V(G)$, která nese informaci o tom, o kolikátý navštívený vrchol se jedná (další podmínky pro zamezení vzniku dílčích okruhů).

Úplný matematický model vypadá následovně [5, str. 79]:

$$\text{minimalizovat: } \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|V|} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

$$\text{za podmíněk: } \sum_{i=1, i \neq j}^{|V|} x_{i,j} = 1, \quad j = 1, \dots, |V| \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{|V|} x_{i,j} = 1, \quad i = 1, \dots, |V| \quad (2.2)$$

$$u_s = 1$$

$$2 \leq u_i \leq n, \quad i \in V(G) \setminus \{s\}$$

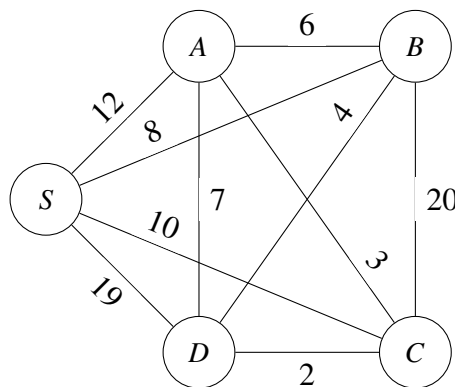
$$u_i - u_j + 1 \leq n \cdot (1 - x_{i,j}), \quad (i, j) \in E(G) : i \neq s, j \neq s$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, |V|$$

2.4.3 Řešení problému obchodního cestujícího

Naivními přístupy k řešení TSP jsou brute force algoritmus a prohledávání do hloubky. Další možností je upravit prohledávání do hloubky tak, aby neprocházelo všechny hamiltonovské kružnice v grafu, ale pouze ty, které mají šanci se stát kratší kružnicí než ta současně nejkratší hamiltonovská kružnice. Dalším přístupem je využití dynamického programování, konkrétně algoritmu Bellman-Held-Karp, dále algoritmu větví a mezí (anglicky *branch and bound*). [13]

Příklad 2.4.1 Máme neorientovaný graf G znázorněný níže na obrázku 2.2. Naším úkolem je sestavit matematický model (účelovou funkci a omezující podmínky) pro vyřešení problému TSP z vrcholu S .



Obrázek 2.2 Neorientovaný graf G k TSP příkladu 2.4.1.

minimalizovat: $z = 12 \cdot x_{S,A} + 8 \cdot x_{S,B} + 10 \cdot x_{S,C} + 19 \cdot x_{S,D} +$
 $+ 12 \cdot x_{A,S} + 6 \cdot x_{A,B} + 3 \cdot x_{A,C} + 7 \cdot x_{A,D} +$
 $+ 8 \cdot x_{B,S} + 6 \cdot x_{B,A} + 20 \cdot x_{B,C} + 4 \cdot x_{B,D} +$
 $+ 10 \cdot x_{C,S} + 3 \cdot x_{C,A} + 20 \cdot x_{C,B} + 2 \cdot x_{C,D} +$
 $+ 19 \cdot x_{D,S} + 7 \cdot x_{D,A} + 4 \cdot x_{D,B} + 2 \cdot x_{D,C}$

za podmínek: *výstupní podmínky:*

$$\begin{aligned} x_{S,A} + x_{S,B} + x_{S,C} + x_{S,D} &= 1 \\ x_{A,S} + x_{A,B} + x_{A,C} + x_{A,D} &= 1 \\ x_{B,S} + x_{B,A} + x_{B,C} + x_{B,D} &= 1 \\ x_{C,S} + x_{C,A} + x_{C,B} + x_{C,D} &= 1 \\ x_{D,S} + x_{D,A} + x_{D,B} + x_{D,C} &= 1 \end{aligned}$$

vstupní podmínky:

$$\begin{aligned} x_{A,S} + x_{B,S} + x_{C,S} + x_{D,S} &= 1 \\ x_{S,A} + x_{B,A} + x_{C,A} + x_{D,A} &= 1 \\ x_{S,B} + x_{A,B} + x_{C,B} + x_{D,B} &= 1 \\ x_{S,C} + x_{A,C} + x_{B,C} + x_{D,C} &= 1 \\ x_{S,D} + x_{A,D} + x_{B,D} + x_{C,D} &= 1 \end{aligned}$$

podmínky pro eliminaci dílčích kružnic pomocí MTZ formulace:

$$\begin{aligned} u_A - u_B + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{A,B}) \\ u_B - u_A + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{B,A}) \\ u_A - u_C + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{A,C}) \\ u_C - u_A + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{C,A}) \\ u_A - u_D + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{A,D}) \\ u_D - u_A + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{D,A}) \\ u_B - u_C + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{B,C}) \\ u_C - u_B + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{C,B}) \\ u_B - u_D + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{B,D}) \\ u_D - u_B + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{D,B}) \\ u_C - u_D + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{C,D}) \\ u_D - u_C + 1 &\leq 5 \cdot (1 - x_{D,C}) \\ 2 &\leq u_A \leq 5 \\ 2 &\leq u_B \leq 5 \\ 2 &\leq u_C \leq 5 \\ 2 &\leq u_D \leq 5 \end{aligned}$$

výběr hran v grafu:

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, i, j = S, A, \dots, D$$

2.5 Rozvozní problém

Složitějším problémem kombinatorické optimalizace jsou rozvozní úlohy, anglicky *Vehicle Routing Problems*, zkráceně a dále VRP. U okružních úloh, jako je např. TSP, mají navštívená místa nulové požadavky (na místo není potřeba nic doručit ani z něj nic vyzvednout). Pokud ale zákazník požaduje např. dodání zboží nebo chce nějaké zboží odeslat přes distribuční centrum, je nutné úlohu transformovat na tzv. rozvozní úlohu. Název rozvozní úlohy v sobě zahrnuje úlohu pro rozvoz i svoz v obecném slova smyslu.

Problém obchodního cestujícího je základem dopravních úloh. Pro reálné využití je potřeba rozvážet na více trasách a často také využívat více vozidel, proto zavádíme rozvozní úlohy.

2.5.1 Definice rozvozní úlohy

Existuje mnoho variant rozvozních úloh s různými omezujícími podmínkami. Mezi základní omezení patří:

- počet vozidel – k dispozici je pouze omezený počet vozidel,
- kapacita vozidel – vozidla mají omezený objem, případně jinou veličinu, která určuje, kolik zboží dokáže přepravit/pojmout,
- počet distribučních center/dep – jedno, nebo více,
- typ poptávky – zda jde o doručení, sběr nebo o smíšenou poptávku, zda je poptávka deterministická, nebo stochastická,
- časová okna zákazníků – časy, ve kterých je možné zákazníky obsloužit,
- délka trasy – omezení na délku trasy pro jednotlivá vozidla,
- doba trvání trasy – maximální čas pro realizaci jedné trasy (např. z důvodu pracovní doby řidičů). [14, str. 250]

V této práci se zaměříme na rozvozní úlohy s jedním vozidlem a jedním distribučním místem, což patří mezi nejjednodušší úlohy plánování rozvozu.

Problém plánování rozvozu s jedním vozidlem s omezením kapacity je definován následovně:

Definice 2.5.1 Máme k dispozici jediné vozidlo s omezenou kapacitou Q a jediné distribuční centrum (depo), kde vozidlo začíná a končí svou cestu. Dále máme n zákazníků, kteří mají požadavky na svoz o kapacitě $d_i \leq Q$.

Cílem je najít trasu, která minimalizuje náklady, např. délku trasy, náklady na přepravu a čas trasy. Zároveň musí být splněny další podmínky:

- trasa začíná i končí v depu,
- každý zákazník je navštíven právě jednou a je uspokojen jeho požadavek na svoz,
- není překročena kapacita vozidla. [14, str. 249–251][15, str. 3]

2.5.2 Formulace pomocí lineárního programování

Rozvozní problém z definice 2.5.1 je možné formulovat jako úlohu lineárního programování. Stejně jako u TSP, ke každé dvojici vrcholů (i, j) je přiřazena hodnota $c_{i,j}$, která značí cenu hrany mezi vrcholy i a j , a hodnota $x_{i,j}$, která značí výběr hrany do trasy. Potom požadujeme minimalizovat celkovou délku trasy, což je výraz $\sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|V|} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$, což je účelová funkce matematického modelu. Úplný matematický model vypadá následovně [16, str. 15–17][15, str. 4–7]:

$$\text{minimalizovat: } \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|V|} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

$$\text{za podmínek: } \sum_{i=1, i \neq j}^{|V|} x_{i,j} = 1, \quad j = 1, \dots, |V| \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{|V|} x_{i,j} = 1, \quad i = 1, \dots, |V| \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^{|V|} x_{i,0} = 1 \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^{|V|} x_{0,j} = 1 \quad (2.6)$$

$$u_j - u_i \geq d_j - Q \cdot (1 - x_{ij}) \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.7)$$

takové, že $d_i + d_j \leq Q$

$$d_i \leq u_i \leq Q, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.8)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, |V|$$

Podmínky (2.3) a (2.4) zajišťují, že ke každému klientovi přijedeme a odjedeme právě jednou. Podmínky (2.5) a (2.6) zajišťují, že do depa a z depa přijede právě jedno vozidlo (kdybychom měli k dispozici K vozidel, na pravé straně by bylo K). Podmínky (2.7) a (2.8) ve stylu MTZ formulace (viz podkapitola 2.4.2) zajišťují nepřekročení kapacity vozidla.

3 PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

Kapitola slouží k uvedení základních pojmů z teorie pravděpodobnosti a statistiky, které jsou v práci použity.

Pravděpodobnost je nástroj pro účelné rozhodování v situacích, ve kterých výsledek náhodných jevů závisí na okolnostech, které známe jen částečně. Statistika je nástroj pro hledání a ověřování pravděpodobnostního popisu reálných systémů na základě jejich pozorování. Statistika nám umožňuje hledat a ověřovat závislosti, které nejsou zjevné, a umožňuje nám zobecňovat na základě omezeného počtu vzorků. [17, str. 4]

3.1 Pravděpodobnost

Definice 3.1.1 *Náhodný pokus je takový děj, který můžeme v ideálním případě neustále opakovat a jehož výsledek není jednoznačně určen vstupními podmínkami.* [18]

Pro náhodný pokus platí, že nastane vždy pouze jeden výsledek. Množinu všech možných výsledků náhodného pokusu značíme Ω . Jednotlivé prvky $\omega \in \Omega$ nazýváme elementárními jevy. Množinu Ω potom označujeme za prostor elementárních jevů.

Jevové pole neboli jevový prostor $\mathcal{A}$ je množina všech různých podmnožin prostoru elementárních jevů Ω . [19, str. 6]

Definice 3.1.2 *Náhodný jev je výsledek náhodného pokusu. O náhodném jevu je možné rozhodnout, zda nastal, nebo nenastal. Každá podmnožina $A \subset \Omega$ je náhodný jev. Náhodný jev A je prvkem jevového pole $\mathcal{A}$.* [18][19, str. 6]

Pravděpodobnost náhodného jevu A je funkce $P(A)$, která jevu A přiřazuje míru možnosti, že nastane.

3.1.1 Kolmogorovy axiomy pravděpodobnosti

Axiomatická definice pravděpodobnosti podle Kolmogorova je následující. Mějme neprázdný prostor elementárních jevů Ω a jevové pole $\mathcal{A}$. Pravděpodobnost P je potom míra definovaná na $(\Omega, \mathcal{A})$ taková, že:

- $A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0$,
- $P(\Omega) = 1$, tzn. pravděpodobnost jistého jevu je 1,

- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \implies P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, tzn. pravděpodobnost sjednocení vzájemně se vylučujících jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností. [20, str. 12][21, str. 12]

Z uvedených axiomů vyplývá následující:

- $\forall A \in \mathcal{A} : P(A) \in \langle 0; 1 \rangle$, tzn. pravděpodobnost náhodného jevu je číslo z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$,
- $P(\emptyset) = 0$, tzn. pravděpodobnost nemožného jevu je 0,
- jestliže $A \cap B = \emptyset$, potom $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, tzn. pravděpodobnost opačného jevu je doplněk pravděpodobnosti výchozího jevu do jedné,
- jestliže $A \subseteq B$, potom $P(A) \leq P(B)$, tzn. pravděpodobnost jevu A , který je součástí jevu B , je menší než pravděpodobnost jevu B ,
- jestliže $A \subseteq B$, potom $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, tzn. pravděpodobnost rozdílu jevů B a A , kdy jev A je součástí jevu B , je rovna rozdílu pravděpodobností obou jevů. [21, str. 12–13]

3.1.2 Klasická definice pravděpodobnosti

Mějme náhodný pokus, který splňuje následující předpoklady:

- všech možných výsledků je konečný počet,
- všechny výsledky mají stejnou šanci na realizaci,
- všechny výsledky se navzájem vylučují (tzn. žádné dva nemůžou nastat současně),
- jeden z výsledků jistě nastane.

Potom pravděpodobnost jevu A je číslo $P(A) = \frac{m}{n}$, kde n je počet všech možných výsledků ($n = |\Omega|$) a m je počet výsledků příznivých jevu A ($m = |A|$). [18]

3.1.3 Statistická definice pravděpodobnosti

Opakujeme náhodný pokus n -krát. Počet pokusů, kdy nastal jev A , označme n_A . Poměr $\frac{n_A}{n}$ označujeme jako relativní četnost jevu A . Jestliže s rostoucím počtem pokusů n kolísá relativní četnost $\frac{n_A}{n}$ kolem určité hodnoty $P(A)$, označíme tuto hodnotu za pravděpodobnost daného jevu. Je-li n dostatečně velké, relativní četnost můžeme označit přímo za pravděpodobnost, s jakou nastává jev A . Potom platí, že

$$P(A) = \frac{n_A}{n}. \quad [18]$$

Definice 3.1.3 *Pravděpodobnostní prostor je uspořádaná trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. [21, str. 12]*

3.2 Statistika

Náhodnou veličinu definujeme jako číselné vyjádření výsledku náhodného pokusu. Matematicky řečeno, náhodná veličina je funkce, která přiřazuje každému elementárnímu náhodnému jevu číselnou hodnotu.

Definice 3.2.1 *Náhodná veličina je libovolná funkce, která náhodným jevům přiřazuje reálná čísla, tj: [17, str. 4]*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ X(\omega) &= x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Výraz $X(\omega) = x$ říká, že náhodná veličina X nabyla hodnoty x , tzn. že jev ω nastal. Potom $P(X = x)$ je pravděpodobnost, se kterou náhodná veličina X nabyde hodnoty x . [22, str. 2]

Podle oboru hodnot náhodné veličiny rozlišujeme náhodné veličiny diskrétní a spojité. Obor hodnot diskrétní náhodné veličiny má spočetně mnoho hodnot. Obor hodnot spojité náhodné veličiny má nespočetně mnoho hodnot (nabývá hodnot z určitého intervalu). [19, str. 24]

Poznámka 1 *Náhodné veličiny označujeme velkými písmeny z konce abecedy, např. X, Y, Z . Jejich číselné realizace potom odpovídajícími malými písmeny, např. x, y, z .*

3.2.1 Rozdělení pravděpodobnosti

Každému výsledku náhodného pokusu přísluší pravděpodobnost, se kterou nastane. Díky tomu můžeme určit, s jakou pravděpodobností náhodný jev nabývá určité výsledné hodnoty či hodnoty z určitého intervalu. Z těchto poznatků můžeme zkonstruovat model, který popisuje teoretické rozdělení pravděpodobnosti – rozdělení pravděpodobnosti představuje model chování náhodné veličiny. [23]

Rozdělení pravděpodobnosti lze popsat pomocí distribuční funkce (pro diskrétní i spojitě náhodné veličiny) a pomocí pravděpodobnostní funkce (pro diskrétní náhodné veličiny) a hustoty pravděpodobnosti (pro spojitě náhodné veličiny).

3.2.2 Distribuční funkce

Distribuční funkce popisuje rozdělení náhodné veličiny kumulativním způsobem a je společná pro diskrétní i spojitě náhodné veličiny. Distribuční funkce náhodné veličiny je popis pravděpodobnostního chování náhodné veličiny – udává pravděpodobnost, že hodnota náhodné proměnné je menší než zadaná hodnota.

Definice 3.2.2 *Necht' X je náhodná proměnná a x je libovolné reálné číslo. Potom funkci $F : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$ definovanou předpisem*

$$F(x) = P(X \leq x)$$

nazýváme distribuční funkcí. [21, str. 28]

Distribuční funkce vyjadřuje pravděpodobnost, že číselná realizace náhodné veličiny X nepřekročí na reálné ose danou hodnotu x , což lze zapsat jako [24]:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\omega_i \in \Omega : X(\omega_i) \leq x).$$

Distribuční funkce má následující vlastnosti:

- je neklesající: $\forall x_1 < x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$,
- je zprava spojitá,
- definiční obor: $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq F(x) \leq 1$,
- pravděpodobnost intervalu: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 : P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$,

- asymptotické vlastnosti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. [17, str. 10]

3.2.3 Hustota pravděpodobnosti

Chceme-li popsat rozdělení pravděpodobnosti pro určité hodnoty nebo interval hodnot, musíme definovat příslušnou funkci zvlášť pro spojité a diskrétní náhodné veličiny.

Nechť X je spojitá náhodná veličina s distribuční funkcí $F(X)$. Spojitou náhodnou veličinu X definuje funkce hustota pravděpodobnosti $f(x)$ (anglicky *density function*) [25]:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (3.1)$$

Hustota pravděpodobnosti popisuje, jakých hodnot náhodná veličina X nabývá a s jakými pravděpodobnostmi. Hodnota distribuční funkce $F(X)$ v bodě x tedy odpovídá ploše pod grafem hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ od $-\infty$ do x . Z toho vyplývá vztah (3.1), že distribuční funkci získáme integrací hustoty pravděpodobnosti od $-\infty$ do x , tzn. distribuční funkce je primitivní funkcí k hustotě pravděpodobnosti. Hustotu pravděpodobnosti f získáme derivací distribuční funkce F :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Hustota pravděpodobnosti má následující vlastnosti:

- je nezáporná: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$,
- celková plocha pod hustotou je rovna jedné: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$,
- pravděpodobnost, že X padne do nějakého intervalu, je dána plochou pod hustotou mezi krajními body intervalu: $P[X \in (a, b)] = P[a < X < b] = \int_a^b f(x) dx$,
- hustota je na intervalu (a, b) nulová právě tehdy, když X do tohoto intervalu nemůže padnout: $\forall x \in (a, b) : f(x) = 0 \iff P[a < X < b] = 0$. [22, str. 41–42]

3.2.4 Pravděpodobnostní funkce

K popisu diskrétní náhodné veličiny definujeme pravděpodobnostní funkci (anglicky *probability function*). Nechť X je diskrétní náhodná veličina s distribuční funkcí $F(X)$, potom

pravděpodobnostní funkce $p(x)$ je definována následovně [25]:

$$F(x) = \sum_{t \leq x} p(t) = \sum_{t \leq x} P(X = t).$$

Pravděpodobnostní funkce udává pravděpodobnost, že diskrétní náhodná veličina nabývá přesně nějaké hodnoty, tedy popisuje vztah [21, str. 31]:

$$p(x) = P(X = x).$$

Pravděpodobnostní funkce má následující vlastnosti:

- je nezáporná: $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) \geq 0$,
- součet pravděpodobností všech možných hodnot je roven 1: $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$. [21, str. 31]

3.2.5 Alternativní rozdělení pravděpodobnosti

Alternativní rozdělení je příkladem rozdělení diskrétní náhodné veličiny. Pro náhodnou veličinu X s alternativním rozdělením pravděpodobnosti používáme značení $X \sim A(p)$, případně $X \sim Alt(p)$.

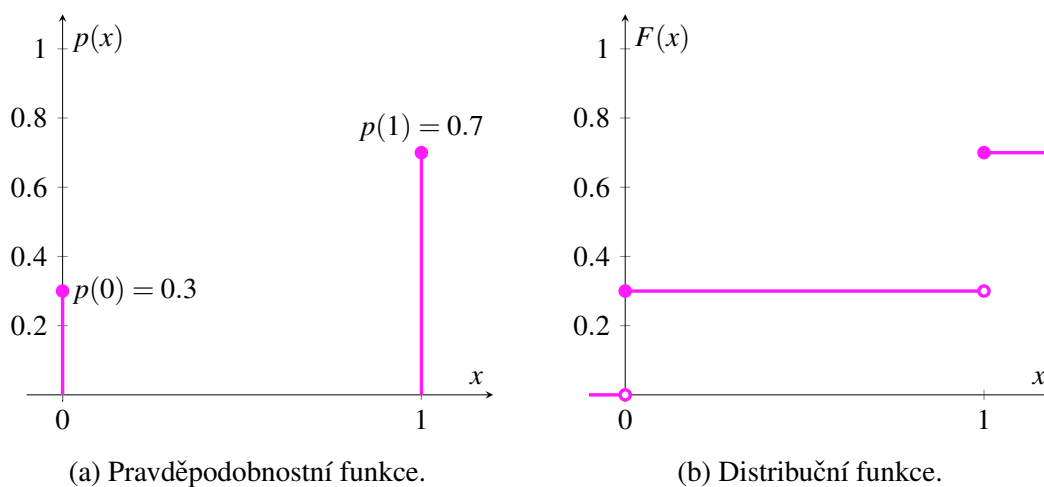
Uvažujme náhodný pokus, který může skončit s pravděpodobností p „úspěchem“ (hodnota 1) a s pravděpodobností $1 - p$ „neúspěchem“ (hodnota 0). Prostor elementárních jevů má celkem dva prvky $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{0, 1\}$. [21, str. 32]

Pravděpodobnostní funkce p alternativního rozdělení je ve tvaru, viz graf na obrázku 3.1a:

$$p(x) = \begin{cases} p & \text{pro } x = 1 \text{ (úspěch)} \\ 1 - p & \text{pro } x = 0 \text{ (neúspěch)} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Distribuční funkce F alternativního rozdělení je ve tvaru, viz graf na obrázku 3.1b:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - p & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$$



Obrázek 3.1 Pravděpodobnostní a distribuční funkce náhodné veličiny s alternativním rozdělením pravděpodobnosti s $p = 0.7$.

3.2.6 Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti

Rovnoměrné rozdělení je příkladem rozdělení spojité náhodné veličiny. Pro náhodnou veličinu X s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu (a, b) používáme značení $X \sim R(a, b)$, případně $X \sim Ro(a, b)$.

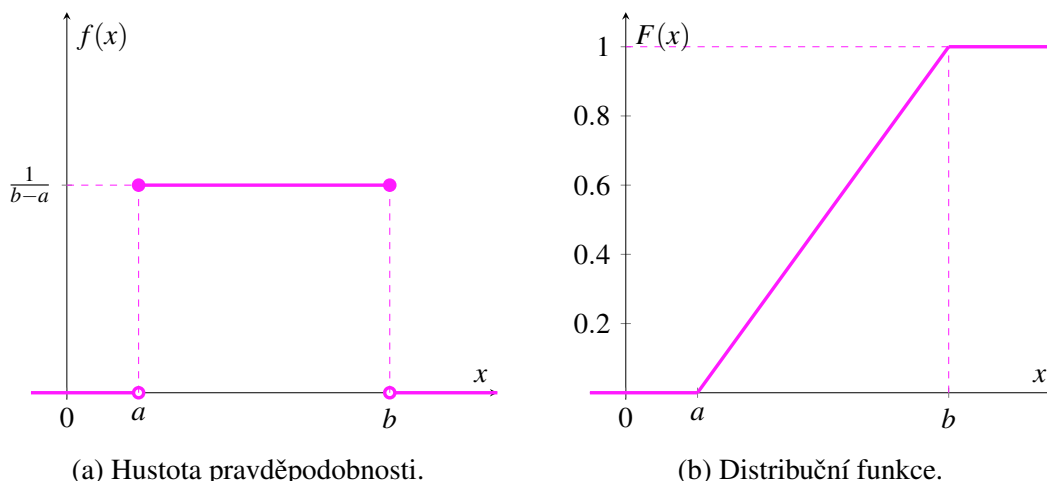
Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti přiřazuje všem hodnotám náhodné veličiny stejnou pravděpodobnost výskytu. [21, str. 36–37]

Hustota pravděpodobnosti f rovnoměrného rozdělení je ve tvaru, viz graf na obrázku 3.2a:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Distribuční funkce F rovnoměrného rozdělení je ve tvaru, viz graf na obrázku 3.2b:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b), \quad a < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$



Obrázek 3.2 Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti.

3.2.7 Charakteristiky náhodných veličin

Hustota pravděpodobnosti, pravděpodobnostní funkce a distribuční funkce náhodné veličiny poskytují její úplný popis. V některých případech jsou zmíněné informace moc podrobné, jelikož nás zajímá pouze určitý aspekt náhodné veličiny. Proto je vhodnější použít pro popis číselné charakteristiky, které náhodnou veličinu popisují jednodušeji.

Mezi číselné charakteristiky rozdělení řadíme střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, modus a medián.

Střední hodnota Střední hodnotu (občas také očekávaná hodnota) náhodné veličiny X značíme $\mathbb{E}(X)$ (z anglického *expected*).

Střední hodnota spojitě náhodné veličiny X s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ je dána předpisem

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx. \quad (3.2)$$

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $p(x)$ je dána předpisem

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i). \quad (3.3)$$

Modus Modus náhodné veličiny X značíme $Mod(X)$. Modus je hodnota, která se ve statistickém souboru vyskytuje nejčastěji.

4 STOCHASTICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Stochastické programování se využívá v mnoha odvětvích, např. doprava, logistika, řízení zásobování a plánování výroby. V těchto oblastech je nutné některá rozhodnutí činit bez jistoty – některé informace můžou být dostupné až po daném rozhodnutí. Při rozhodování se také často stává, že některé skutečnosti nejsou známy, např.:

- jaké bude zítra počasí,
- jaká bude poptávka po produktu,
- jaké budou náklady v následujících letech,
- jak dlouho bude trvat cesta mezi všemi prodejnami.

Jedním ze způsobů pro modelování problémů s neurčitostí je stochastické programování. Stochastické programování je součástí matematické optimalizace. Jde o případ optimalizace, v jejíž úloze se vyskytuje náhodná složka – náhodná proměnná. Tato náhodná proměnná je popsána pomocí pravděpodobnostních a statistických charakteristik.

Stochastické programování kombinuje metody matematické optimalizace s teorií pravděpodobnosti a statistiky. Úlohou stochastického programování je vyřešit problém, který není zadán pouze deterministicky.

4.1 Obecná úloha stochastické optimalizace

U formulace problému stochastické optimalizace vycházíme z modelu (1.2). Pokud přestane parametr λ chápát jako deterministický parametr, ale jako náhodný vektor, dostaneme úlohu s náhodným parametrem.

Mějme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodnou veličinu ξ , pro kterou platí:

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Úlohu s náhodným parametrem potom zapisujeme (analogicky pro maximalizaci) [26, str. 21]:

minimalizovat:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad (4.1)$$

za podmíněk:

$$g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{x} \in M,$$

kde $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ je vektor náhodných veličin takový, že $\boldsymbol{\xi}(\omega) : \Omega \rightarrow \Xi \subset \mathbb{R}^k$, f , g_i a h_i jsou funkce typu $M \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$. Množinu přípustných řešení označíme $\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi})$:

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\xi}) = \{\mathbf{x} \in M \mid g_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0, i = 1, \dots, m \wedge h_j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, j = 1, \dots, l\}.$$

Úlohu s náhodným parametrem také zapisujeme následovně (analogicky pro maximalizaci):

$$? \in \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{M}(\boldsymbol{\xi})\},$$

4.2 Deterministické ekvivalenty

V (4.1) jsme definovali obecnou úlohu stochastického programování. Co takto zadaná optimalizační úloha znamená? Jakmile známe realizaci vektoru náhodných veličin $\boldsymbol{\xi}$, můžeme vektor nahradit za vektor konkrétních hodnot a jedná se o úlohu deterministického (parametrického) programování.

Co když ale neznáme realizaci vektoru náhodných proměnných? I v tomto případě je potřeba najít řešení zadané úlohy. Existují dva základní přístupy – přístup *wait-and-see* (česky přístup počkáme a uvidíme) a přístup *here-and-now* (česky přístup tady a teď).

Přístup *wait-and-see* spočívá v čekání na realizaci vektoru $\boldsymbol{\xi}$ a potom úlohu vyřešíme jako úlohu deterministického programování. Nevýhodou tohoto přístupu je, že často nemůžeme čekat na zjištění realizace náhodných proměnných.

Přístup *here-and-now* spočívá v učinění rozhodnutí před zjištěním realizace vektoru ξ . I přes neznalost realizace se snažíme najít řešení, které bude v určitém smyslu „optimální“ vzhledem k neurčitosti v zadání.

Cílem této části práce je přeformulovat zadání stochastické optimalizační úlohy tak, aby nový model byl jednoznačný. Podle místa výskytu náhodné proměnné rozlišujeme tři případy: náhodná proměnná pouze v účelové funkci, náhodná proměnná pouze v omezujících podmínkách a náhodná proměnná v účelové funkci i v omezujících podmínkách. Deterministický ekvivalent obecné úlohy (4.1) získáme pomocí deterministických ekvivalentů účelové funkce a omezujících podmínek.

Poznámka 2 V následujících částech práce (pokud není napsáno jinak) pracujeme s úlohami, ve kterých je cílem minimalizovat hodnotu účelové funkce. Pro maximalizační úlohy se používá analogické značení a postupy.

4.2.1 Přístup *wait-and-see* aneb počkáme a uvidíme

Prvním přístupem, jak přeformulovat úlohu, je použít přístup *wait-and-see*. Při tomto přístupu známe realizaci vektoru ξ před naším rozhodnutím $\mathbf{x} \in M$ (máme tedy perfektní informace o budoucnosti).

Optimální řešení pomocí přístupu *wait-and-see* značíme $\mathbf{x}_{min}^{WS}$ a jeho hodnotu značíme z_{min}^{WS} .

Deterministický ekvivalent *wait-and-see* je definován následujícím způsobem:

$$? \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}(\xi)} \{f(\mathbf{x}(\xi), \xi) \mid \mathbf{x}(\xi) \in \mathcal{M}(\xi)\}, \quad (4.2)$$

ve kterém rozhodnutí $\mathbf{x}$ závisí na ξ , což je reprezentováno zápisem $\mathbf{x}(\xi)$. Rozhodnutí $\mathbf{x}$ je chápáno jako funkce $\mathbf{x}(\xi)$ náhodných proměnných $\xi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$. [27, str. 15]

Množinu všech optimálních řešení značíme X_{min}^{WS} :

$$X_{min}^{WS}(\xi) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}(\xi)} \{f(\mathbf{x}(\xi), \xi) \mid \mathbf{x}(\xi) \in \mathcal{M}(\xi)\}. \quad (4.3)$$

Hodnota optimálního řešení z_{min}^{WS} je očekávaná (střední) hodnota při dokonalé znalosti ξ :

$$z_{min}^{WS} = \mathbb{E}_{\xi} \left(\min_{\mathbf{x}(\xi)} \{f(\mathbf{x}(\xi), \xi) \mid \mathbf{x}(\xi) \in \mathcal{M}(\xi); \quad \forall \xi \in \Xi\} \right), \quad (4.4)$$

kde $\mathbb{E}_{\xi}$ je očekávaná hodnota vzhledem k náhodnému vektoru ξ (jehož realizaci při *wait-and-see* přístupu známe). [27, str. 16]

Přístup vyčkávání není možné ve většině případů aplikovat, jelikož nemáme dostatek informací o budoucnosti. Z toho důvodu se častěji využívá přístup *here-and-now* a jeho deterministické ekvivalenty.

4.2.2 Přístup *here-and-now* aneb tady a teď

Nyní si představíme několik přístupů *here-and-now*: přístup individuálních scénářů, přístup střední hodnoty a přístup střední hodnoty účelové funkce. Dále si definujeme hodnoty, které nám popisují získaná řešení z různých přístupů z hlediska jejich kvality.

Přístup individuálních scénářů (IS) Přístup individuálních scénářů je postaven na nahrazení náhodné proměnné v zadané úloze její typickou realizací ξ^s . Tuto typickou realizaci nazýváme scénářem. Tímto způsobem vytvoříme novou úlohu [27, str. 19–20]:

minimalizovat:

$$f(\mathbf{x}, \xi^s) \quad (4.5)$$

za podmínek:

$$g_i(\mathbf{x}, \xi^s) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_i(\mathbf{x}, \xi^s) = 0, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{x} \in M.$$

Optimální řešení pomocí přístupu *here-and-now* za využití individuálních scénářů značíme $\mathbf{x}_{min}^{IS}$ a jeho hodnotu značíme z_{min}^{IS} (z anglického *individual scenario*). Tento přístup je vhodný v případech, kdy dokážeme získat typickou realizaci náhodné proměnné. [27, str. 19–20]

Přístup střední hodnoty (EV) Jednoduchým způsobem, jak pracovat s náhodnou proměnnou v úloze, je využití středních hodnot jednotlivých náhodných proměnných. Abychom odstranili neurčitost ze zadání, každou náhodnou proměnnou $\xi_i \in \xi$ nahradíme její střední (očekávanou) hodnotou. Tímto způsobem vytvoříme úlohu s deterministickým parametrem:

minimalizovat:

$$f(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi)) \quad (4.6)$$

za podmínek:

$$g_i(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi)) = 0, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{x} \in M,$$

kde $\mathbb{E}(\xi)$ je vektor středních hodnot náhodných proměnných. [27, str. 21]

Deterministický ekvivalent *here-and-now* za využití střední hodnoty je definován ve zkráceném tvaru následujícím způsobem:

$$? \in \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \{f(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi)) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{M}(\mathbb{E}(\xi))\},$$

kde $\mathcal{M}(\mathbb{E}(\xi))$ je množina přípustných řešení:

$$\mathcal{M}(\mathbb{E}(\xi)) = \{\mathbf{x} \in M \mid g_i(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi)) \leq 0, i = 1, \dots, m \wedge h_j(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi)) = 0, j = 1, \dots, l\}.$$

Optimální řešení pomocí přístupu *here-and-now* za využití střední hodnoty značíme $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ a jeho hodnotu značíme z_{min}^{EV} (z anglického *expected value*) [27, str. 21]:

$$z_{min}^{EV} = \min_{\mathbf{x}} \{f(\mathbf{x}, \mathbb{E}(\xi)) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{M}(\mathbb{E}(\xi))\}.$$

Očekávaný výsledek při použití přístupu střední hodnoty (EEV) Otázkou je, jak kvalitní je řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ s hodnotou z_{min}^{EV} . Proto zavádíme hodnotu **EEV**. Necht' $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ je optimální řešení úlohy (4.6), potom hodnotu **EEV**

$$\mathbf{EEV} = \mathbb{E}_{\xi}(f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, \xi)) \quad (4.7)$$

nazýváme očekávaný výsledek při použití přístupu střední hodnoty, zkráceně **EEV** (z anglického *expected result of using expected value solution*, případně *expected objective function value for the optimal solution of the Expected Value deterministic reformulation*). [27, str. 21]

Hodnota **EEV** je ukazatelem, pomocí kterého můžeme zjistit, zda řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ vypadá realisticky. Jelikož při řešení využíváme střední hodnotu náhodné proměnné, tak hodnota z_{min}^{EV} je „optimistickým“ předpokladem. Rozdílem **EEV** a z_{min}^{EV} získáme hodnotu, která nám ukáže, jak moc „optimistické“ řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ je [27, str. 22]:

$$\mathbf{EEV} - z_{min}^{EV}. \quad (4.8)$$

Přístup střední hodnoty účelové funkce (EO) Dalším způsobem, jak přeformulovat optimalizační úlohu stochastického programování a získat její deterministický ekvivalent, je využít střední hodnotu účelové funkce. Tímto způsobem zůstane zachována také informace, kterou do úlohy přináší náhoda.

Deterministický ekvivalent *here-and-now* za využití střední hodnoty účelové funkce je definován následujícím způsobem [27, str. 22]:

$$? \in \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \{ \mathbb{E}[f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}.$$

Optimální řešení pomocí přístupu *here-and-now* za využití střední hodnoty účelové funkce značíme $\mathbf{x}_{min}^{EO}$ a jeho hodnotu značíme z_{min}^{EO} (z anglického *expected objective function*) [27, str. 22]:

$$z_{min}^{EO} = \min_{\mathbf{x}} \{ \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}}(f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}. \quad (4.9)$$

Důležitým rozdílem mezi předešlými deterministickými ekvivalenty a EO programem je, že EO model není omezený [27, str. 22].

4.2.3 Hodnota stochastického řešení

Klíčovou charakteristikou stochastického programování je hodnota stochastického řešení (zkráceně **VSS**, z anglického *Value of Stochastic Solution*).

Tato charakteristika popisuje rozdíl mezi přístupem EV a přístupem EO. **VSS** zavádíme za účelem zjištění přínosu využití přístupu EO (skutečný *here-and-now* přístup) místo přístupu EV, při kterém zacházíme s problémem, jakoby byl deterministický. [27, str. 24]

Neformálně řečeno, „malá“ hodnota **VSS** znamená, že aproximace za využití střední hodnoty náhodné proměnné (přístup EV) je dostačující a dobrá [27, str. 24][28, str. 170].

Necht' **EEV** je očekávaný výsledek při použití přístupu střední hodnoty (4.7) a z_{min}^{EO} je hodnota optimálního řešení přístupem střední hodnoty účelové funkce (4.9). Hodnota stochastického řešení **VSS** je potom definována jako jejich rozdíl [27, str. 24]:

$$\mathbf{VSS} = \mathbf{EEV} - z_{min}^{EO}. \quad (4.10)$$

4.2.4 Očekávaná hodnota perfektní informace

Další charakteristikou popisující cenu za dokonalou znalost informací (týkajících se úlohy) je očekávaná hodnota perfektní informace (zkráceně **EVPI**, z anglického *Expected Value of Perfect Information*).

Zatímco charakteristika **VSS** nám umožňuje porovnat dva různé *here-and-now* přístupy, charakteristika **EVPI** porovnává přístup *wait-and-see* a *here-and-now* přístup EO.

Necht' z_{min}^{EO} je hodnota optimálního řešení přístupem střední hodnoty účelové funkce (4.9) a z_{min}^{WS} je očekávaná hodnota při dokonalé znalosti ξ (4.4). Hodnota **EVPI** je potom definována jako jejich rozdíl [27, str. 25]:

$$\mathbf{EVPI} = z_{min}^{EO} - z_{min}^{WS}. \quad (4.11)$$

Hodnota **EVPI** nám říká, kolik bychom měli maximálně zaplatit za dokonalou znalost budoucnosti. Malá hodnota **EVPI** znamená, že dokonalou znalostí budoucnosti nezískáme mnoho, naopak vysoká hodnota **EVPI** znamená, že dokonalé informace o budoucnosti jsou cenné. [27, str. 25]

Jelikož v reálných situacích není většinou možné „koupit si“ dokonalé informace o budoucnosti, hodnota **VSS** je více relevantní než hodnota **EVPI** [29, str. 317].

4.2.5 Porovnání deterministických ekvivalentů

Necht' z_{min}^{WS} , $\mathbf{EEV}$ a z_{min}^{EO} jsou definovány postupně v (4.4), (4.7) a (4.9). Potom platí následující [28, str. 166]:

$$z_{min}^{WS} \leq z_{min}^{EO} \leq \mathbf{EEV}. \quad (4.12)$$

4.3 Rozhodování a fáze

Stochastické úlohy dělíme podle počtu rozhodování na jednostupňové (viz kapitola 5) a vícestupňové. U jednostupňových úloh učiníme jedno rozhodnutí typu *here-and-now* předtím, než se dozvíme realizaci náhodné proměnné. Toto rozhodnutí už není možné později (např. při zjištění nových informací) upravit. U vícestupňových úloh činíme rozhodnutí ve více fázích, ve kterých postupně zjišťujeme nové informace o našem problému. [28, str. 57–58]

5 JEDNOSTUPŇOVÁ STOCHASTICKÁ OPTIMALIZACE

Při jednostupňové stochastické optimalizaci uvažujeme pouze jeden rozhodovací stupeň (neboli fázi). V angličtině se pro tento druh optimalizace užívá spojení *Single-Stage Stochastic Optimization*. V případech jednostupňového modelu je nutné učinit pouze jedno rozhodnutí před realizací náhodné proměnné, po její realizaci už není možné provést žádné dodatečné (opravné) akce.

Jednostupňové stochastické úlohy obsahují náhodné proměnné v účelové funkci, v podmínkách, případně v účelové funkci i v podmínkách.

V následujících podkapitolách si na ilustrativních příkladech s neurčitostí ukážeme deterministické ekvivalenty, kterým jsme se teoreticky věnovali v předchozí kapitole.

5.1 Ilustrativní úloha 01: minimalizace hodnoty výrazu

V následujícím příkladu si demonstrujeme přístupy *wait-and-see* a *here-and-now* a výpočty hodnot **EEV**, **VSS** a **EVPI**. Jedná se o úlohu s náhodnou proměnnou pouze v účelové funkci. Příklad převzat z [27, str. 3].

Příklad 5.1.1 Minimalizujte výraz $(x - \xi)^2$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $\xi \sim A\left(\frac{6}{10}\right)$. Při řešení využijte přístup *wait-and-see*, *here-and-now* pomocí střední hodnoty a pomocí střední hodnoty účelové funkce. Dále vypočítejte hodnoty **EEV**, **VSS** a **EVPI** a proved'te diskuzi o výsledcích.

Úlohu si přepíšeme jako úlohu matematického programování:

minimalizovat:

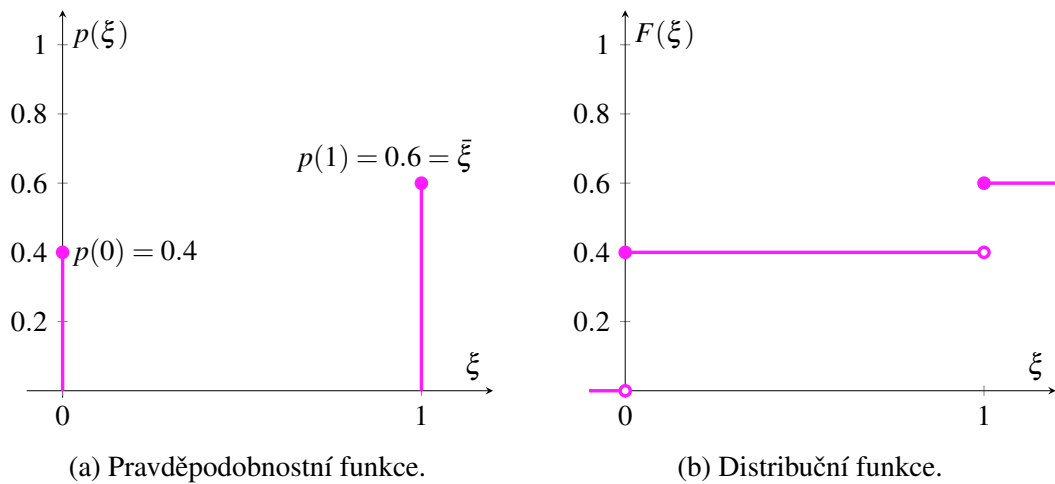
$$(x - \xi)^2$$

za podmínek:

$$x \in \mathbb{R},$$

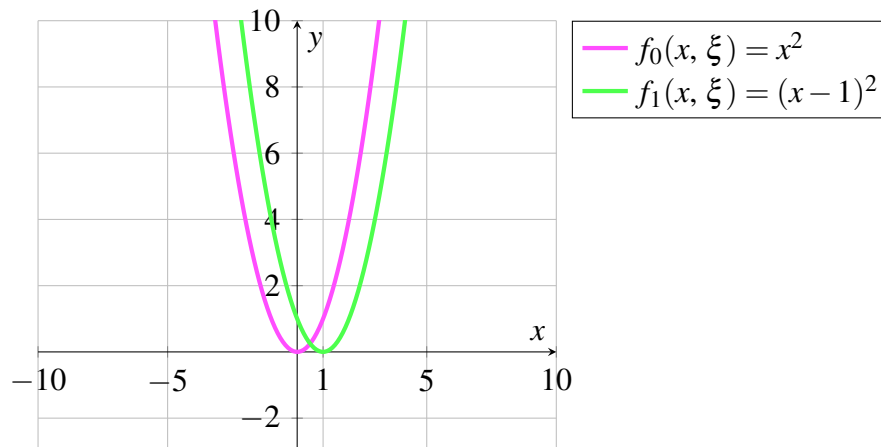
$$\xi \sim A\left(\frac{6}{10}\right).$$

Náhodná proměnná ξ je diskrétní a má alternativní rozdělení pravděpodobnosti s $p = \frac{6}{10}$, její pravděpodobnostní a distribuční funkce jsou v grafech na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1 Pravděpodobnostní a distribuční funkce náhodné veličiny ξ s alternativním rozdělením pravděpodobnosti s $p = 0.6$ z úlohy 5.1.

Grafem funkce, kterou minimalizujeme, je parabola. Hodnota náhodné proměnné ovlivňuje souřadnice vrcholu paraboly. V případě $\xi = 1$ má vrchol souřadnice $[1; 0]$ a v případě $\xi = 0$ má souřadnice $[0; 0]$, viz grafy na obrázku 5.2.



Obrázek 5.2 Graf minimalizované funkce z příkladu 5.1. Funkce f_0 pro hodnotu $\xi = 0$ a funkce f_1 pro hodnotu $\xi = 1$.

5.1.1 Přístup *wait-and-see*

Při přístupu *wait-and-see* známe realizaci náhodné proměnné předem. Pro každou možnou realizaci ξ vyřešíme odpovídající deterministický problém. Z výpočtů níže vidíme, že hodnota x_{min}^ξ i hodnota výrazu z_{min}^ξ závisí na realizaci ξ :

- pro $\xi = 1$ řešíme úlohu

minimalizovat:

$$(x - 1)^2$$

za podmíněk:

$$x \in \mathbb{R},$$

která má řešení $x_{min}^{\xi=1} = 1$ s hodnotou $z_{min}^{\xi=1} = 0$ (viz graf funkce f_0 na obrázku 5.2),

- pro $\xi = 0$ řešíme úlohu

minimalizovat:

$$(x - 0)^2$$

za podmíněk:

$$x \in \mathbb{R},$$

která má řešení $x_{min}^{\xi=0} = 0$ s hodnotou $z_{min}^{\xi=0} = 0$ (viz graf funkce f_1 na obrázku 5.2).

Hodnotu optimálního řešení z_{min}^{WS} vypočítáme podle (4.4) jako střední (očekávanou) hodnotu při dokonalé znalosti ξ :

$$\begin{aligned} z_{min}^{WS} &= z_{min}^{\xi=1} \cdot p(\xi = 1) + z_{min}^{\xi=0} \cdot p(\xi = 0) \\ &= 0 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Poznámka 3 Hodnotu z_{min}^{WS} je možné u tohoto příkladu jednoduše vyčíst z grafu 5.2. Obě paraboly mají globální minimum s funkční hodnotou 0.

5.1.2 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty

Při přístupu *here-and-now* neznáme předem realizaci náhodné proměnné. Jelikož známe rozdělení náhodné proměnné, využijeme v modelu její střední hodnotu, viz její hodnota v grafu na obrázku 5.1a:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = \mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot p(\xi = 1) + 0 \cdot p(\xi = 0) \\ &= 1 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 \\ &= 0,6. \end{aligned}$$

Náhodnou proměnnou v úloze nahradíme její střední hodnotou a získáme úlohu:

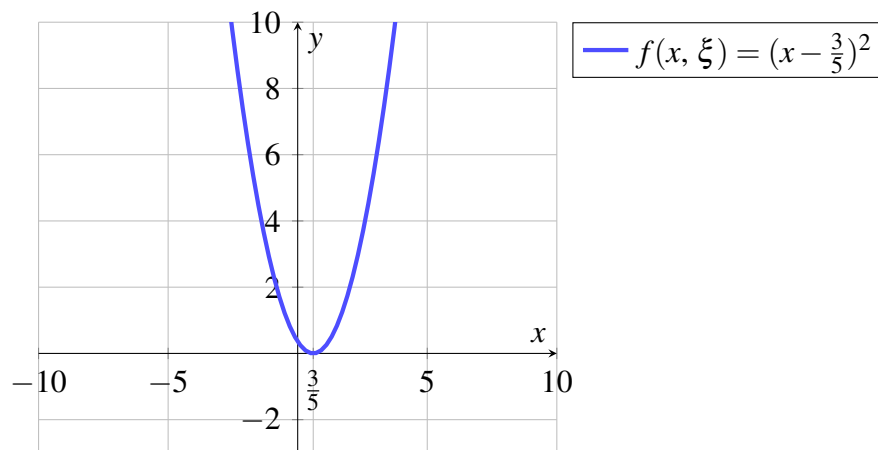
minimalizovat:

$$(x - 0,6)^2$$

za podmínek:

$$x \in \mathbb{R}.$$

Úloha má řešení $x_{min}^{EV} = 0,6$ s hodnotou $z_{min}^{EV} = 0$. Graf funkce se střední hodnotou $\xi = 0,6$ je znázorněný v grafu na obrázku 5.3. Z grafu je také možné jednoduše vyčíst funkční hodnotu globálního minima funkce.



Obrázek 5.3 Graf minimalizované funkce z příkladu 5.1 pomocí přístupu EV.

Při využití přístupu *here-and-now* pomocí střední hodnoty náhodné proměnné je vhodné vypočítat hodnotu **EEV**, která nám říká, jak kvalitní je EV řešení.

K výpočtu **EEV** potřebujeme vyřešit úlohu

minimalizovat:

$$(x_{min}^{EV} - \xi)^2$$

za podmínek:

$$\xi \sim A\left(\frac{6}{10}\right)$$

pro $x_{min}^{EV} = 0,6$. Pro každou možnou realizaci ξ vyřešíme odpovídající deterministický problém:

- pro $\xi = 1$ dostáváme

$$f(x_{min}^{EV}, \xi) = (0,6 - 1)^2 = (-0,4)^2 = 0,16,$$

- pro $\xi = 0$ dostáváme

$$f(x_{min}^{EV}, \xi) = (0,6 - 0)^2 = 0,6^2 = 0,36.$$

Hodnotu **EEV** potom vypočítáme podle (4.7) jako střední (očekávanou) hodnotu řešení za využití střední hodnoty:

$$\begin{aligned} \mathbf{EEV} &= f(x_{min}^{EV}, \xi = 1) \cdot p(\xi = 1) + f(x_{min}^{EV}, \xi = 0) \cdot p(\xi = 0) \\ &= 0,16 \cdot 0,6 + 0,36 \cdot 0,4 \\ &= 0,24. \end{aligned}$$

5.1.3 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty účelové funkce 01

Nyní si ukážeme, jak aplikovat přístup střední hodnoty účelové funkce. Při tomto přístupu řešíme úlohu

minimalizovat:

$$\mathbb{E}(x - \xi)^2$$

za podmínek:

$$x \in \mathbb{R},$$

$$\xi \sim A\left(\frac{6}{10}\right).$$

Účelovou funkci si upravíme:

$$(x - \xi)^2 = x^2 - 2x\xi + \xi^2.$$

Potom postupnými kroky upravíme střední hodnotu účelové funkce:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x - \xi)^2 &= \mathbb{E}(x^2 - 2x\xi + \xi^2) \\ &= \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(2x\xi) + \mathbb{E}(\xi^2) \\ &= x^2 - 2x\mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\xi^2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

K minimalizaci účelové funkce (5.1) využijeme její první derivaci, kterou položíme rovnou nule:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2x\mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\xi^2)) &= 2x - 2\mathbb{E}(\xi) \\ 2x - 2\mathbb{E}(\xi) &= 0 \\ 2x &= 2\mathbb{E}(\xi) \\ x &= \mathbb{E}(\xi).\end{aligned}$$

Řešením je tedy $x_{min}^{EO} = \mathbb{E}(\xi)$, tzn. střední hodnota náhodné proměnné, kterou vypočítáme:

$$\begin{aligned}\bar{\xi} = \mathbb{E}(\xi) &= 1 \cdot p(\xi = 1) + 0 \cdot p(\xi = 0) \\ &= 1 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 \\ &= 0,6.\end{aligned}$$

Pro řešení $x_{min}^{EO} = 0,6$ vypočítáme jeho funkční hodnotu z_{min}^{EO} :

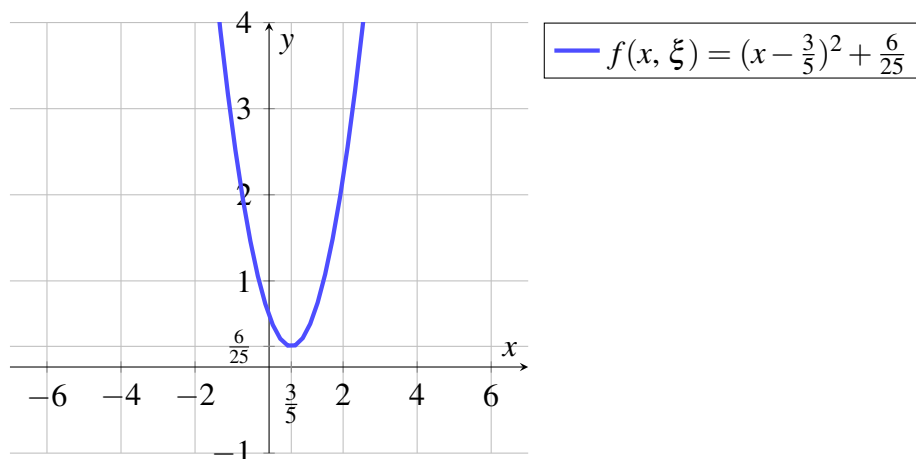
$$\begin{aligned}z_{min}^{EO} &= f(x_{min}^{EO}, \xi = 1) \cdot p(\xi = 1) + f(x_{min}^{EO}, \xi = 0) \cdot p(\xi = 0) \\ &= (0,6 - 1)^2 \cdot 0,6 + (0,6 - 0)^2 \cdot 0,4 \\ &= 0,16 \cdot 0,6 + 0,36 \cdot 0,4 \\ &= 0,24.\end{aligned}$$

5.1.4 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty účelové funkce 02

Model přístupu střední hodnoty účelové funkce můžeme vyřešit i bez využití derivace. Střední hodnotu účelové funkce $\mathbb{E}(x - \xi)^2$ si upravíme:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x - \xi)^2 &= p(\xi = 1) \cdot f(x, \xi = 1) + p(\xi = 0) \cdot f(x, \xi = 0) \\ &= 0,6 \cdot (x - 1)^2 + 0,4 \cdot (x - 0)^2 \\ &= 0,6 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 0,4 \cdot x^2 \\ &= 0,6x^2 - 1,2x + 0,6 + 0,4x^2 \\ &= x^2 - 1,2x + 0,6 \\ &= (x - 0,6)^2 + 0,24\end{aligned}$$

Z takto upraveného tvaru účelové funkce lze vyčíst její minimum (vrchol odpovídající paraboly) v bodě $[0,6;0,24]$, viz graf funkce na obrázku 5.4. Z toho vyplývá, že $x_{min}^{EO} = 0,6$ a $z_{min}^{EO} = 0,24$.



Obrázek 5.4 Graf minimalizované funkce z příkladu 5.1 pomocí přístupu EO.

5.1.5 Hodnota VSS a EVPI

Nyní vypočítáme podle (4.10) hodnotu stochastického řešení **VSS**, která nám popisuje zisk při použití modelu EO místo přístupu EV:

$$\begin{aligned}\mathbf{VSS} &= \mathbf{EEV} - z_{min}^{EO} \\ &= 0,24 - 0,24 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Očekávanou hodnotu perfektní informace **EVPI** vypočítáme podle (4.11) jako rozdíl hodnot z_{min}^{EO} a z_{min}^{WS} :

$$\begin{aligned}\mathbf{EVPI} &= z_{min}^{EO} - z_{min}^{WS} \\ &= 0,24 - 0 \\ &= 0,24.\end{aligned}$$

5.1.6 Diskuze dosažených výsledků

V tabulce 5.1 jsou sepsány získané výsledky a hodnoty jednotlivých přístupů. Z rozdílu hodnot **EEV** a z_{min}^{EV} zjistíme, jak moc je řešení x_{min}^{EV} realistické:

$$\mathbf{EEV} - z_{min}^{EV} = 0,24 - 0 = 0,24.$$

Rozdíl vyšel 0,24, což znamená, že řešení x_{min}^{EV} s funkční hodnotou $z_{min}^{EV} = 0$ je docela optimistické.

Z hodnoty **VSS** = 0 vidíme, že přístup pomocí střední hodnoty (EV model) je dostačující, jelikož v tomto případě není žádný rozdíl mezi přístupem EV a EO.

Z hodnoty **EVPI** = 0,24 vidíme, že je výhodné zjistit informace o budoucí realizaci náhodné proměnné ξ .

z_{min}^{WS}	z_{min}^{EV}	z_{min}^{EO}	EEV	VSS	EVPI
0	0	0,24	0,24	0	0,24

Tabulka 5.1 Přehled hodnot pro příklad 5.1.

5.2 Ilustrativní úloha 02: maximalizace zisku

V následujícím příkladu si demonstrováme přístupy *wait-and-see* a *here-and-now* a výpočty hodnot **EEV**, **VSS** a **EVPI**. Jedná se o úlohu s náhodnou proměnnou v účelové funkci. Příklad inspirovaný úlohou z [30].

Příklad 5.2.1 *Jste výrobce kvalitních růžových kabelek. Máte jedinečnou příležitost zúčastnit se lokálního marketu, na kterém můžete své kabelky prodávat ve stánku.*

Náklady na výrobu jedné kabelky činí 1500 Kč, prodejní cena jedné kabelky je 2500 Kč. Každá neprodaná kabelka na marketu Vás bude stát 100 Kč (náklady na přepravu, obaly a další náklady).

Prodej kabelek závisí na počasí v den marketu. Data z minulých ročníků naznačují celkem 3 typické scénáře, jak je uvedeno v tabulce 5.2.

Kolik kabelek necháte vyrobit na lokální market, abyste maximalizovali svůj zisk?

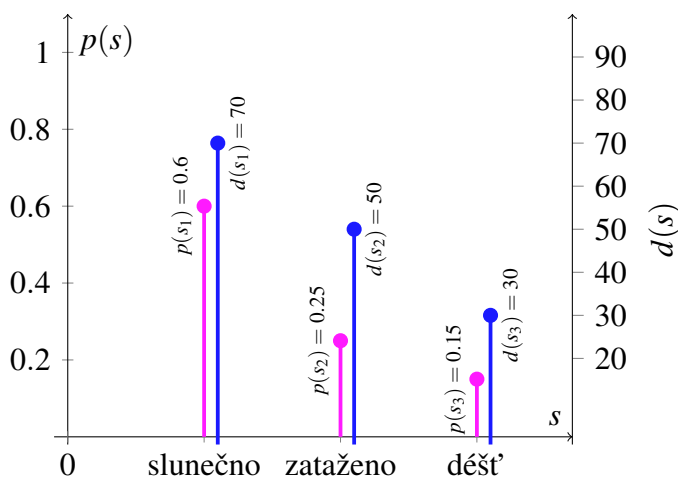
Možné scénáře si zapíšeme jako množinu S :

$$S = \{\text{slunečno, zataženo, déšť}\}.$$

Scénář S a proto také poptávka D jsou náhodné proměnné. Pravděpodobnostní funkce náhodných proměnných S (scénáře) a D (poptávka) jsou v grafu na obrázku 5.5.

Tabulka 5.2 Typické scénáře podle dat z minulých ročníků pro příklad 5.2.

Scénář (s)	Poptávka (d)	Pravděpodobnost (p)
slunečno	70 ks	0,60
zataženo	50 ks	0,25
děšť	30 ks	0,15

Obrázek 5.5 Pravděpodobnostní funkce náhodné proměnné S (scénářů) a náhodné proměnné D (poptávky).

Nejdříve si úkol zapíšeme jako úlohu matematické optimalizace. Označme $f(x, d)$ zisk výrobce, který nechal vyrobit x kabelek a poptávka byla d kabelek. Potom ze zadání:

$$f(x, d) = \begin{cases} 2500 \cdot d - 1500 \cdot x - 100 \cdot (x - d) & \text{pro } d \leq x, \\ 2500 \cdot x - 1500 \cdot x & \text{pro } d > x. \end{cases}$$

Účelovou funkci můžeme zkráceně zapsat ve tvaru:

$$f(x, d) = 2500 \cdot \min\{d, x\} - 1500 \cdot x - 100 \cdot (x - \min\{d, x\}) \quad (5.2)$$

Pokud si počet prodaných kabelek označíme y , tedy $y = \min\{d, x\}$, potom účelovou funkci zapíšeme:

$$f(x, y) = 2500 \cdot y - 1500 \cdot x - 100 \cdot (x - y), \quad (5.3)$$

kde d je poptávka po kabelkách v den marketu, x je počet vyrobených kabelek a y je počet prodaných kabelek. Jde o optimalizační úlohu s cílem maximalizovat zisk, tedy účelovou funkci (5.2) a (5.3):

maximalizovat:

$$f(x, y) = 2500 \cdot y - 1500 \cdot x - 100 \cdot (x - y)$$

za podmínek:

$$y \leq x,$$

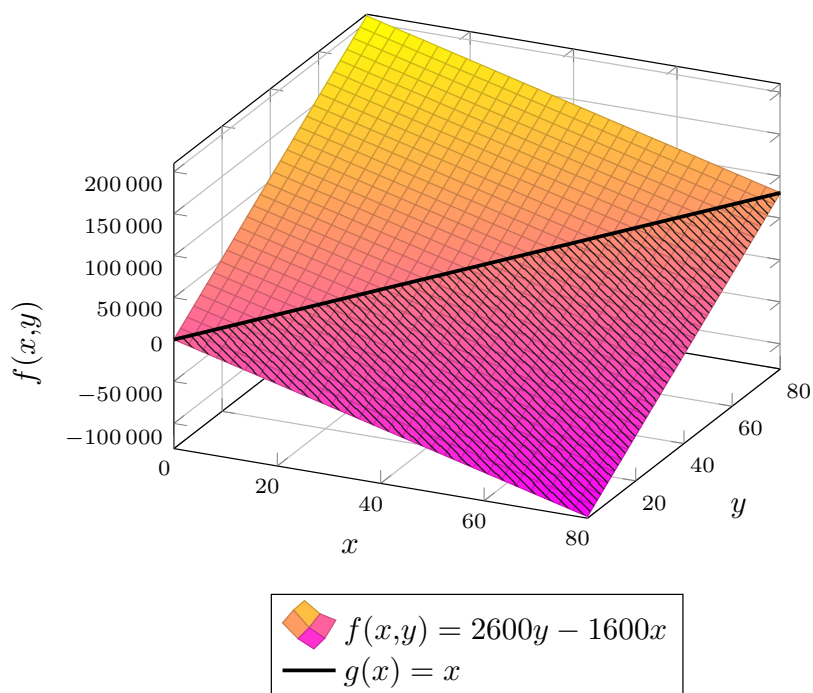
$$y \leq d,$$

$$y, d, x \in \mathbb{N}.$$

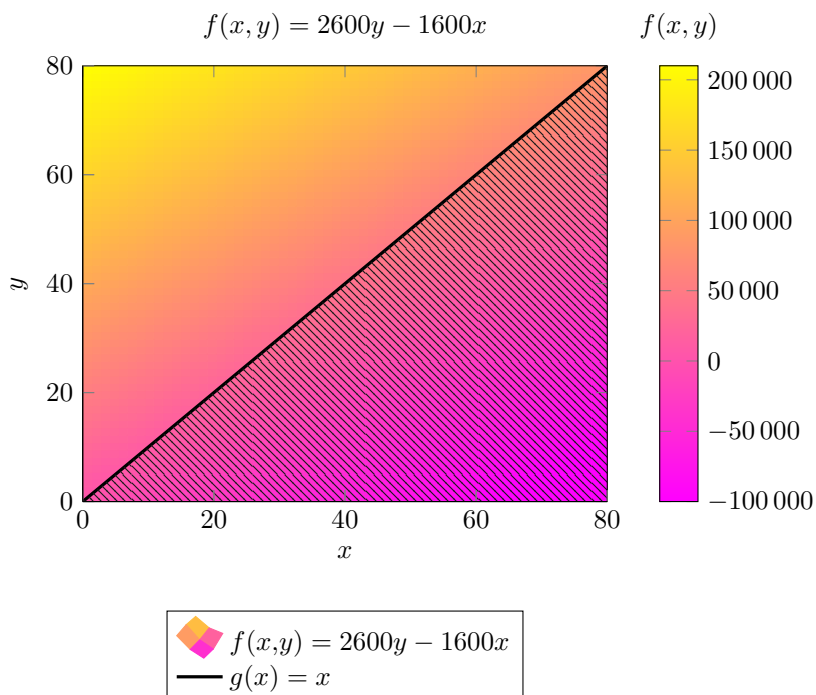
Pokud objednáme dostatečné množství kabelek na uspokojení poptávky při slunečném počasí, je zde riziko finanční ztráty při deštivém počasí.

Jelikož neznáme počasí dopředu, nemůžeme v realitě využít přístup *wait-and-see*. Zadat množství kabelek na výrobu musíme před znalostí počasí.

Odpovídající úlohu lineárního programování si zobrazíme do grafu, viz grafy (3D graf a heat mapa) na obrázcích 5.6 a 5.7. Heat mapa na obrázku 5.7 zobrazuje funkční hodnoty (zisk v Kč) pro vyrobené x a prodané y kusy kabelek ve 2D prostoru. Počty kabelek jsou přirozená čísla, v grafu jsou ale zobrazeny funkční hodnoty pro všechna reálná čísla, cílem je vizualizovat průběh účelové funkce.



Obrázek 5.6 Graf účelové funkce z příkladu 5.2. Funkce $f(x,y)$ představuje zisk při x vyrobených a y prodaných kabelkách.



Obrázek 5.7 Graf (heat mapa) účelové funkce z příkladu 5.2 zobrazující hodnoty ve 2D prostoru. Funkce $f(x,y)$ představuje zisk při x vyrobených a y prodaných kabelkách.

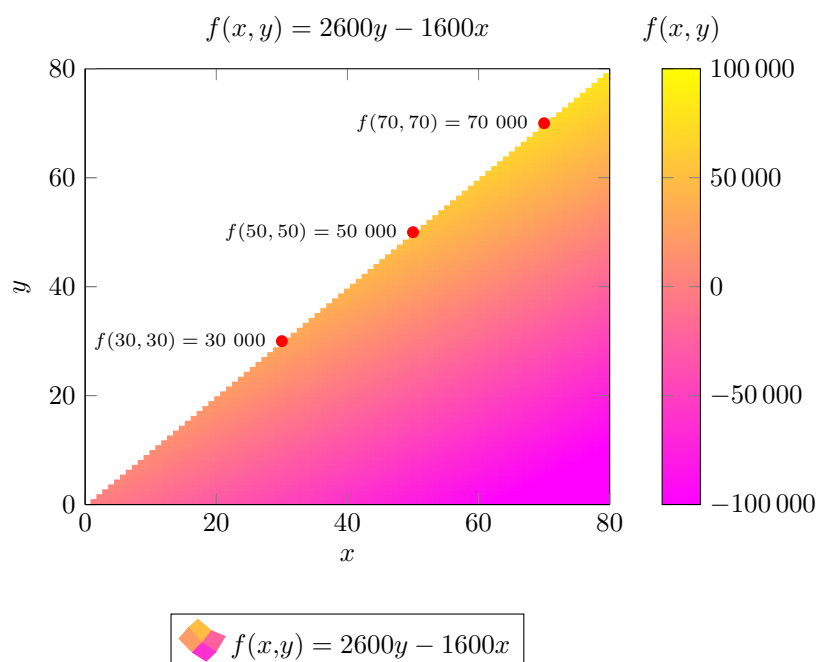
5.2.1 Přístup *wait-and-see*

I když v realitě není možné využít přístup *wait-and-see*, jeho hodnota z_{max}^{WS} je potřebná později pro výpočet očekávané hodnoty perfektní informace **EVPI**, viz kapitola 5.2.4.

Při přístupu *wait-and-see* známe poptávku předem – scénář (realizaci náhodné proměnné S), který nastane. Víme tedy, kolik kabelek nechat vyrobit (známe realizaci náhodné proměnné D). Pro každý scénář vyplníme počet vyrobených a prodaných kusů a celkový zisk, sestavíme tabulku 5.3 a účelovou funkci f , její hodnoty a vybrané hodnoty pro jednotlivé scénáře si zobrazíme v heat mapě, viz graf na obrázku 5.8. Řešení pro scénář i si označíme $x_{max}^{s=i}$ s funkční hodnotou $z_{max}^{s=i}$.

Tabulka 5.3 Celkový zisk při jednotlivých scénářích při přístupu *wait-and-see*.

Scénář (s)	Pravděpodobnost (p)	Poptávka (d)	Vyrobeno (x)	Prodáno (y)	Celkový zisk (f)
slunečno	0,60	70	70	70	70 000
zataženo	0,25	50	50	50	50 000
děšť	0,15	30	30	30	30 000



Obrázek 5.8 Graf (heat mapa) účelové funkce z příkladu 5.2 zobrazující hodnoty ve 2D prostoru při přístupu *wait-and-see*. Funkce $f(x, y)$ představuje zisk při x vyrobených a y prodaných kabelech.

Hodnotu optimálního řešení z_{max}^{WS} vypočítáme podle (4.4) jako střední (očekávanou) hodnotu při dokonalé znalosti scénáře, tedy také poptávky:

$$\begin{aligned} z_{max}^{WS} &= z_{max}^{s=1} \cdot p(s=1) + z_{max}^{s=2} \cdot p(s=2) + z_{max}^{s=3} \cdot p(s=3) \\ &= 70\,000 \cdot 0,6 + 50\,000 \cdot 0,25 + 30\,000 \cdot 0,15 \\ &= 59\,000. \end{aligned}$$

5.2.2 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty

Jednoduchým řešením je využít střední hodnotu poptávky všech scénářů, kterou vypočítáme jako:

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \mathbb{E}(d) = \sum_{s \in S} p(s) \cdot d(s) \\ &= 0,6 \cdot 70 + 0,25 \cdot 50 + 0,15 \cdot 30 \\ &= 42 + 12,5 + 4,5 \\ &= 59. \end{aligned}$$

Necháme tedy vyrobit $x = \bar{d} = 59$ kusů kabelek. Pro každý scénář si vypočítáme celkový zisk. Zkráceným zápisem $f_{s=i}$ označujeme $f(x_{s=i}, y_{s=i})$.

- scénář $s = 1$ = slunečno:

$$\begin{aligned} f_{s=1} &= 2500 \cdot y_{s=1} - 1500 \cdot x_{s=1} - 100 \cdot (x_{s=1} - y_{s=1}) \\ &= 2500 \cdot 59 - 1500 \cdot 59 - 100 \cdot (59 - 59) \\ &= 147\,500 - 88\,500 - 0 \\ &= 59\,000. \end{aligned}$$

- scénář $s = 2$ = zataženo:

$$\begin{aligned} f_{s=2} &= 2500 \cdot y_{s=2} - 1500 \cdot x_{s=2} - 100 \cdot (x_{s=2} - y_{s=2}) \\ &= 2500 \cdot 50 - 1500 \cdot 59 - 100 \cdot (59 - 50) \\ &= 125\,000 - 88\,500 - 900 \\ &= 35\,600. \end{aligned}$$

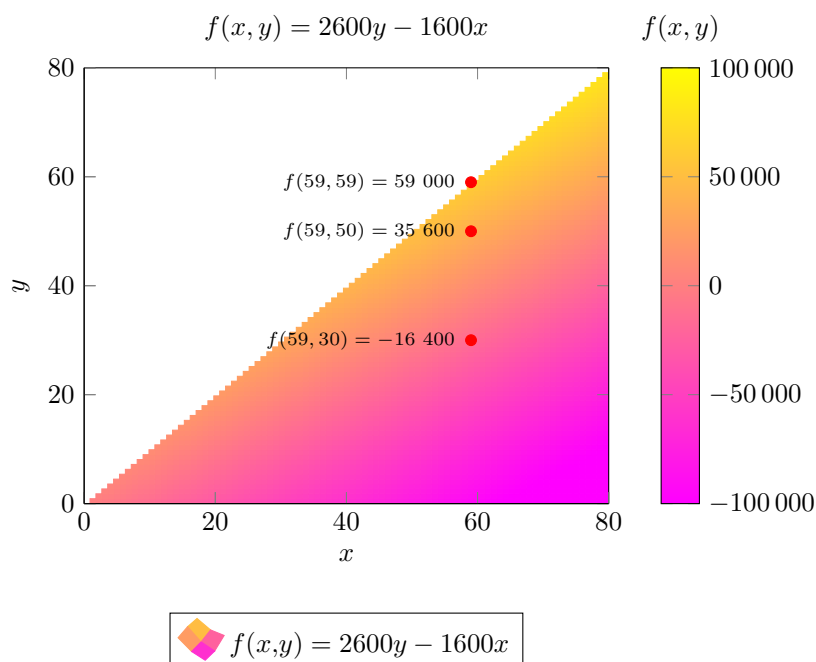
- scénář $s = 3 = \text{děšť}$:

$$\begin{aligned}
 f_{s=3} &= 2500 \cdot y_{s=3} - 1500 \cdot x_{s=3} - 100 \cdot (x_{s=3} - y_{s=3}) \\
 &= 2500 \cdot 30 - 1500 \cdot 59 - 100 \cdot (59 - 30) \\
 &= 75\,000 - 88\,500 - 2\,900 \\
 &= -16\,400.
 \end{aligned}$$

Řešení úlohy pomocí lineárního programování je dostupné v souboru `handbag_EV.py`. Údaje a zisk k jednotlivým scénářům jsou zaznamenány v tabulce 5.4 a v grafu na obrázku 5.9:

Tabulka 5.4 Celkový zisk při jednotlivých scénářích při využití EV modelu.

Scénář (s)	Pravděpodobnost (p)	Poptávka (d)	Vyrobeno ($x = \bar{d}$)	Prodáno (y)	Celkový zisk (f)
slunečno	0,60	70	59	59	59 000
zataženo	0,25	50	59	50	35 600
děšť	0,15	30	59	30	-16 400



Obrázek 5.9 Graf (heat mapa) účelové funkce z příkladu 5.2 zobrazující hodnoty ve 2D prostoru při přístupu *here-and-now* se střední hodnotou $\bar{d} = 59$. Funkce $f(x, y)$ představuje zisk při 59 vyrobených a y prodaných kabelkách.

Nyní vypočítáme hodnotu **EEV** podle (4.7), v našem případě očekávaný zisk při využití střední (očekávané) hodnoty poptávky:

$$\begin{aligned}\mathbf{EEV} &= f_{s=1} \cdot p(s=1) + f_{s=2} \cdot p(s=2) + f_{s=3} \cdot p(s=3) \\ &= 59\,000 \cdot 0,60 + 35\,600 \cdot 0,25 + (-16\,400) \cdot 0,15 \\ &= 41\,840.\end{aligned}$$

5.2.3 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty účelové funkce

Nyní si ukážeme, jak aplikovat přístup střední hodnoty účelové funkce. Při tomto přístupu řešíme úlohu maximalizace střední hodnoty účelové funkce (5.3), tedy:

$$\text{maximalizovat: } \mathbb{E}[f(x,y)].$$

Jelikož máme k dispozici 3 typické scénáře s danou pravděpodobností (viz tabulka 5.2), střední hodnotu účelové funkce získáme jako:

$$\mathbb{E}[f(x,y)] = \sum_{s \in S} p(s) \cdot f_s,$$

kde $p(s)$ je pravděpodobnost daného scénáře a f_s je hodnota účelové funkce pro daný scénář.

Celý optimalizační problém je potom zadán:

maximalizovat:

$$\mathbb{E}[f(x,y)] = \sum_{s \in S} p(s) \cdot f_s$$

za podmíněk:

$$f_s = 2500 \cdot y_s - 1500 \cdot x - 100 \cdot (x - y_s),$$

$$y_s \leq x,$$

$$y_s \leq d_s,$$

$$y_s, d_s, x \in \mathbb{N}.$$

Rozepsaná účelová funkce vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(f(x,y)) &= p(s=1) \cdot f_{s=1} + p(s=2) \cdot f_{s=2} + p(s=3) \cdot f_{s=3} \\
 &= 0,6 \cdot (2600 \cdot y_{s=1} - 1600 \cdot x) + 0,25 \cdot (2600 \cdot y_{s=2} - 1600 \cdot x) + \\
 &\quad + 0,15 \cdot (2600 \cdot y_{s=3} - 1600 \cdot x) \\
 &= 1560 \cdot y_{s=1} - 960 \cdot x + 650 \cdot y_{s=2} - 400 \cdot x + 390 \cdot y_{s=3} - 240 \cdot x \\
 &= 1560 \cdot y_{s=1} + 650 \cdot y_{s=2} + 390 \cdot y_{s=3} - 1600 \cdot x.
 \end{aligned}$$

Model a řešení úlohy jsou dostupné v souboru `handbag_EO.py`. Řešením úlohy je hodnota účelové funkce $f(x,y) = 42\,200$ pro $x = 50$, tedy $x_{max}^{EO} = 50$. Očekávaný zisk činí 42 200 Kč, tedy $z_{max}^{EO} = 42\,200$, což je o 360 Kč více než při naivním přístupu využití střední hodnoty poptávky. Pro každý scénář vyplníme počet vyrobených a prodaných kusů a celkový zisk, sestavíme tabulku 5.5. V grafu na obrázku 5.10 jsou zobrazeny zisky k jednotlivým scénářům.

Tabulka 5.5 Celkový zisk při jednotlivých scénářích při využití EO modelu.

Scénář (s)	Pravděpodobnost (p)	Poptávka (d)	Vyrobeno (x)	Prodáno (y)	Celkový zisk (f)
slunečno	0,60	70	50	50	50 000
zataženo	0,25	50	50	50	50 000
děšť	0,15	30	50	30	-2 000

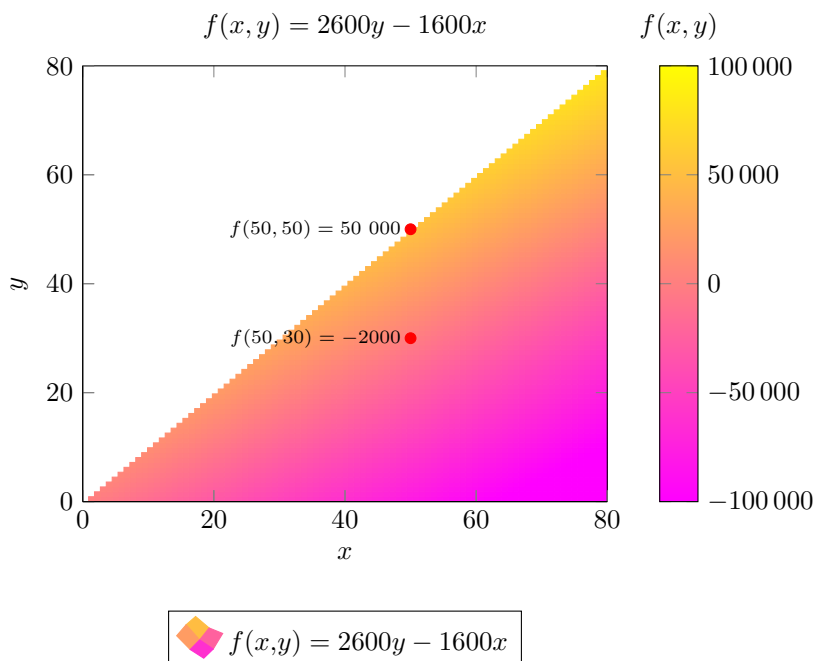
5.2.4 Hodnota VSS a EVPI

Nyní vypočítáme podle (4.10) hodnotu stochastického řešení **VSS**, která nám popisuje zisk při použití modelu EO místo přístupu EV:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{VSS} &= z_{max}^{EO} - \mathbf{EEV} \\
 &= 42\,200 - 41\,840 \\
 &= 360.
 \end{aligned}$$

Očekávanou hodnotu perfektní informace **EVPI** vypočítáme podle (4.11) jako rozdíl hodnot z_{max}^{EO} a z_{max}^{WS} :

$$\begin{aligned}\mathbf{EVPI} &= z_{max}^{WS} - z_{max}^{EO} \\ &= 59\,000 - 42\,200 \\ &= 16\,800.\end{aligned}$$



Obrázek 5.10 Graf (heat mapa) účelové funkce z příkladu 5.2 zobrazující hodnoty ve 2D prostoru při přístupu *here-and-now* se střední hodnotou účelové funkce. Funkce $f(x, y)$ představuje zisk v Kč při 50 vyrobených a y prodaných kabelkách.

5.2.5 Diskuze dosažených výsledků

V tabulce 5.6 jsou sepsány získané výsledky a hodnoty jednotlivých přístupů. Z rozdílu hodnot **EEV** a z_{max}^{EV} zjistíme, jak moc je řešení x_{max}^{EV} realistické:

$$z_{max}^{EV} - \mathbf{EEV} = 59\,000 - 41\,480 = 17\,520.$$

Rozdíl vyšel 17 520, což znamená, že řešení x_{max}^{EV} s funkční hodnotou $z_{max}^{EV} = 0$ je dost optimistické.

Z hodnoty **VSS** = 360 vidíme, že přístup pomocí střední hodnoty (EV) je dostačující. U hodnot se pohybujeme v řádu nižších desetitisíců, proto hodnota 360 znamená, že přístup EV je dostačující.

Z hodnoty $EVPI = 16\,800$ vidíme, že je dost výhodné zjistit informace o budoucí realizaci náhodné proměnné S , v našem případě počasí. Ve skutečnosti ale není možné přesně zjistit počasí na vybraný den. Pokud by to bylo možné, měli bychom za tuto informaci zaplatit nanejvýš 16 800 Kč.

z_{max}^{WS}	z_{max}^{EV}	z_{max}^{EO}	EEV	VSS	EVPI
59 000	59 000	42 200	41 840	360	16 800

Tabulka 5.6 Přehled hodnot pro příklad 5.2.

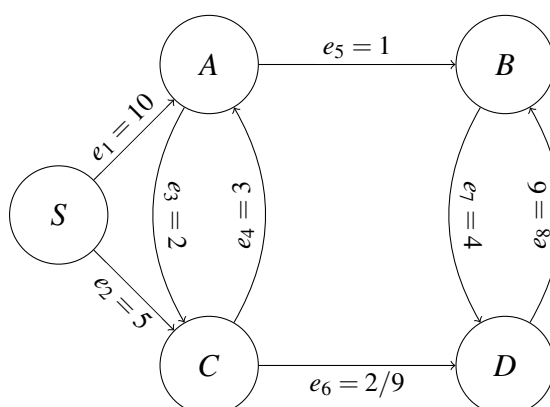
5.3 Ilustrativní úloha 03: problém nejkratší cesty

V následující jednoduché úloze si demonstrujeme přístupy *wait-and-see* a *here-and-now* a výpočty hodnot **EEV**, **VSS** a **EVPI**. Příklad převzat z [4, str. 659].

Příklad 5.3.1 Máme orientovaný graf G znázorněný níže na obrázku 5.11. Naším úkolem je najít nejkratší cestu z počátečního vrcholu S do vrcholu D .

Vzdálenosti mezi vrcholy jsou předem známe až na hranu z vrcholu C do vrcholu D , která je buď 2 s pravděpodobností 70 %, nebo 9 s pravděpodobností 30 %.

Při řešení využijte přístup *wait-and-see*, *here-and-now* pomocí střední hodnoty a střední hodnoty účelové funkce. Dále vypočítejte hodnoty **EEV**, **VSS** a **EVPI** a proveďte diskuzi o výsledcích.



Obrázek 5.11 Orientovaný graf G k příkladu 5.3 (obrázek převzat z [4, str. 659]).

Nejdříve si úlohu zapíšeme jako úlohu matematické optimalizace:

minimalizovat:

$$f(\mathbf{x}, \xi) = 10 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + \xi \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 6 \cdot x_8 \quad (5.4)$$

za podmínek:

$$x_1 + x_2 = 1,$$

$$x_3 + x_5 - x_1 - x_4 = 0,$$

$$x_7 - x_5 - x_8 = 0,$$

$$x_4 + x_6 - x_2 - x_3 = 0,$$

$$x_8 - x_6 - x_7 = -1,$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 8\},$$

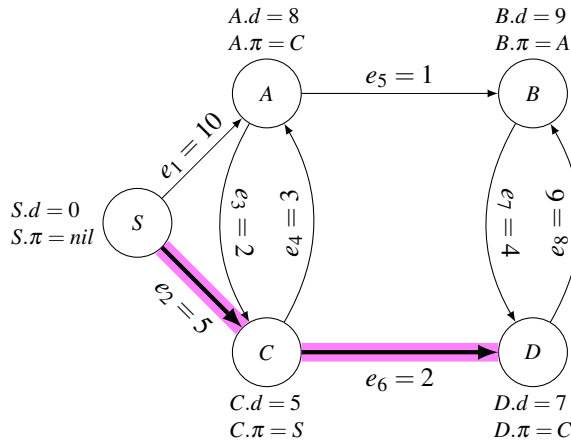
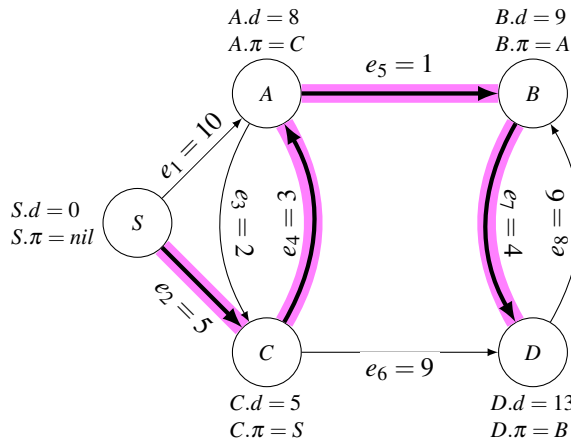
kde x_i značí, zda je hrana e_i vybrána do nejkratší cesty, či ne, a ξ je délka hrany e_6 . Řešením problému je vektor nul a jedniček $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_8)$, pokud $x_i = 1$, tak je hrana e_i součástí nejkratší cesty, pro $x_i = 0$ není hrana e_i součástí nejkratší cesty.

5.3.1 Přístup *wait-and-see*

V případě, že bychom předem znali vzdálenost mezi vrcholy C a D , můžeme využít přístup *wait-and-see*. Pro každou možnou vzdálenost vyřešíme odpovídající deterministický optimalizační problém. Pro hledání nejkratší cesty využijeme Dijkstrův algoritmus.

Pro hranu $e_6 = 2$ řešíme úlohu s grafickou reprezentací a řešením na obrázku 5.12. Nejkratší cesta z vrcholu S do vrcholu D je přes vrchol C s délkou 7. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{e_6=2}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{e_6=2} = 7$.

Pro hranu $e_6 = 9$ řešíme úlohu s grafickou reprezentací a řešením na obrázku 5.13. Nejkratší cesta z vrcholu S do vrcholu D je posloupnost $S \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$ s délkou 13. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{e_6=9}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{e_6=9} = 13$.

Obrázek 5.12 Grafová reprezentace problému nejkratší cesty s hranou $e_6 = 2$ a jeho řešení.Obrázek 5.13 Grafová reprezentace problému nejkratší cesty s hranou $e_6 = 9$ a jeho řešení.

Hodnotu optimálního řešení z_{min}^{WS} vypočítáme jako střední (očekávanou) hodnotu při dokonalé znalosti délky hrany e_6 :

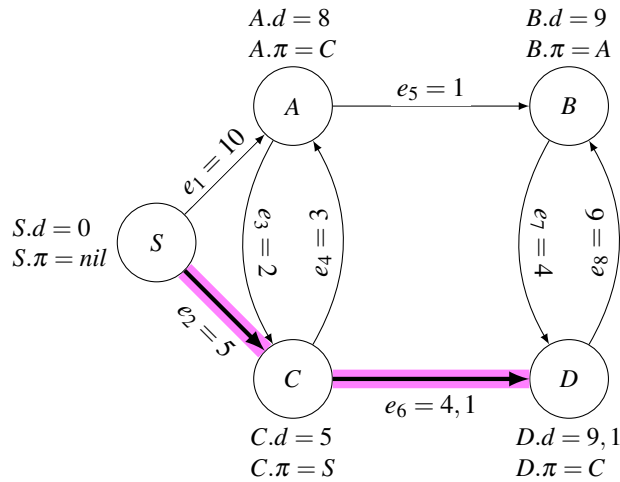
$$\begin{aligned}
 z_{min}^{WS} &= z_{min}^{e_6=2} \cdot p(e_6 = 2) + z_{min}^{e_6=9} \cdot p(e_6 = 9) \\
 &= 7 \cdot 0,7 + 13 \cdot 0,3 \\
 &= 8,8.
 \end{aligned}$$

5.3.2 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty

Pokud neznáme předem délku hrany e_6 , tedy hodnotu ξ , můžeme využít přístup *here-and-now* se střední hodnotou délky hrany e_6 :

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_6 &= \mathbb{E}(e_6) = 2 \cdot p(e_6 = 2) + 9 \cdot p(e_6 = 9) \\
 &= 2 \cdot 0,7 + 9 \cdot 0,3 \\
 &= 4,1.
 \end{aligned}$$

Náhodnou délku hrany e_6 nahradíme její střední hodnotou a získáme úlohu zobrazenou v grafu na obrázku 5.14. Úlohu vyřešíme opět pomocí Dijkstrova algoritmu. Řešením je tedy posloupnost $S \rightarrow C \rightarrow D$ s délkou trasy 9,1, viz obrázek 5.14. Řešení označíme $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{EV} = 9,1$. Řešení úlohy pomocí lineárního programování je dostupné v souboru `sssp_EV.py`.



Obrázek 5.14 Grafová reprezentace problému nejkratší cesty se střední hodnotou hrany $e_6 = 4,1$ a jeho řešení.

Jakmile přijedeme do vrcholu C , zjistíme, jaká je délka hrany e_6 . S pravděpodobností 0,7 bude 2 a s pravděpodobností 0,3 bude 9. Pro každý případ vypočítáme délku cesty:

- pokud je délka hrany $e_6 = 2$, potom je délka cesty $S \rightarrow C \rightarrow D$ celkem 7, tedy dostáváme $f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, \xi = 2) = 7$,
- pokud je délka hrany $e_6 = 9$, potom je délka cesty $S \rightarrow C \rightarrow D$ celkem 14, tedy dostáváme $f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, \xi = 9) = 14$.

Nyní vypočítáme hodnotu **EEV**, v našem případě očekávanou délku cesty při využití přístupu střední hodnoty délky hrany e_6 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{EEV} &= f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, \xi = 2) \cdot p(\xi = 2) + f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, \xi = 9) \cdot p(\xi = 9) \\
 &= 7 \cdot 0,7 + 14 \cdot 0,3 \\
 &= 9,1.
 \end{aligned}$$

5.3.3 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty účelové funkce

Nyní si ukážeme, jak aplikovat přístup střední hodnoty účelové funkce. Úkolem je minimalizovat střední hodnotu účelové funkce F , vycházíme z modelu (5.4):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f) &= f(\mathbf{x}, \xi = 2) \cdot p(\xi = 2) + f(\mathbf{x}, \xi = 9) \cdot p(\xi = 9) \\ &= f(\mathbf{x}, \xi = 2) \cdot 0,7 + f(\mathbf{x}, \xi = 9) \cdot 0,3\end{aligned}\quad (5.5)$$

Po rozepsání střední hodnoty účelové funkce podle (5.5) dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f) &= 0,7 \cdot [10 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 6 \cdot x_8] + \\ &\quad + 0,3 \cdot [10 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 9 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 6 \cdot x_8] \\ &= 10 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 4,1 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 6 \cdot x_8.\end{aligned}$$

Střední hodnotu účelové funkce je možné získat také následovně:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f) &= \mathbb{E}[10 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + \xi \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 6 \cdot x_8] \\ &= 10 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + \mathbb{E}(\xi) \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 6 \cdot x_8 \\ &= 10 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 4,1 \cdot x_6 + 4 \cdot x_7 + 6 \cdot x_8.\end{aligned}$$

Model a řešení úlohy jsou dostupné v souboru `sssp_E0.py`. Řešením úlohy je hodnota účelové funkce $f = 9,1$ pro $f(e_2) = 1$ a $f(e_6) = 1$, ostatní hrany nejsou součástí nejkratší cesty. Řešení si označíme $\mathbf{x}_{min}^{EO}$ a funkční hodnotu $z_{min}^{EO} = 9,1$.

5.3.4 Hodnota VSS a EVPI

Nyní vypočítáme hodnotu stochastického řešení **VSS**, která nám popisuje zisk při použití modelu EO místo přístupu EV.

$$\begin{aligned}\mathbf{VSS} &= \mathbf{EEV} - z_{min}^{EO} \\ &= 9,1 - 9,1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Očekávanou hodnotu perfektní informace **EVPI** vypočítáme jako rozdíl hodnot z_{min}^{EO} a z_{min}^{WS} :

$$\begin{aligned}\mathbf{EVPI} &= z_{min}^{EO} - z_{min}^{WS} \\ &= 9,1 - 8,8 \\ &= 0,3.\end{aligned}$$

5.3.5 Diskuze dosažených výsledků

V tabulce 5.7 jsou sepsány získané výsledky a hodnoty jednotlivých přístupů. Z rozdílu hodnot **EEV** a z_{min}^{EV} zjistíme, jak moc je řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ realistické:

$$\mathbf{EEV} - z_{min}^{EV} = 9,1 - 7 = 2.$$

Rozdíl vyšel 2, což znamená, že řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ s funkční hodnotou $z_{min}^{EV} = 7$ je mírně optimistické.

Z hodnoty **VSS** = 0 vidíme, že přístup pomocí střední hodnoty (EV model) je dostačující, jelikož v tomto případě není žádný rozdíl mezi přístupem EV a EO.

Z hodnoty **EVPI** = 0,3 vidíme, že je výhodné zjistit informace o budoucnosti, tedy o délce hrany e_6 .

z_{min}^{WS}	z_{min}^{EV}	z_{min}^{EO}	EEV	VSS	EVPI
8,8	7	9,1	9,1	0	0,3

Tabulka 5.7 Přehled hodnot pro příklad 5.3.

5.4 Ilustrativní úloha 04: rozvozní úloha

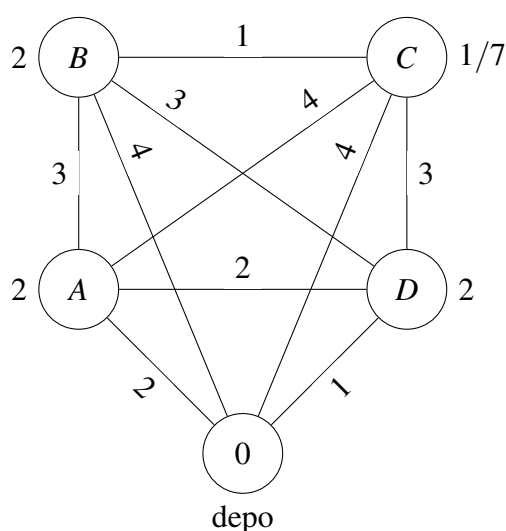
V následující jednoduché rozvozní úloze si demonstrováme přístupy *wait-and-see* a *here-and-now* a výpočet hodnoty **EEV**. Příklad převzat z [28, str. 40–46].

Příklad 5.4.1 *Jste majitel dopravní firmy a dostali jste novou zakázku. Vaším úkolem je navštívit 4 klienty (označené A, B, C a D) s počátkem i cílem v depu. U každého klienta vyzvednete zboží o určité kapacitě. Vaším cílem je minimalizovat délku trasy a vyzvednout všechno zboží od zákazníků.*

Kapacita zboží u klientů A , B a D je předem známá a rovna 2. Kapacita zboží u klienta C není předem jasná – buď 1, nebo 7, každá s pravděpodobností 0,5. K dispozici máte vůz s kapacitou 10.

Při řešení využijte přístup *wait-and-see*, *here-and-now* pomocí střední hodnoty. Dále vypočítejte hodnotu EEV a proveďte diskuzi o výsledcích.

Zadaný problém můžeme vizualizovat pomocí grafu, viz obrázek 5.15. Vzdálenosti mezi jednotlivými klienty jsou znázorněny čísly nad hranami, kapacita zboží k vyzvednutí je znázorněna čísly u uzlů.



Obrázek 5.15 Grafová reprezentace rozvozní úlohy z příkladu 5.4.

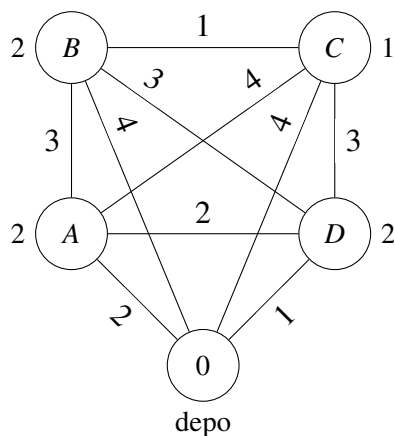
Problém návštěvy všech klientů, u kterých vyzvedneme jejich zboží, a vrácením se do výchozího bodu s minimálními náklady (nejkratší možnou cestou) se nazývá rozvozní problém, viz 2.5.1. Cestujeme s vozidlem s omezenou kapacitou $Q = 10$ a kapacita zboží d_C u klienta C je náhodná.

5.4.1 Přístup *wait-and-see*

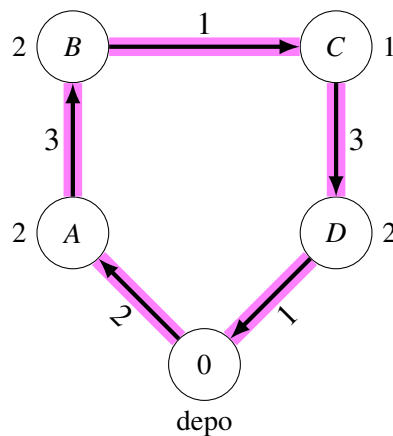
V případě, že bychom předem znali kapacitu zboží d_C u klienta C , můžeme využít přístup *wait-and-see*. Pro každou možnou kapacitu zboží u klienta C vyřešíme odpovídající deterministický problém.

Pro kapacitu $d_C = 1$ řešíme úlohu s grafickou reprezentací na obrázku 5.16a. Kapacita vozidla $Q = 10$ je dostatečná na pokrytí poptávky všech klientů, která je celkem 7, proto můžeme úlohu vyřešit jako TSP problém. Řešením je tedy posloupnost $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow$

$D \rightarrow 0$ s délkou trasy 10, viz obrázek 5.16b. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{d_C=1}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{d_C=1} = 10$.



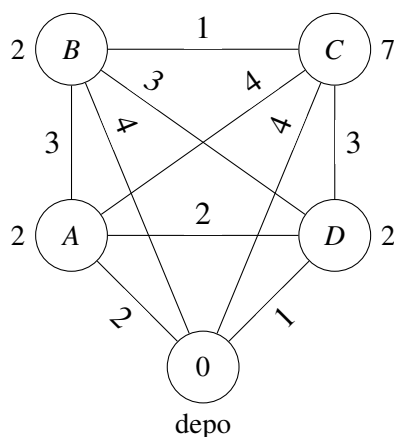
(a) Zadání úlohy.



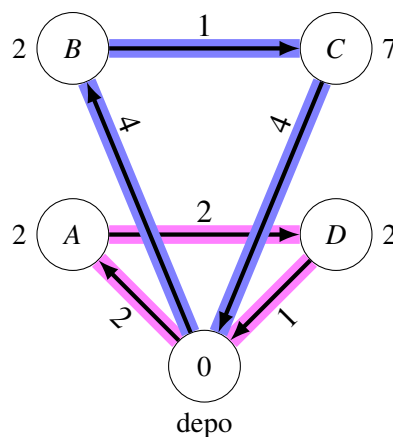
(b) Řešení úlohy.

Obrázek 5.16 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 1$ u klienta C a její řešení.

Pro kapacitu $d_C = 7$ řešíme úlohu s grafickou reprezentací na obrázku 5.17a. Kapacita vozidla $Q = 10$ není dostatečná na pokrytí poptávky všech klientů, která je celkem 13, proto musíme úlohu vyřešit pomocí dvou tras. Řešením je tedy první část trasy $0 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow 0$, po které vozidlo v depu vyložíme, a druhá část trasy $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$. Celková délka trasy je 14, viz obrázek 5.17b. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{d_C=7}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{d_C=7} = 14$.



(a) Zadání úlohy.



(b) Řešení úlohy.

Obrázek 5.17 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 7$ u klienta C a její řešení.

Hodnotu optimálního řešení z_{min}^{WS} vypočítáme jako střední (očekávanou) hodnotu při dokonalé znalosti kapacity zboží d_C u klienta C :

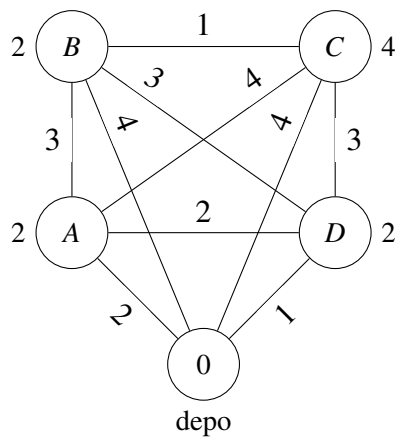
$$\begin{aligned} z_{min}^{WS} &= z_{min}^{d_C=1} \cdot p(d_C = 1) + z_{min}^{d_C=7} \cdot p(d_C = 7) \\ &= 10 \cdot 0,5 + 14 \cdot 0,5 \\ &= 12. \end{aligned}$$

5.4.2 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty

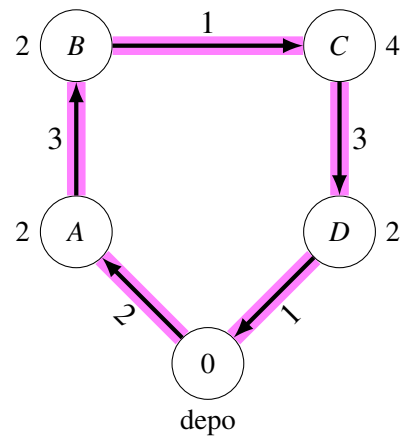
Pokud neznáme předem kapacitu zboží u klienta C , můžeme využít přístup *here-and-now* se střední hodnotou kapacity u klienta C :

$$\begin{aligned} \bar{d}_C &= \mathbb{E}(d_C) = 1 \cdot p(d_C = 1) + 7 \cdot p(d_C = 7) \\ &= 1 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,5 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Náhodnou kapacitu u klienta C nahradíme její střední hodnotou a získáme úlohu zobrazenou v grafu na obrázku 5.18a. Kapacita vozidla $Q = 10$ je dostatečná na pokrytí zboží u všech klientů, proto můžeme úlohu vyřešit jako TSP úlohu. Řešením je tedy posloupnost $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$ s délkou trasy 10, viz obrázek 5.18b. Řešení si označíme $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{EV} = 10$. Řešení úlohy pomocí lineárního programování je dostupné v souboru `vrp_01_EV.py`.



(a) Zadání úlohy.



(b) Řešení úlohy.

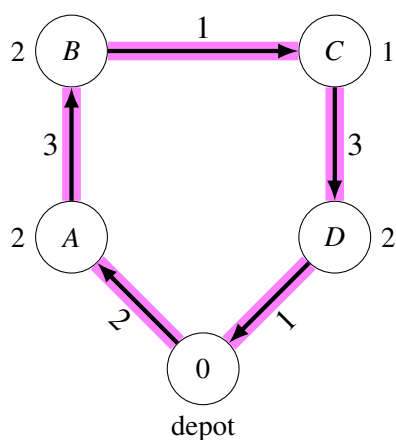
Obrázek 5.18 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím střední hodnoty kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení.

Tím, že jsme využili střední hodnotu, jsme „zapomněli“ na nejistotu a prvek náhody. Jak se ale píše v knize [28]: „even if you forget uncertainty, uncertainty will not forget you“, náhoda a neurčitost na nás nezapomenou. Jakmile přijedeme ke klientovi C , zjistíme kapacitu jeho zboží. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ bude kapacita $d_C = 1$ a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ bude kapacita $d_C = 7$. Pro každý případ postupujeme zvlášť:

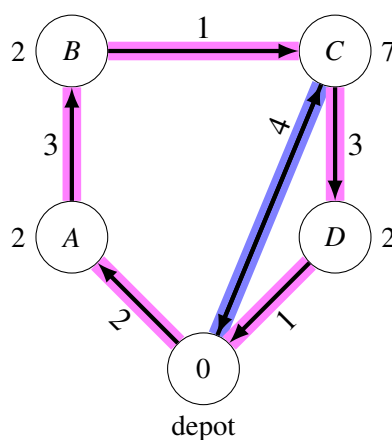
- Pokud kapacita zboží u klienta C je 1, kapacita vozidla $Q = 10$ je dostatečná na pokrytí poptávky všech klientů. Proto pokračujeme dále v naplánované trase. Celková trasa má délku 10, tedy dostáváme $f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 1) = 10$, viz obrázek 5.19a.
- Pokud kapacita zboží u klienta C je 7, kapacita vozidla $Q = 10$ není dostatečná na pokrytí celé poptávky všech klientů. Ke klientovi C jsme přijeli s nákladem o kapacitě 4, zboží o kapacitě 7 už nemůžeme naložit.

Proto se musíme vrátit do depa, kde zboží vyložíme, a vrátíme se zpět ke klientovi C s prázdným vozidlem. Potom pokračujeme v naplánované trase přes klienta D a do depa. Celkovou trasu tvoří posloupnost $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$ s délkou 18, tedy dostáváme $f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 7) = 18$, viz obrázek 5.19b.

Stejného výsledku bychom dosáhli, pokud bychom u klienta C zboží rozdělili. Nejprve bychom vyzvedli zboží o kapacitě 6 (které se nám do vozidla vejde), potom zboží vyložili v depu a vrátili se zpět ke klientovi C a vyzvedli zbytek zboží.



(a) Řešení úlohy.



(b) Řešení úlohy.

Obrázek 5.19 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím střední hodnoty kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení po zjištění kapacity zboží d_C u klienta C .

Nyní vypočítáme hodnotu **EEV**, v našem případě očekávanou délku trasy při využití přístupu střední hodnoty kapacity zboží u klienta C:

$$\begin{aligned}\mathbf{EEV} &= f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 1) \cdot p(d_C = 1) + (\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 7) \cdot p(d_C = 7) \\ &= 10 \cdot 0,5 + 18 \cdot 0,5 \\ &= 14.\end{aligned}$$

5.4.3 Diskuze dosažených výsledků

V tabulce 5.8 jsou sepsány získané výsledky a hodnoty jednotlivých přístupů. Z rozdílu hodnot **EEV** a z_{min}^{EV} zjistíme, jak moc je řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ realistické:

$$\mathbf{EEV} - z_{min}^{EV} = 14 - 10 = 4.$$

Rozdíl vyšel 4, což znamená, že řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ s funkční hodnotou $z_{min}^{EV} = 10$ je optimistické.

z_{min}^{WS}	z_{min}^{EV}	EEV
12	10	14

Tabulka 5.8 Přehled hodnot pro příklad 5.4.

5.5 Ilustrativní úloha 05: rozvozní úloha

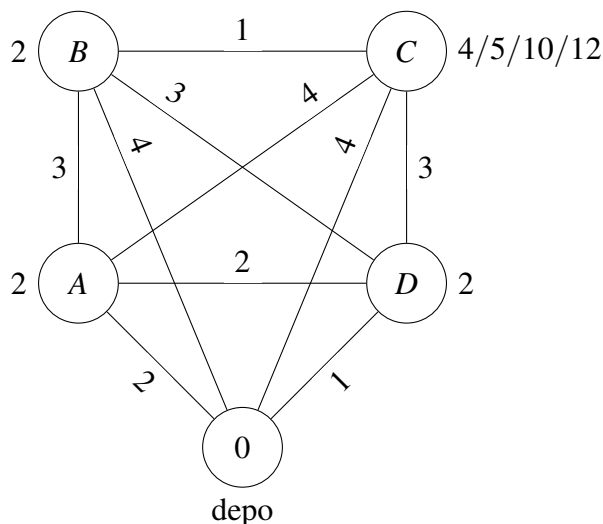
V následujícím příkladu upravíme zadání z příkladu 5.4. Demonstrujeme přístupy *wait-and-see* a *here-and-now* a výpočet hodnoty **EEV**. Inspirace příkladem z [28, str. 40–46].

Příklad 5.5.1 *Jste majitel dopravní firmy a dostali jste novou zakázku. Vaším úkolem je navštívit 4 klienty (označené A, B, C a D) s počátkem i cílem v depu. U každého klienta vyzvednete zboží o určité kapacitě. Vaším cílem je minimalizovat délku trasy a vyzvednout všechno zboží od zákazníků.*

Kapacita zboží u klientů A, B a D je předem známá a rovna 2. Kapacita zboží u klienta C není předem jasná – 4 s 20% pravděpodobností, 5 s 20% pravděpodobností, 10 s 25% pravděpodobností, nebo 12 s 35% pravděpodobností. K dispozici máte vůz s kapacitou 13.

*Při řešení využijte přístup wait-and-see, here-and-now pomocí střední hodnoty a hodnoty modus. Dále vypočítejte hodnotu **EEV** a proveďte diskuzi o výsledcích.*

Zadaný problém můžeme vizualizovat pomocí grafu, viz obrázek 5.20. Vzdálenosti mezi jednotlivými klienty jsou znázorněny čísla nad hranami, kapacita zboží k vyzvednutí je znázorněna čísla u uzlů.



Obrázek 5.20 Grafová reprezentace rozvozní úlohy z příkladu 5.5.

Stejně jako v předchozím příkladu se jedná o rozvozní problém, viz 2.5.1. Cestujeme s vozidlem s omezenou kapacitou $Q = 13$ a kapacita zboží d_C u klienta C je náhodná, viz tabulka 5.10.

poptávka klienta C	4	5	10	12
pravděpodobnost	0,20	0,20	0,25	0,35

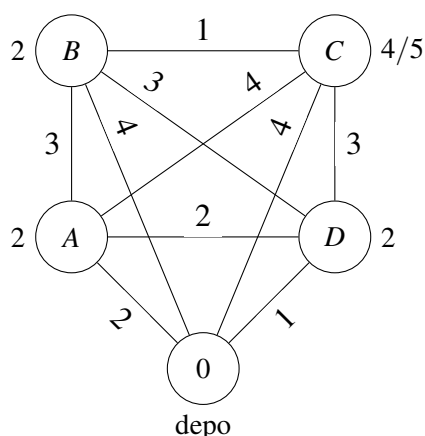
Tabulka 5.9 Pravděpodobnosti možných kapacit poptávek d_C u klienta C pro příklad 5.5.

5.5.1 Přístup *wait-and-see*

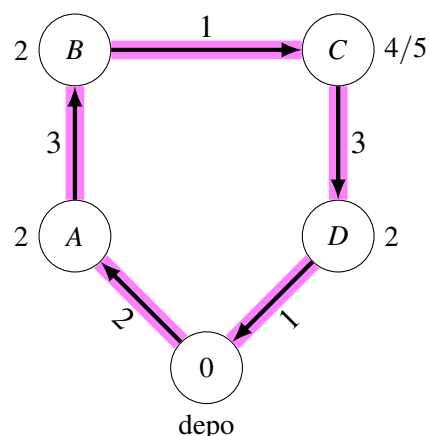
V případě, že bychom předem znali kapacitu zboží d_C u klienta C , můžeme využít přístup *wait-and-see*. Pro každou možnou kapacitu zboží u klienta C vyřešíme odpovídající deterministický problém.

Pro kapacitu $d_C = 4$ řešíme úlohu s grafickou reprezentací na obrázku 5.21a. Kapacita vozidla $Q = 13$ je dostatečná na pokrytí poptávky všech klientů, která je celkem 10, proto můžeme úlohu vyřešit jako TSP problém. Řešením je tedy posloupnost $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$ s délkou trasy 10, viz obrázek 5.21b. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{d_C=4}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{d_C=4} = 10$.

Pro kapacitu $d_C = 5$ je kapacita všech poptávek 11, proto je kapacita vozidla $Q = 13$ dostatečná na pokrytí poptávek všech klientů. Řešením je tedy stejná trasa jako pro $d_C = 4$, tedy $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$, viz obrázek 5.21b. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{d_C=5}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{d_C=5} = 10$.



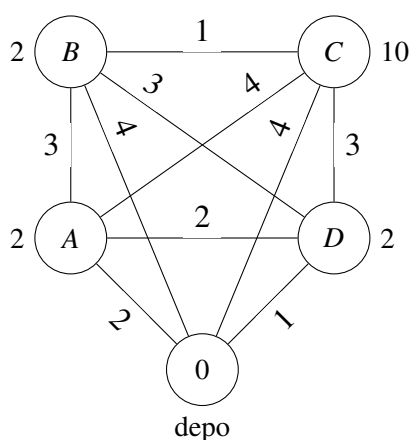
(a) Zadání úlohy.



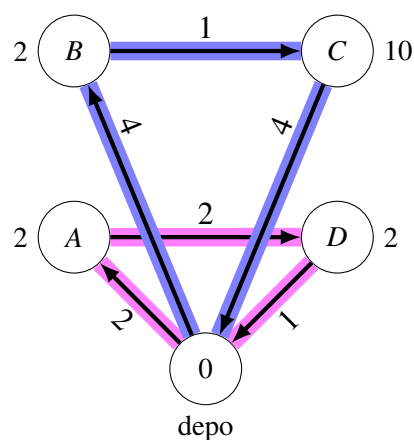
(b) Řešení úlohy.

Obrázek 5.21 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 4$, nebo $d_C = 5$ u klienta C a její řešení.

Pro kapacitu $d_C = 10$ řešíme úlohu s grafickou reprezentací na obrázku 5.22a. Kapacita vozidla $Q = 13$ není dostatečná na pokrytí poptávky všech klientů, která je celkem 16, proto musíme úlohu vyřešit pomocí dvou tras. Řešením je tedy první část trasy $0 \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow 0$, po které vozidlo v depu vyložíme, a druhá část trasy $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$. Celková délka trasy je 14, viz obrázek 5.22b. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{d_C=10}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{d_C=10} = 14$.



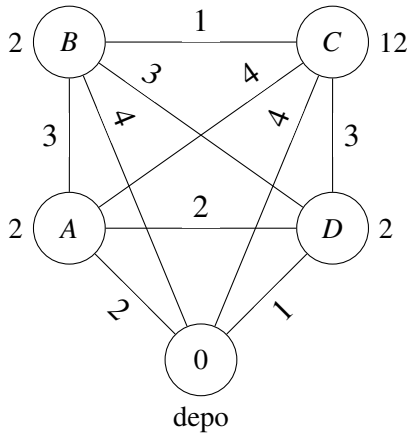
(a) Zadání úlohy.



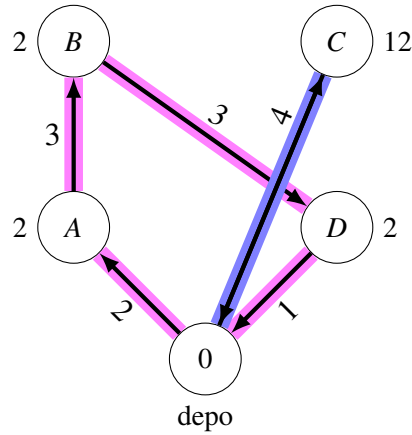
(b) Řešení úlohy.

Obrázek 5.22 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 10$ u klienta C a její řešení.

Pro kapacitu $d_C = 12$ řešíme úlohu s grafickou reprezentací na obrázku 5.23a. Kapacita vozidla $Q = 13$ není dostatečná na pokrytí poptávky všech klientů, která je celkem 18, proto musíme úlohu vyřešit pomocí dvou tras. Řešením je tedy první část trasy $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow 0$, po které vozidlo v depu vyložíme, a druhá část trasy $0 \rightarrow C \rightarrow 0$. Celková délka trasy je 17, viz obrázek 5.23b. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{d_C=12}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{d_C=12} = 17$.



(a) Zadání úlohy.



(b) Řešení úlohy.

Obrázek 5.23 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 12$ u klienta C a její řešení.

Hodnotu optimálního řešení z_{min}^{WS} vypočítáme jako střední (očekávanou) hodnotu při dokonalé znalosti kapacity zboží d_C u klienta C :

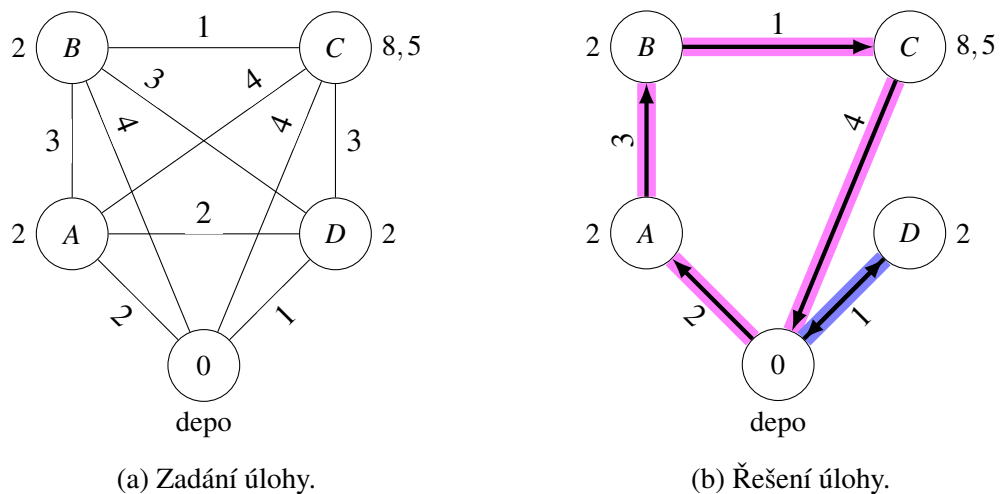
$$\begin{aligned} z_{min}^{WS} &= z_{min}^{d_C=4} \cdot p(d_C = 4) + z_{min}^{d_C=5} \cdot p(d_C = 5) + z_{min}^{d_C=10} \cdot p(d_C = 10) + z_{min}^{d_C=12} \cdot p(d_C = 12) \\ &= 10 \cdot 0,20 + 10 \cdot 0,20 + 14 \cdot 0,25 + 17 \cdot 0,35 \\ &= 13,45. \end{aligned}$$

5.5.2 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty

Pokud neznáme předem kapacitu zboží u klienta C , můžeme využít přístup *here-and-now* se střední hodnotou kapacity u klienta C :

$$\begin{aligned} \bar{d}_C &= \mathbb{E}(d_C) = 4 \cdot p(d_C = 4) + 5 \cdot p(d_C = 5) + 10 \cdot p(d_C = 10) + 12 \cdot p(d_C = 12) \\ &= 4 \cdot 0,20 + 5 \cdot 0,20 + 10 \cdot 0,25 + 12 \cdot 0,35 \\ &= 8,5. \end{aligned}$$

Náhodnou kapacitu u klienta C nahradíme její střední hodnotou a získáme úlohu zobrazenou v grafu na obrázku 5.24a. Kapacita vozidla $Q = 13$ není dostačující na pokrytí zboží u všech klientů, proto úlohu vyřešíme pomocí dvou tras. Řešením je tedy první část trasy $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, po které vozidlo v depu vyložíme, a druhá část trasy $0 \rightarrow D \rightarrow 0$. Celková délka trasy je 12, viz obrázek 5.24b. Řešení si označíme $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{EV} = 12$. Řešení úlohy pomocí lineárního programování je dostupné v souboru `vrp_02_EV.py`.



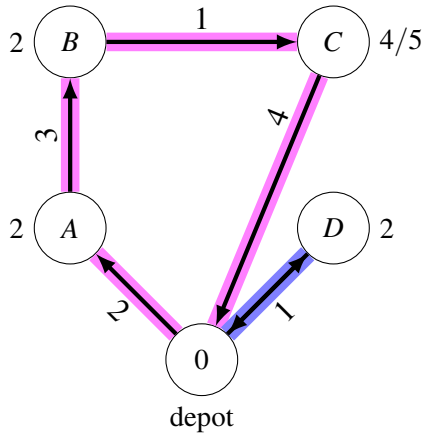
Obrázek 5.24 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím střední hodnoty kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení.

Tím, že jsme využili střední hodnotu, jsme „zapomněli“ na nejistotu a prvek náhody. Jakmile přijedeme ke klientovi C , zjistíme kapacitu jeho zboží. Pro každý případ postupujeme zvlášť:

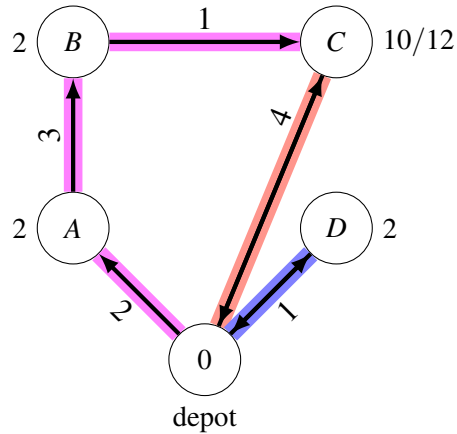
- Pokud kapacita zboží u klienta C je 4, nebo 5, kapacita vozidla $Q = 13$ je dostatečná na pokrytí poptávky všech klientů. Proto pokračujeme dále v naplánované trase. Celková trasa má délku 12, tedy dostáváme $f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 4/5) = 12$, viz obrázek 5.25a.
- Pokud kapacita zboží u klienta C je 10, nebo 12, kapacita vozidla $Q = 13$ není dostatečná na pokrytí celé poptávky všech klientů. Ke klientovi C jsme přijeli s nákladem o kapacitě 4, u klienta C zboží o kapacitě 10, nebo 12 už nemůžeme naložit.

Proto se musíme vrátit od klienta C do depa, kde zboží vyložíme, a vrátíme se zpět ke klientovi C s prázdným vozidlem. Potom pokračujeme v naplánované trase. Celkovou trasu tvoří posloupnost $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \rightarrow C \rightarrow 0 \rightarrow D \rightarrow 0$ s délkou 20, tedy dostáváme $f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 12) = 20$, viz obrázek 5.25b.

Stejného výsledku bychom dosáhli, pokud bychom u klienta C zboží rozdělili. Nejprve bychom vyzvedli zboží o kapacitě 9 (které se nám do vozidla vejde), potom zboží vyložili v depu a vrátili se zpět ke klientovi C a vyzvedli zbytek zboží.



(a) Řešení úlohy.



(b) Řešení úlohy.

Obrázek 5.25 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím střední hodnoty kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení po zjištění kapacity zboží d_C u klienta C .

Nyní vypočítáme hodnotu **EEV**, v našem případě očekávanou délku trasy při využití přístupu střední hodnoty kapacity zboží u klienta C :

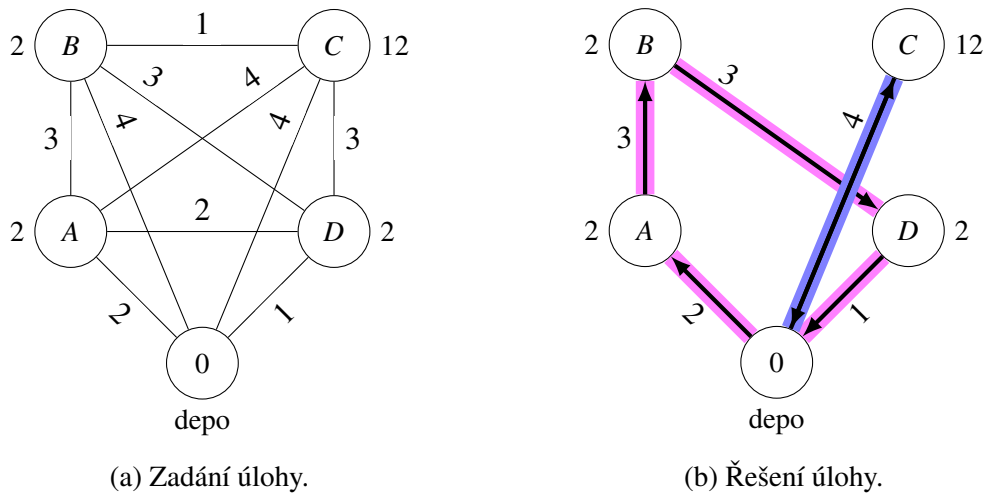
$$\begin{aligned}
 \mathbf{EEV} &= f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 4) \cdot p(d_C = 4) + f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 5) \cdot p(d_C = 5) + \\
 &\quad + f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 10) \cdot p(d_C = 10) + f(\mathbf{x}_{min}^{EV}, d_C = 12) \cdot p(d_C = 12) \\
 &= 12 \cdot 0,20 + 12 \cdot 0,20 + 20 \cdot 0,25 + 20 \cdot 0,35 \\
 &= 16,8.
 \end{aligned}$$

5.5.3 Přístup *here-and-now* pomocí hodnoty modus

Pokud neznáme předem kapacitu zboží u klienta C , můžeme využít přístup *here-and-now* s hodnotou modus kapacity u klienta C :

$$\hat{d}_C = \text{mod}(d_C) = 12.$$

Náhodnou kapacitu u klienta C nahradíme její modus hodnotou a získáme úlohu zobrazenou v grafu na obrázku 5.26a. Kapacita vozidla $Q = 13$ není dostatečná na pokrytí zboží u všech klientů, proto úlohu vyřešíme pomocí dvou tras. Řešením je tedy první část trasy $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow 0$, po které vozidlo v depu vyložíme, a druhá část trasy $0 \rightarrow C \rightarrow 0$. Celková délka trasy je 17, viz obrázek 5.26b. Řešení si označíme $\mathbf{x}_{min}^{MV}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{MV} = 17$. Řešení úlohy pomocí lineárního programování je dostupné v souboru `vrp_02_MV.py`.



Obrázek 5.26 Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím hodnoty modus kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení.

Tím, že jsme využili hodnotu modus, jsme „zapomněli“ na nejistotu a prvek náhody. Jakmile přijedeme ke klientovi C , zjistíme kapacitu jeho zboží. Pro každý případ postupujeme zvlášť:

- V tomto případě bude celková cesta vždy tak, jak je v grafu na obrázku 5.26b. Jelikož trasa k vrcholu C je vždy z depa s prázdným vozidlem, tak kapacita poptávky klienta C nijak tuto trasu neovlivní (dokážeme naložit kapacitu 4, 5, 10 i 12). Celková trasa má délku 17, tedy dostáváme $f(\mathbf{x}_{min}^{MV}, d_C = 4/5/10/12) = 17$.

Nyní vypočítáme hodnotu **EMV**, v našem případě očekávanou délku trasy při využití přístupu hodnoty modus kapacity zboží u klienta C :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{EMV} &= f(\mathbf{x}_{min}^{MV}, d_C = 4) \cdot p(d_C = 4) + f(\mathbf{x}_{min}^{MV}, d_C = 5) \cdot p(d_C = 5) + \\
 &\quad + f(\mathbf{x}_{min}^{MV}, d_C = 10) \cdot p(d_C = 10) + f(\mathbf{x}_{min}^{MV}, d_C = 12) \cdot p(d_C = 12) \\
 &= 17 \cdot 0,20 + 17 \cdot 0,20 + 17 \cdot 0,25 + 17 \cdot 0,35 \\
 &= 17.
 \end{aligned}$$

5.5.4 Diskuze dosažených výsledků

V tabulce 5.10 jsou sepsány získané výsledky a hodnoty jednotlivých přístupů. Z rozdílu hodnot **EEV** a z_{min}^{EV} zjistíme, jak moc je řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ realistické:

$$\mathbf{EEV} - z_{min}^{EV} = 16,8 - 14 = 2,8.$$

Rozdíl vyšel 2,8, což znamená, že řešení $\mathbf{x}_{min}^{EV}$ s funkční hodnotou $z_{min}^{EV} = 14$ je mírně optimistické.

Z rozdílu hodnot **EMV** a z_{min}^{MV} zjistíme, jak moc je řešení $\mathbf{x}_{min}^{MV}$ realistické:

$$\mathbf{EMV} - z_{min}^{MV} = 17 - 17 = 0.$$

Rozdíl vyšel 0, což znamená, že řešení $\mathbf{x}_{min}^{MV}$ s funkční hodnotou $z_{min}^{MV} = 14$ je naprosto realistické.

z_{min}^{WS}	z_{min}^{EV}	z_{min}^{MV}	EEV	EMV
13,45	14	17	16,8	17

Tabulka 5.10 Přehled hodnot pro příklad 5.5.

6 STOCHASTICKÁ OPTIMALIZACE V KYBERBEZPEČNOSTI

Teorie grafů má uplatnění také v oboru kyberbezpečnosti. Pomocí grafů můžeme znázornit topologii sítí, algoritmy pro hledání nejkratších cest (Dijkstrův algoritmus a algoritmus Bellmana Forda) se používají při směrování v Internetu [31, str. 13–14 a Glossary 9]. Propojení teorie grafů s kyberbezpečností se zabývá [32].

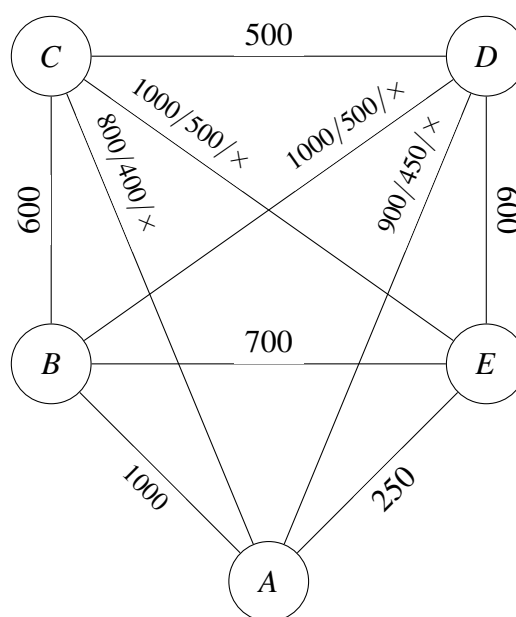
Nyní si ukážeme na ilustrativním příkladu, jak je možné stochastickou optimalizaci využít v oboru kybernetické bezpečnosti. Příklad je zaměřený na přenos souborů v síťové topologii typu mesh.

6.1 Ilustrativní úloha 06: mesh topologie

Příklad 6.1.1 *Ve společnosti máme zařízení zapojená do topologie typu mesh. Každá linka mezi zařízeními má danou přenosovou rychlost v Mbps. U některých linek je riziko výpadků a snížení rychlosti na polovinu s určitou pravděpodobností (u všech vybraných najednou).*

Potřebujeme posílat soubory s určitou velikostí ze zařízení A do zařízení E a to co nejrychleji. Jakou cestu máme použít, abychom i za nejasně daných rychlostí minimalizovali čas na přenos souborů?

Zadaný problém můžeme vizualizovat pomocí grafu, viz obrázek 6.3. Rychlosti linek v Mbps mezi jednotlivými zařízeními jsou znázorněny čísla nad hranami. Pravděpodobnosti snížení rychlosti přenosu a výpadků jsou zaznamenány v tabulce 6.1.

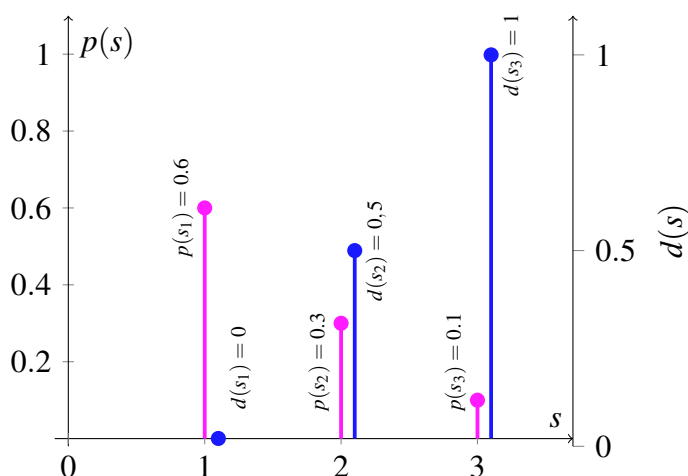


Obrázek 6.1 Grafová reprezentace rozvozní úlohy z příkladu 6.1.

Tabulka 6.1 Možné scénáře přenosových rychlostí jednotlivých linek a jejich pravděpodobnosti výskytu k příkladu 6.1.

Scénář (s)	Faktor snížení	Pravděpodobnost (p)
1	0	0,6
2	0,5	0,3
3	1	0,1

Scénář a proto také faktor snížení a přenosová rychlost dané linky jsou náhodné proměnné. Pravděpodobnostní funkce náhodných proměnných S (scénáře) a D (faktoru snížení) jsou v grafu na obrázku 6.2.



Obrázek 6.2 Pravděpodobnostní funkce náhodné proměnné S (scénářů) a náhodné proměnné D (faktoru snížení).

Nejdříve si úkol zapíšeme jako úlohu matematické optimalizace:

minimalizovat:

$$f = \sum_{(i,j) \in E(G)} \frac{c}{v_{i,j}} \cdot x_{i,j} \quad (6.1)$$

za podmínek:

$$x_{A,B} + x_{A,C} + x_{A,D} + x_{A,E} = 1,$$

$$x_{A,E} + x_{B,E} + x_{C,E} + x_{D,E} = 1,$$

$$x_{B,A} + x_{B,C} + x_{B,D} + x_{B,E} - x_{A,B} - x_{C,B} - x_{D,B} - x_{E,B} = 0,$$

$$x_{C,A} + x_{C,B} + x_{C,D} + x_{C,E} - x_{A,C} - x_{B,C} - x_{D,C} - x_{E,C} = 0,$$

$$x_{D,A} + x_{D,B} + x_{D,C} + x_{D,E} - x_{A,D} - x_{B,D} - x_{C,D} - x_{E,D} = 0,$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i, j = A, B, \dots, E,$$

$$c \geq 0,$$

kde c je kapacita souboru, který potřebujeme přenést, $v_{i,j}$ je přenosová rychlost dané linky, $x_{i,j}$ je binární proměnná pro výběr linky do trasy.

Účelovou funkci si rozepíšeme:

$$\begin{aligned} f = & \frac{c}{v_{A,B}} \cdot x_{A,B} + \frac{c}{v_{A,C}} \cdot x_{A,C} + \frac{c}{v_{A,D}} \cdot x_{A,D} + \frac{c}{v_{A,E}} \cdot x_{A,E} + \frac{c}{v_{B,A}} \cdot x_{B,A} + \frac{c}{v_{B,C}} \cdot x_{B,C} + \\ & + \frac{c}{v_{B,D}} \cdot x_{B,D} + \frac{c}{v_{B,E}} \cdot x_{B,E} + \frac{c}{v_{C,A}} \cdot x_{C,A} + \frac{c}{v_{C,B}} \cdot x_{C,B} + \frac{c}{v_{C,D}} \cdot x_{C,D} + \frac{c}{v_{C,E}} \cdot x_{C,E} + \\ & + \frac{c}{v_{D,A}} \cdot x_{D,A} + \frac{c}{v_{D,B}} \cdot x_{D,B} + \frac{c}{v_{D,C}} \cdot x_{D,C} + \frac{c}{v_{D,E}} \cdot x_{D,E} + \frac{c}{v_{E,A}} \cdot x_{E,A} + \frac{c}{v_{E,B}} \cdot x_{E,B} + \\ & + \frac{c}{v_{E,C}} \cdot x_{E,C} + \frac{c}{v_{E,D}} \cdot x_{E,D} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ze zadání víme, že rychlosti linek $v_{A,C}$, $v_{C,A}$, $v_{A,D}$, $v_{D,A}$, $v_{B,D}$, $v_{D,B}$, $v_{C,E}$, $v_{E,C}$ jsou neurčité, ostatní linky mají deterministicky danou přenosovou rychlost.

Poznámka 4 Pokud nebude napsáno jinak, nadále budeme pracovat se souborem o velikosti $c = 2000 \text{ Mb}$.

Poznámka 5 Ve scénáři $s = 3$ dochází k výpadku některých linek, tedy jejich rychlost přenosu je nulová. Abychom předešli dělení nulou, můžeme pracovat s velmi malou kladnou hodnotou pro danou rychlost, nebo přímo linky z modelu odstranit.

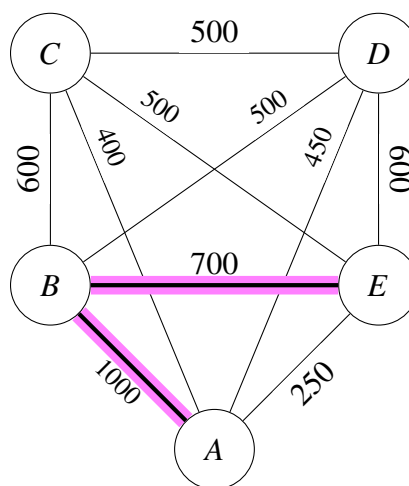
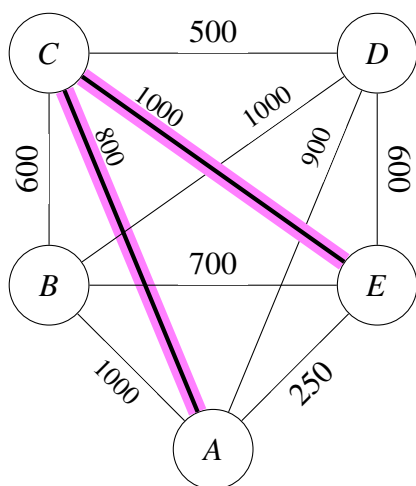
6.1.1 Přístup wait-and-see

Při přístupu *wait-and-see* známe realizaci náhodné proměnné předem, tedy kapacitu jednotlivých linek. Pro každý možný případ vyřešíme odpovídající deterministický problém.

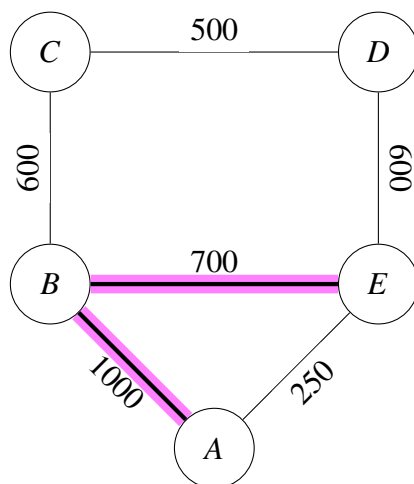
Pro scénář $s = 1$ řešíme úlohu, ve které mají všechny linky plnou přenosovou rychlost. Řešením úlohy je hodnota účelové funkce $f = 4,5$ pro $x_{A,C} = 1$ a $x_{C,E} = 1$, ostatní linky nejsou součástí nejrychlejšího přenosu, viz graf na obrázku 6.3a. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{s=1}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{s=1} = 4,5$.

Pro scénář $s = 2$ řešíme úlohu, ve které mají některé linky poloviční přenosovou rychlost. Řešením úlohy je hodnota účelové funkce $f = 4,85714286$ pro $x_{A,B} = 1$ a $x_{B,E} = 1$, ostatní linky nejsou součástí nejrychlejšího přenosu, viz graf na obrázku 6.3b. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{s=2}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{s=2} = 4,85714286$.

Pro scénář $s = 3$ řešíme úlohu, ve které mají některé linky výpadek, takže přes ně nelze posílat data. Řešením úlohy je hodnota účelové funkce $f = 4,85714286$ pro $x_{A,B} = 1$ a $x_{B,E} = 1$, ostatní linky nejsou součástí nejrychlejšího přenosu, viz graf na obrázku 6.3c. Řešení si označíme jako $\mathbf{x}_{min}^{s=3}$ a jeho funkční hodnotu $z_{min}^{s=3} = 4,85714286$.



(a) Zadání a řešení příkladu pro scénář $s = 1$. (b) Zadání a řešení příkladu pro scénář $s = 2$.



(c) Zadání a řešení příkladu pro scénář $s = 3$.

Obrázek 6.3 Grafová reprezentace úlohy a její řešení k příkladu 6.1.

Hodnotu optimálního řešení z_{min}^{WS} vypočítáme jako střední (očekávanou) hodnotu při dokonalé znalosti přenosových rychlostí všech linek:

$$\begin{aligned} z_{min}^{WS} &= z_{min}^{s=1} \cdot p(s=1) + z_{min}^{s=2} \cdot p(s=2) + z_{min}^{s=3} \cdot p(s=3) \\ &= 4,5 \cdot 0,6 + 4,85714286 \cdot 0,3 + 4,85714286 \cdot 0,1 \\ &\approx 4,643. \end{aligned}$$

6.1.2 Přístup *here-and-now* pomocí střední hodnoty účelové funkce

Nyní si ukážeme, jak aplikovat přístup střední hodnoty účelové funkce. Vycházíme z modelu (6.1). Úkolem je minimalizovat střední hodnotu účelové funkce f (viz (6.2)):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f) &= f(\mathbf{x}, s=1) \cdot p(s=1) + f(\mathbf{x}, s=2) \cdot p(s=2) + f(\mathbf{x}, s=3) \cdot p(s=3) \quad (6.3) \\ &= f(\mathbf{x}, s=1) \cdot 0,6 + f(\mathbf{x}, s=2) \cdot 0,3 + f(\mathbf{x}, s=3) \cdot 0,1 \end{aligned}$$

kde $p(s)$ je pravděpodobnost daného scénáře a $f(\mathbf{x}, s=i)$ je hodnota účelové funkce pro daný scénář. Zkráceným zápisem $f_{s=i}$ označujeme $f(\mathbf{x}, s=i)$. Účelové funkce pro jednotlivé scénáře jsou následující:

$$\begin{aligned} f_{s=1} &= \frac{2000}{1000} \cdot x_{A,B} + \frac{2000}{800} \cdot x_{A,C} + \frac{2000}{900} \cdot x_{A,D} + \frac{2000}{250} \cdot x_{A,E} + \frac{2000}{1000} \cdot x_{B,A} + \frac{2000}{600} \cdot x_{B,C} + \\ &+ \frac{2000}{1000} \cdot x_{B,D} + \frac{2000}{700} \cdot x_{B,E} + \frac{2000}{800} \cdot x_{C,A} + \frac{2000}{600} \cdot x_{C,B} + \frac{2000}{500} \cdot x_{C,D} + \frac{2000}{1000} \cdot x_{C,E} + \\ &+ \frac{2000}{900} \cdot x_{D,A} + \frac{2000}{1000} \cdot x_{D,B} + \frac{2000}{500} \cdot x_{D,C} + \frac{2000}{600} \cdot x_{D,E} + \frac{2000}{250} \cdot x_{E,A} + \frac{2000}{700} \cdot x_{E,B} + \\ &+ \frac{2000}{1000} \cdot x_{E,C} + \frac{2000}{600} \cdot x_{E,D} \\ &= 2 \cdot x_{A,B} + \frac{5}{2} \cdot x_{A,C} + \frac{20}{9} \cdot x_{A,D} + 8 \cdot x_{A,E} + 2 \cdot x_{B,A} + \frac{10}{3} \cdot x_{B,C} + 2 \cdot x_{B,D} + \frac{20}{7} \cdot x_{B,E} + \\ &+ \frac{5}{2} \cdot x_{C,A} + \frac{10}{3} \cdot x_{C,B} + 4 \cdot x_{C,D} + 2 \cdot x_{C,E} + \frac{20}{9} \cdot x_{D,A} + 2 \cdot x_{D,B} + 4 \cdot x_{D,C} + \frac{10}{3} \cdot x_{D,E} + \\ &+ 8 \cdot x_{E,A} + \frac{20}{7} \cdot x_{E,B} + 2 \cdot x_{E,C} + \frac{10}{3} \cdot x_{E,D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{s=2} &= \frac{2000}{1000} \cdot x_{A,B} + \frac{2000}{400} \cdot x_{A,C} + \frac{2000}{450} \cdot x_{A,D} + \frac{2000}{250} \cdot x_{A,E} + \frac{2000}{1000} \cdot x_{B,A} + \frac{2000}{600} \cdot x_{B,C} + \\ &+ \frac{2000}{500} \cdot x_{B,D} + \frac{2000}{700} \cdot x_{B,E} + \frac{2000}{400} \cdot x_{C,A} + \frac{2000}{600} \cdot x_{C,B} + \frac{2000}{500} \cdot x_{C,D} + \frac{2000}{500} \cdot x_{C,E} + \\ &+ \frac{2000}{450} \cdot x_{D,A} + \frac{2000}{500} \cdot x_{D,B} + \frac{2000}{500} \cdot x_{D,C} + \frac{2000}{600} \cdot x_{D,E} + \frac{2000}{250} \cdot x_{E,A} + \frac{2000}{700} \cdot x_{E,B} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2000}{500} \cdot x_{E,C} + \frac{2000}{600} \cdot x_{E,D} \\
& = 2 \cdot x_{A,B} + 5 \cdot x_{A,C} + \frac{40}{9} \cdot x_{A,D} + 8 \cdot x_{A,E} + 2 \cdot x_{B,A} + \frac{10}{3} \cdot x_{B,C} + 4 \cdot x_{B,D} + \frac{20}{7} \cdot x_{B,E} + \\
& + 5 \cdot x_{C,A} + \frac{10}{3} \cdot x_{C,B} + 4 \cdot x_{C,D} + 4 \cdot x_{C,E} + \frac{40}{9} \cdot x_{D,A} + 4 \cdot x_{D,B} + 4 \cdot x_{D,C} + \frac{10}{3} \cdot x_{D,E} + \\
& + 8 \cdot x_{E,A} + \frac{20}{7} \cdot x_{E,B} + 4 \cdot x_{E,C} + \frac{10}{3} \cdot x_{E,D}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{s=3} & = \frac{2000}{1000} \cdot x_{A,B} + \frac{2000}{0,0\dots01} \cdot x_{A,C} + \frac{2000}{0,0\dots01} \cdot x_{A,D} + \frac{2000}{250} \cdot x_{A,E} + \frac{2000}{1000} \cdot x_{B,A} + \\
& + \frac{2000}{600} \cdot x_{B,C} + \frac{2000}{0,0\dots01} \cdot x_{B,D} + \frac{2000}{700} \cdot x_{B,E} + \frac{2000}{0,0\dots01} \cdot x_{C,A} + \frac{2000}{600} \cdot x_{C,B} + \\
& + \frac{2000}{500} \cdot x_{C,D} + \frac{2000}{0,0\dots01} \cdot x_{C,E} + \frac{2000}{0,0\dots01} \cdot x_{D,A} + \frac{2000}{0,0\dots01} \cdot x_{D,B} + \\
& + \frac{2000}{500} \cdot x_{D,C} + \frac{2000}{600} \cdot x_{D,E} + \frac{2000}{250} \cdot x_{E,A} + \frac{2000}{700} \cdot x_{E,B} + \frac{2000}{0,0\dots01} \cdot x_{E,C} + \\
& + \frac{2000}{600} \cdot x_{E,D} \\
& = 2 \cdot x_{A,B} + \infty \cdot x_{A,C} + \infty \cdot x_{A,D} + 8 \cdot x_{A,E} + 2 \cdot x_{B,A} + \frac{10}{3} \cdot x_{B,C} + \infty \cdot x_{B,D} + \frac{20}{7} \cdot x_{B,E} + \\
& + \infty \cdot x_{C,A} + \frac{10}{3} \cdot x_{C,B} + 4 \cdot x_{C,D} + \infty \cdot x_{C,E} + \infty \cdot x_{D,A} + \infty \cdot x_{D,B} + 4 \cdot x_{D,C} + \frac{10}{3} \cdot x_{D,E} + \\
& + 8 \cdot x_{E,A} + \frac{20}{7} \cdot x_{E,B} + \infty \cdot x_{E,C} + \frac{10}{3} \cdot x_{E,D}
\end{aligned}$$

Po rozepsání střední hodnoty účelové funkce podle (6.3) dostaneme:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f) & = x_{A,B} \cdot (0,6 \cdot 2 + 0,3 \cdot 2 + 0,1 \cdot 2) + x_{A,C} \cdot (0,6 \cdot \frac{5}{2} + 0,3 \cdot 5 + 0,1 \cdot \infty) + \\
& + x_{A,D} \cdot (0,6 \cdot \frac{20}{9} + 0,3 \cdot \frac{40}{9} + 0,1 \cdot \infty) + x_{A,E} \cdot (0,6 \cdot 8 + 0,3 \cdot 8 + 0,1 \cdot 8) + \\
& + x_{B,A} \cdot (0,6 \cdot 2 + 0,3 \cdot 2 + 0,1 \cdot 2) + x_{B,C} \cdot (0,6 \cdot \frac{10}{3} + 0,3 \cdot \frac{10}{3} + 0,1 \cdot \frac{10}{3}) + \\
& + x_{B,D} \cdot (0,6 \cdot 2 + 0,3 \cdot 4 + 0,1 \cdot \infty) + x_{B,E} \cdot (0,6 \cdot \frac{20}{7} + 0,3 \cdot \frac{20}{7} + 0,1 \cdot \frac{20}{7}) + \\
& + x_{C,A} \cdot (0,6 \cdot \frac{5}{2} + 0,3 \cdot 5 + 0,1 \cdot \infty) + x_{C,B} \cdot (0,6 \cdot \frac{10}{3} + 0,3 \cdot \frac{10}{3} + 0,1 \cdot \frac{10}{3}) + \\
& + x_{C,D} \cdot (0,6 \cdot 4 + 0,3 \cdot 4 + 0,1 \cdot 4) + x_{C,E} \cdot (0,6 \cdot 2 + 0,3 \cdot 4 + 0,1 \cdot \infty) + \\
& + x_{D,A} \cdot (0,6 \cdot \frac{20}{9} + 0,3 \cdot \frac{40}{9} + 0,1 \cdot \infty) + x_{D,B} \cdot (0,6 \cdot 2 + 0,3 \cdot 4 + 0,1 \cdot \infty) + \\
& + x_{D,C} \cdot (0,6 \cdot 4 + 0,3 \cdot 4 + 0,1 \cdot 4) + x_{D,E} \cdot (0,6 \cdot \frac{10}{3} + 0,3 \cdot \frac{10}{3} + 0,1 \cdot \frac{10}{3}) + \\
& + x_{E,A} \cdot (0,6 \cdot 8 + 0,3 \cdot 8 + 0,1 \cdot 8) + x_{E,B} \cdot (0,6 \cdot \frac{20}{7} + 0,3 \cdot \frac{20}{7} + 0,1 \cdot \frac{20}{7}) +
\end{aligned}$$

$$+x_{E,C} \cdot (0,6 \cdot 2 + 0,3 \cdot 4 + 0,1 \cdot \infty) + x_{E,D} \cdot (0,6 \cdot \frac{10}{3} + 0,3 \cdot \frac{10}{3} + 0,1 \cdot \frac{10}{3})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f) = & 2 \cdot x_{A,B} + \infty \cdot x_{A,C} + \infty \cdot x_{A,D} + 8 \cdot x_{A,E} + 2 \cdot x_{B,A} + \frac{10}{3} \cdot x_{B,C} + \infty \cdot x_{B,D} + \\ & + \frac{20}{7} \cdot x_{B,E} + \infty \cdot x_{C,A} + \frac{10}{3} \cdot x_{C,B} + 4 \cdot x_{C,D} + \infty \cdot x_{C,E} + \infty \cdot x_{D,A} + \infty \cdot x_{D,B} + \\ & + 4 \cdot x_{D,C} + \frac{10}{3} \cdot x_{D,E} + 8 \cdot x_{E,A} + \frac{20}{7} \cdot x_{E,B} + \infty \cdot x_{E,C} + \frac{10}{3} \cdot x_{E,D}, \end{aligned}$$

což je účelová funkce lineárního modelu. Řešením úlohy je hodnota účelové funkce $f = 4,85714286$ pro $x_{AB} = 1$ a $x_{BE} = 1$, ostatní linky nejsou součástí nejrychlejšího přenosu. Řešení si označíme $\mathbf{x}_{min}^{EO}$ a funkční hodnotu $z_{min}^{EO} = 4,85714286$.

6.1.3 Hodnota EVPI

Očekávanou hodnotu perfektní informace **EVPI** vypočítáme podle (4.11) jako rozdíl hodnot z_{min}^{EO} a z_{min}^{WS} :

$$\begin{aligned} \mathbf{EVPI} &= z_{min}^{EO} - z_{min}^{WS} \\ &= 4,85714286 - 4,643 \\ &\approx 0,214. \end{aligned}$$

6.1.4 Diskuze dosažených výsledků

V tabulce 6.2 jsou sepsány získané výsledky a hodnoty jednotlivých přístupů.

Z hodnoty **EVPI** = 0,214 vidíme, že je výhodné zjistit informace o budoucí realizaci náhodné proměnné, tedy o scénáři a rychlostech jednotlivých linek.

z_{min}^{WS}	z_{min}^{EO}	EVPI
4,643	4,85714286	0,214

Tabulka 6.2 Přehled hodnot pro příklad 6.1.

ZÁVĚR

Práce seznámila čtenáře se stochastickým programováním a základními přístupy, jak problémy s neurčitostí řešit. Propojili jsme matematickou optimalizaci, teorii grafů, pravděpodobnost a statistiku.

Nejprve jsme se zaměřili na oblast matematické optimalizace a teorie grafů. Ukázali jsme, že grafové problémy lze formulovat pomocí matematické optimalizace, např. jako úlohu lineárního programování. Představili jsme problém nejkratší cesty, problém obchodního cestujícího a rozvozní problém.

Dále jsme se věnovali základním pojmům z pravděpodobnosti a statistiky, které se využívají v úlohách stochastického programování. Zaměřili jsme se na rozdělení pravděpodobnosti a charakteristiky náhodných veličin.

Ve čtvrté kapitole jsme se zabývali stochastickým programováním. Definovali jsme obecnou úlohu stochastické optimalizace. Součástí této kapitoly jsou popisy dvou základních přístupů pro řešení problémů s neurčitostí. Nejprve jsme popsali přístup *wait-and-see*, který spočívá v čekání na realizaci náhodných proměnných. Dále jsme se věnovali přístupu *here-and-now*, který spočívá v učinění rozhodnutí před zjištěním realizace náhodných proměnných. V rámci *here-and-now* modelů jsme představili přístup individuálních scénářů, přístup střední hodnoty a přístup střední hodnoty účelové funkce. Dále jsme definovali očekávaný výsledek při použití přístupu střední hodnoty (**EEV**), hodnotu stochastického řešení (**VSS**) a hodnotu perfektní informace (**EVPI**). Zmíněné hodnoty nám umožňují porovnat řešení z jednotlivých přístupů a zjistit o řešení další informace.

Další kapitola obsahuje ilustrativní úlohy. Na ukázkových příkladech jsme demonstrovali jednotlivé přístupy k řešení. Úlohy obsahují názorné obrázky a podrobné kroky vybraných modelů. Pomocí hodnot **EEV**, **VSS** a **EVPI** jsme aplikované přístupy mezi sebou porovnali a popsali, co z hodnot vyplývá. Součástí jsou také zdrojové kódy v jazyce Python, které dané úlohy řeší. V kapitole jsme se zaměřili na úlohy související s dopravou, konkrétně problém nejkratší cesty, problém obchodního cestujícího a rozvozní problém.

Na závěr jsme se věnovali aplikaci stochastické optimalizace v oblasti kyberbezpečnosti. Vytvořili jsme ilustrativní příklad na minimalizaci času potřebného pro přenos souborů v počítačové síti s topologií mesh. Neurčitost zde představují výpadky a snižování přenosových

rychlostí vybraných linek s určitou pravděpodobností. Na příkladu jsme ukázali přístup *wait-and-see* a *here-and-now* se střední hodnotou účelové funkce.

Možným navázáním na práci je studium dvoustupňové a víceetapňové stochastické optimalizace, která se často v reálných situacích aplikuje, a pokročilých algoritmů pro řešení problémů. Vhodným směrem pro další výzkum je také podrobná analýza dat zaměřených na přínos přístupu *here-and-now* se střední hodnotou účelové funkce. Šlo by tedy o zaměření na hodnotu stochastického řešení (VSS), která nám popisuje přínos modelu střední účelové funkce oproti modelu střední hodnoty.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] TURZÍK, Daniel, 1999. *Matematika III*. Vydavatelství VŠCHT. 3. vyd. vyd. ISBN 80-7080-363-0. Dostupné z: http://147.33.74.135/knihy/uid_isbn-80-7080-363-0/pages-img/.
- [2] KORTE, Bernhard a VYGEN, Jens, 2018. *Combinatorial Optimization*. Springer Berlin Heidelberg. Fifth edition vyd. ISBN 978-3-662-56038-9. Dostupné z: 10.1007/978-3-662-56039-6. Dostupné z: <https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kpanagio/KombOpt/book.pdf>. [cit. 2025-04-17].
- [3] SEKNIČKOVÁ, Jana. 4EK213 – Lineární modely. Dostupné z: <http://jana.kalcev.cz/vyuka/kestazeni/4EK213-LM/LM-pred09.pdf>.
- [4] CORMEN, Thomas H., 2009. *Introduction to algorithms*. MIT Press. 3rd ed vyd. ISBN 978-0262033848. Dostupné z: https://pd.daffodilvarsity.edu.bd/course/material/book-430/pdf_content.
- [5] ŠIKUDOVÁ, Lucie, 2023. Optimalizační a grafové problémy. Dostupné z: <https://digilib.k.utb.cz/handle/10563/53932>.
- [6] HLINĚNÝ, Petr, 2010. *Základy teorie grafů*. Elportál. Masarykova univerzita. 1. vyd. vyd. Dostupné z: <http://is.muni.cz/elportal/?id=878389>.
- [7] KOVÁŘ, Petr, 2021. *Úvod do Teorie grafů*. Dostupné z: https://homel.vsb.cz/~kov16/files/uvod_do_teorie_grafu.pdf.
- [8] TACCARI, Leonardo, 2016. Integer programming formulations for the elementary shortest path problem. *European Journal of Operational Research*. 2016. 252, č. 1, s. 122–130. ISSN 0377-2217. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.01.003>. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037722171600084>.
- [9] GUTIN, Gregory a PUNNEN, Abraham P., 2007. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*. Springer US. ISBN 978-0-387-44459-8. Dostupné z: 10.1007/b101971. Dostupné z: https://books.google.cz/books?hl=cs&lr=&id=JBK_BAAAQBAJ&oi=fnd

&pg=PR3&dq=Traveling+Salesman+Problem+and+Its+Variations+Autor+G.+Gutin,
+A.P.+Punnen&ots=kYxhGtT--L&sig=Op_zIl6Vq3Pg7P2dk527HBNE4rE&redir_esc=y#
v=onepage&q&f=false.

- [10] MATAI, Rajesh; SINGH, Surya a MITTAL, M.L., 11 2010. *Traveling Salesman Problem: an Overview of Applications, Formulations, and Solution Approaches*. ISBN 978-953-307-426-9. Dostupné z: 10.5772/12909. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/221909777_Traveling_Salesman_Problem_an_Overview_of_Applications_Formulations_and_Solution_Approaches.
- [11] DEMEL, Jiří, 2019. *Grafy a jejich aplikace*. 3. vydání vyd. Dostupné z: <https://kix.fsv.cvut.cz/~demel/grafy/gr.pdf>.
- [12] LAVROV, Mikhail. Traveling Salesman Problem. Dostupné z: <https://misha.fish/archive/docs/482-spring-2020/slides35.pdf>.
- [13] SINGH, Karanjot; BEDI, Simran Kaur a GAUR, Prerna, 2020. Identification of the most efficient algorithm to find Hamiltonian Path in practical conditions. In: *2020 10th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence)*. s. 38–44. Dostupné z: 10.1109/Confluence47617.2020.9058283.
- [14] GHIANI, Gianpaolo; LAPORTE, Gilbert a MUSMANNO, Roberto, 2004. *Introduction to logistics systems planning and control*. J. Wiley. ISBN 0-470-84916-9. Dostupné z: <https://industri.fatek.unpatti.ac.id/wp-content/uploads/2019/03/143-Introduction-to-Logistics-Systems-Planning-and-Control-Gianpaolo-Ghiani-Gilbert-Laporte-Roberto-Musmanno-Edisi-1-2004.pdf>.
- [15] TOTH, Paolo a VIGO, Daniele, 2014. *Vehicle Routing*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Dostupné z: 10.1137/1.9781611973594. Dostupné z: https://spada.uns.ac.id/pluginfile.php/173003/mod_folder/content/0/Vehicle%20Routing%20Problem/2.%20Vehicle%20Routing_%20Problems%2C%20Methods%2C%20and%20Applications%2C%20Second%20Edition%20%28%20PDFDrive.com%20%29.pdf.
- [16] BRANDA, Martin. Introduction into Vehicle Routing Problems and other basic mixed-integer problems. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~branda/download/06_Branda_VRP_en.pdf.

- [17] NAVARA, Mirko. Pravděpodobnost a statistika; Opakování pro rozpoznávání. Dostupné z: https://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MVT/MVT_print.pdf.
- [18] BARÁKOVÁ, Miluše, 2023. Pravděpodobnost a statistika. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps23/metodika_matematiky/web/pages/06_02_pravdepodobnost_statistika.html.
- [19] HLAVÁČ, Václav. Pravděpodobnost a statistika; Opakování pro rozpoznávání. Dostupné z: <https://people.ciirc.cvut.cz/hlavac/TeachPresCz/05Matematika/02ProbabStatRehersalCz.pdf>.
- [20] Základy teorie pravděpodobnosti. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zichova/PRFUK/MatStat/02_pravdepodobnost_tisk.pdf.
- [21] FORBELSKÁ, Marie a KOLÁČEK, Jan. Pravděpodobnost a statistika I. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/sci/jaro2016/M4122/um/M3121_text.pdf.
- [22] HUDECOVÁ. Matematická statistika. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~hudecova/education/archive11/download/chem_predn/predn_slides_02.pdf.
- [23] HOLČÍK, Jiří, . Matematická biologie učebnice: Náhodná veličina, rozdělení pravděpodobnosti a reálná data. Dostupné z: <https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickych-a-biologickych-dat--biostatistika-pro-matematickou-biologii--nahodna-velicina-rozdeleni-pravdepodobnosti-a-realna-data>.
- [24] HOLČÍK, Jiří, . Matematická biologie učebnice: Náhodná veličina a distribuční funkce. Dostupné z: <https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickych-a-biologickych-dat--biostatistika-pro-matematickou-biologii--nahodna-velicina-rozdeleni-pravdepodobnosti-a-realna-data--nahodna-velicina-a-distribucni-funkce>.
- [25] HOLČÍK, Jiří, . Matematická biologie učebnice: Spojité a diskrétní náhodné veličiny. Dostupné z: <https://portal.matematickabiologie.cz/index.php?pg=aplikovana-analyza-klinickych-a-biologickych-dat--biostatistika-pro-matematickou-biologii--nahodna-velicina-rozdeleni-pravdepodobnosti-a-realna-data--spojite-a-diskretni-nahodne-veliciny>.

- [26] KALL, Peter a WALLACE, Stein W., 1994. *Stochastic Programming*. John Wiley & Sons. Dostupné z: <https://www.stoprog.org/sites/default/files/files/manujw.pdf>.
- [27] POPELA, Pavel. *Stochastic Programming*. Dostupné z: https://is.muni.cz/www/jkr ejci/Stochastic_Programming.pdf.
- [28] BIRGE, John R. a LOUVEAUX, François, 2011. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer New York. Second edition vyd. ISBN 978-1-4614-0236-7. Dostupné z: <https://industri.fatek.unpatti.ac.id/wp-content/uploads/2019/03/120-Introduction-to-Stochastic-Programming-John-R.-Birge-Francois-Louveaux-Edisi-2-2011.pdf>.
- [29] BIRGE, John R., 1982. The value of the stochastic solution in stochastic linear programs with fixed recourse. *Mathematical Programming*. 1982. 24, č. 1, s. 314–325. ISSN 0025-5610. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/BF01585113>.
- [30] © 2025. Pop-up shop — Hands-On Mathematical Optimization with AMPL in Python. Dostupné z: https://ampl.com/mo-book/notebooks/09/pop-up_shop.html.
- [31] WALLACE, Kevin, © 2015. *CCNP Routing and Switching ROUTE 300-101 Official Cert Guide*. Cisco Press. ISBN 978-1-58720-559-0. Dostupné z: <https://dl.hiva-network.com/Library/Cisco/CCNP%20Routing%20and%20Switching%20ROUTE%20300-101%20official%20Cert%20Guide.pdf>.
- [32] DAWOOD, Harith A., 2014. Graph Theory and Cyber Security. In: *2014 3rd International Conference on Advanced Computer Science Applications and Technologies*. s. 90–96. IEEE. ISBN 978-1-4799-1845-4. Dostupné z: 10.1109/ACSAT.2014.23. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/7076875/>.

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 2.1	Orientovaný graf G k příkladu nejkratší cesty 2.3.1.....	26
Obrázek 2.2	Neorientovaný graf G k TSP příkladu 2.4.1.	28
Obrázek 3.1	Pravděpodobnostní a distribuční funkce náhodné veličiny s alternativním rozdělením pravděpodobnosti s $p = 0.7$	39
Obrázek 3.2	Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti.	40
Obrázek 5.1	Pravděpodobnostní a distribuční funkce náhodné veličiny ξ s alternativním rozdělením pravděpodobnosti s $p = 0.6$ z úlohy 5.1.....	51
Obrázek 5.2	Graf minimalizované funkce z příkladu 5.1. Funkce f_0 pro hodnotu $\xi = 0$ a funkce f_1 pro hodnotu $\xi = 1$	51
Obrázek 5.3	Graf minimalizované funkce z příkladu 5.1 pomocí přístupu EV.	53
Obrázek 5.4	Graf minimalizované funkce z příkladu 5.1 pomocí přístupu EO.....	56
Obrázek 5.5	Pravděpodobnostní funkce náhodné proměnné S (scénářů) a náhodné proměnné D (poptávky).	58
Obrázek 5.6	Graf účelové funkce z příkladu 5.2. Funkce $f(x,y)$ představuje zisk při x vyrobených a y prodaných kabelkách.....	60
Obrázek 5.7	Graf (heat mapa) účelové funkce z příkladu 5.2 zobrazující hodnoty ve 2D prostoru. Funkce $f(x,y)$ představuje zisk při x vyrobených a y prodaných kabelkách.....	60
Obrázek 5.8	Graf (heat mapa) účelové funkce z příkladu 5.2 zobrazující hodnoty ve 2D prostoru při přístupu <i>wait-and-see</i> . Funkce $f(x,y)$ představuje zisk při x vyrobených a y prodaných kabelkách.....	61
Obrázek 5.9	Graf (heat mapa) účelové funkce z příkladu 5.2 zobrazující hodnoty ve 2D prostoru při přístupu <i>here-and-now</i> se střední hodnotou $\bar{d} = 59$. Funkce $f(x,y)$ představuje zisk při 59 vyrobených a y prodaných kabelkách.	63
Obrázek 5.10	Graf (heat mapa) účelové funkce z příkladu 5.2 zobrazující hodnoty ve 2D prostoru při přístupu <i>here-and-now</i> se střední hodnotou účelové funkce. Funkce $f(x,y)$ představuje zisk v Kč při 50 vyrobených a y prodaných kabelkách.	66

Obrázek 5.11	Orientovaný graf G k příkladu 5.3 (obrázek převzat z [4, str. 659]).	67
Obrázek 5.12	Grafová reprezentace problému nejkratší cesty s hranou $e_6 = 2$ a jeho řešení.	69
Obrázek 5.13	Grafová reprezentace problému nejkratší cesty s hranou $e_6 = 9$ a jeho řešení.	69
Obrázek 5.14	Grafová reprezentace problému nejkratší cesty se střední hodnotou hrany $e_6 = 4, 1$ a jeho řešení.	70
Obrázek 5.15	Grafová reprezentace rozvozní úlohy z příkladu 5.4.	73
Obrázek 5.16	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 1$ u klienta C a její řešení.	74
Obrázek 5.17	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 7$ u klienta C a její řešení.	74
Obrázek 5.18	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím střední hodnoty kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení.	75
Obrázek 5.19	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím střední hodnoty kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení po zjištění kapacity zboží d_C u klienta C .	76
Obrázek 5.20	Grafová reprezentace rozvozní úlohy z příkladu 5.5.	78
Obrázek 5.21	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 4$, nebo $d_C = 5$ u klienta C a její řešení.	79
Obrázek 5.22	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 10$ u klienta C a její řešení.	79
Obrázek 5.23	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s kapacitou zboží $d_C = 12$ u klienta C a její řešení.	80
Obrázek 5.24	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím střední hodnoty kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení.	81
Obrázek 5.25	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím střední hodnoty kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení po zjištění kapacity zboží d_C u klienta C .	82
Obrázek 5.26	Grafová reprezentace rozvozní úlohy s využitím hodnoty modus kapacity zboží d_C u klienta C a její řešení.	83
Obrázek 6.1	Grafová reprezentace rozvozní úlohy z příkladu 6.1.	85

Obrázek 6.2	Pravděpodobnostní funkce náhodné proměnné S (scénářů) a náhodné proměnné D (faktoru snížení).	86
Obrázek 6.3	Grafová reprezentace úlohy a její řešení k příkladu 6.1.	88

SEZNAM TABULEK

Tabulka 5.1	Přehled hodnot pro příklad 5.1.....	57
Tabulka 5.2	Typické scénáře podle dat z minulých ročníků pro příklad 5.2.	58
Tabulka 5.3	Celkový zisk při jednotlivých scénářích při přístupu <i>wait-and-see</i>	61
Tabulka 5.4	Celkový zisk při jednotlivých scénářích při využití EV modelu.	63
Tabulka 5.5	Celkový zisk při jednotlivých scénářích při využití EO modelu.	65
Tabulka 5.6	Přehled hodnot pro příklad 5.2.....	67
Tabulka 5.7	Přehled hodnot pro příklad 5.3.....	72
Tabulka 5.8	Přehled hodnot pro příklad 5.4.....	77
Tabulka 5.9	Pravděpodobnosti možných kapacit poptávek d_C u klienta C pro pří- klad 5.5.....	78
Tabulka 5.10	Přehled hodnot pro příklad 5.5.....	84
Tabulka 6.1	Možné scénáře přenosových rychlostí jednotlivých linek a jejich prav- děpodobnosti výskytu k příkladu 6.1.	86
Tabulka 6.2	Přehled hodnot pro příklad 6.1.....	91

SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA P I: prilohy.zip

PŘÍLOHA P I: PRILOHY.ZIP

1. HANDBAG_EV.PY, řešení úlohy 5.2 pomocí střední hodnoty (EV model),
2. HANDBAG_EO.PY, řešení úlohy 5.2 pomocí střední hodnoty účelové funkce (EO model),
3. SSSP_EV.PY, řešení úlohy 5.3 pomocí střední hodnoty (EV model),
4. SSSP_EO.PY, řešení úlohy 5.3 pomocí střední hodnoty účelové funkce (EO model),
5. VRP_01_EV.PY, řešení úlohy 5.4 pomocí střední hodnoty (EV model),
6. VRP_02_EV.PY, řešení úlohy 5.5 pomocí střední hodnoty (EV model),
7. VRP_02_MV.PY, řešení úlohy 5.5 pomocí hodnoty modus (MV model),
8. MESH_EO.PY, řešení úlohy 6.1 pomocí střední hodnoty účelové funkce (EO model).